

对基于质点速度测量的拉格朗日分析法的进一步探讨

丁圆圆, 杨黎明, 王礼立*

(宁波大学 力学与材料科学研究中心, 浙江 宁波 315211)

摘要: 针对以往基于质点速度波形测量使用拉格朗日分析法反推材料动态力学性能时, 需作某种简化假定或者必须同时实测应力边界, 而在实验过程中的边界应力数据在某些情况下测不到或测不准的状况. 因此基于路径线法和零初始条件, 提出了一种改进的拉格朗日分析法, 新方法可不涉及边界应力, 直接反推出材料高应变率下的动态应力应变曲线. 并且运用该方法对有机玻璃材料的动态性能进行了数值模拟研究分析, 其结果与运用特征线法求得到的数据非常吻合, 从而证实了该方法的可靠性和有效性.

关键词: 波传播; 拉格朗日分析; 率型本构关系

中图分类号: TU45

文献标识码: A

文章编号: 1001-5132 (2012) 04-0083-05

在通过爆炸和冲击动力学实验研究材料的动态特性时, 一般都要涉及材料的结构惯性效应(应力波效应)和材料应变率效应, 但问题的难点在于这两种效应往往相互耦合、相互影响、相互依赖, 从而使问题变得复杂化. 一方面, 应力波传播分析必须建立在已知材料动态本构的前提下; 另一方面, 当研究材料在高应变率下的动态本构时, 又必定会涉及到应力波在材料中的传播及其作用. 目前, 研究材料高应变率下的动态本构关系并解决该“狗咬尾巴”问题最常用的有两种方法: 第一种是想将实验中试件的应变波效应和应变率效应解耦, 最为典型并应用最广泛的是分离式 Hopkinson 杆技术(SHPB); 另一种是波传播法, 利用试件中波传播信息来反推材料本构关系^[1-2].

研究材料的动态本构关系最为常用的方法是利用分离式 Hopkinson 杆技术, 但此套技术是建立在两个基本假定之上, 即要满足一维应力波传播假定和应力沿试件长度均匀分布的假定. 但对于有些材料, 譬如脆性材料和泡沫材料等, 在做 SHPB 试验过程中很难满足应力沿试件长度均匀分布的假定^[3-4]. 此时, 就需要用第 2 种方法——波传

播法来研究这些材料的动态力学性能.

Lagrange 分析方法是由 Fowles^[5]、Cowperthwaite 和 Williams^[6]以及 Grady^[7]等人首先提出并发展的. 其主要思想是事先不作任何的本构假定, 通过测量材料几个不同位置点的力学信息量(应力、应变或速度等), 由守恒方程经过数学推算和数值计算, 求得其他力学未知量, 从而得到材料的动态应力应变曲线, 并建立该材料的本构关系^[8]. 李孝兰^[9]通过测量一组拉格朗日粒子速度进行拉格朗日分析, 揭示有机玻璃与应变率相关的弹-塑性本构关系特征; 乔河等人^[10]用 Lagrange 分析方法得到了花岗岩的本构关系; 陈叶青等人^[11]用拉格朗日曲面拟和法研究水泥石的动态力学性能, 并获得了水泥石在气炮试验中的应变滞回特性、应变率效应及波形弥散特征. 赖华伟和王礼立提出了 Hopkinson 杆技术和 Lagrange 分析法相结合的“1sv+nv”的新方法^[12-13]. 朱珏也利用该方法研究了混凝土类材料的动态本构特性^[2].

但有时由于实验装置和材料结构的特殊性, 无法同时测得边界应力和速度信息, 或者测得的信息失真. 针对此种情况, 笔者提出了“nv+T0”

收稿日期: 2012-07-16.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://3xb.nbu.edu.cn>

基金项目: 国家自然科学基金项目(11032001); 宁波大学王宽诚幸福基金项目.

第一作者: 丁圆圆(1987—), 男, 浙江上虞人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 冲击动力学. E-mail: dingyuanyuan2@126.com

*通讯作者: 王礼立(1934—), 男, 浙江宁波人, 博导/教授, 主要研究方向: 冲击动力学. E-mail: wanglili@nbu.edu.cn

的 Lagrange 分析法, 即只需要测得试件几个不同拉格朗日位置点的速度时程曲线, 构成 1 个质点速度场, 通过对该速度场进行分析以及结合沿路径线的数值计算, 利用零初始条件, 就可以反推材料的动态特性.

1 “nv+T0” 的 Lagrange 分析法的理论依据

在拉格朗日坐标下, 一维平面应力波的守恒方程为:

连续方程(质量守恒):

$$\frac{\partial v}{\partial X} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad (1)$$

运动方程(动量守恒):

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial X}, \quad (2)$$

式中, ε, v, σ 分别为应变、质点速度和应力, 其中, 应力和应变均以拉为正, 质点速度以 X 方向为正; X 和 t 为拉格朗日坐标和时间; ρ_0 为试件的初始密度.

从(1)式和(2)式中可以发现, 连续方程将应变 ε 和质点速度 v 联系起来, 而运动方程建立了应力 σ 和质点速度 v 之间的关系, 那么就可以通过测量中间变量质点速度 v 将应力 σ 和应变 ε 的关系建立起来. 但它们是通过一阶偏导数相联系的, 分析过程中必然涉及微分和积分.

设由实验测得 1 组在拉格朗日坐标下, 不同位置点的速度时程曲线(图 1). 为了比较精确地表示波传播的特征, 我们按照路径线法原理^[7], 通过找出这些速度时程曲线中的特征点对该组曲线进行分区. 在每个区域中, 对每条速度曲线分等节点数, 那么每条速度曲线都有 N 个节点, 如果将 X 轴的

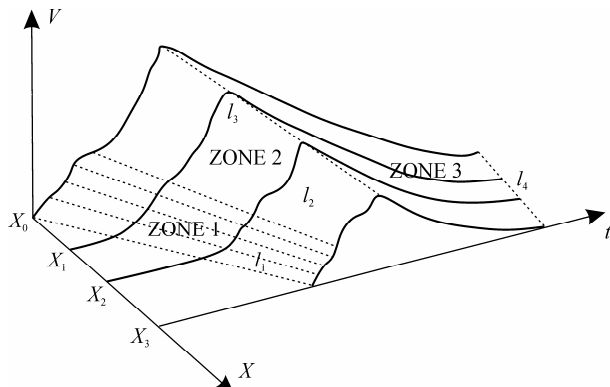


图 1 路径线法示意图

位置记为 i (i 为 $1 \sim 4$), t 轴上的位置记为 j (j 取值为 $1 \sim N$), 那么可以用 $v_{i,j}$ 来表示每个节点的速度. 将每条速度曲线所对应的节点通过光滑的曲线连接在一起就是 1 条路径线, 每条速度曲线有 N 个节点相对应的就有 N 条路径线. 通过这些路径线就可以将整个速度场联系在一起.

某物理量 $\varphi(X, t)$ 沿路径线 p 全微分如下:

$$\frac{d\varphi}{dX}\bigg|_p = \frac{\partial \varphi}{\partial X}\bigg|_t + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\bigg|_X \frac{dt}{dX}\bigg|_p$$

式中, φ 可以表示应力、应变、质点速度等物理量.

$$\frac{d\sigma}{dX}\bigg|_p = \frac{\partial \sigma}{\partial X}\bigg|_t + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\bigg|_X \frac{dt}{dX}\bigg|_p, \quad (3)$$

结合(2)式可得:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial X} = \frac{d\sigma}{dX}\bigg|_p - \frac{\partial \sigma}{\partial t}\bigg|_X \frac{1}{X'}\bigg|_p, \quad (4)$$

第 1 条路径 p_0 表示的是初始时刻的状态, 故有:

$$\sigma|_{t=0} = v|_{t=0} = \varepsilon|_{t=0} = 0, \text{ 且 } \frac{d\sigma}{dX}\bigg|_{p_0} = 0.$$

则对于第 1 条路径 p_0 , (4)式结合初始条件可以推导出:

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}\bigg|_X \frac{1}{X'}\bigg|_{p_0}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}\bigg|_X = -\rho_0 X' \bigg|_{p_0} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\sigma_{i,2} = \sigma_{i,1} - \rho_0 \left(\frac{dX_{i,1}}{dt} \frac{\partial v_{i,1}}{\partial t} \right) (t_2 - t_1), \quad (7)$$

通过(7)式就可以得到各个拉格朗日位置点 t_2 时刻的应力, 那么对于每个拉格朗日位置点之后的 $t_3, t_4, t_5, \dots$ 时刻的应力值 $\sigma_{i,j}$ 可以求得, 写成相应的差分方程为:

$$\sigma_{i,j+1} = \sigma_{i,j} + \left(\frac{d\sigma_{i,j}}{dX}\bigg|_p - \rho_0 \frac{\partial v_{i,j}}{\partial t} \right) \frac{dX_{i,j}}{dt}\bigg|_p (t_{j+1} - t_j). \quad (8)$$

以上即是通过质点速度场推导应力的迭代过程.

应变虽然可以按照(1)式由实测速度场通过先对 X 微分后, 求得 $\partial \varepsilon / \partial t$, 再对 t 积分, 利用零初始条件来推得 ε , 也可以通过上述类似的方法推得, 具体推导过程如下:

$$\frac{dv}{dX}\bigg|_p = \frac{\partial v}{\partial X}\bigg|_t + \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_X \frac{dt}{dX}\bigg|_p, \quad (9)$$

(9)式为质点速度沿路径线的全微分, 再结合(1)式, 则可推得:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right|_X = \left. \frac{dv}{dX} \right|_p - \left. \frac{\partial v}{\partial t} \frac{1}{X'} \right|_p, \quad (10)$$

写成相应的差分方程为:

$$\varepsilon_{i,j+1} - \varepsilon_{i,j} = \left(\frac{dv_{i,j}}{dX} - \frac{\partial v_{i,j}}{\partial t} \frac{dt_{i,j}}{dX} \right) (t_{j+1} - t_j). \quad (11)$$

那么, 在已知质点速度场的条件下, 就可以通过(7)式、(8)式和(11)式来求出试件中的应力场和应变场。

2 数值计算

为了验证该分析法的正确性, 笔者采用已知 ZWT 本构方程的粘弹性材料——有机玻璃, 通过数值计算求解出该材料在不同拉格朗日位置点的速度、应变和应力曲线; 再通过提出的“nv+T0”Lagrange 分析法反推不同拉格朗日位置点的应力应变关系; 最后与数值计算得到的结果进行对比, 来验证该分析法的正确性。

ZWT 非线性粘弹性本构方程可以比较好地描

述高聚物的非线性粘弹性本构, 当应变小于 1% 时, 该方程在高应变率下就可以简化为如下式^[14]:

$$\sigma = E_a \varepsilon + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau, \quad (12)$$

式中, E_a 为等效弹簧系统的弹性常数; E_2 和 θ_2 分别是对应 Maxwell 单元的弹性常数和松弛时间^[13]。笔者所取的有机玻璃的 ZWT 材料参数为: $E_a =$

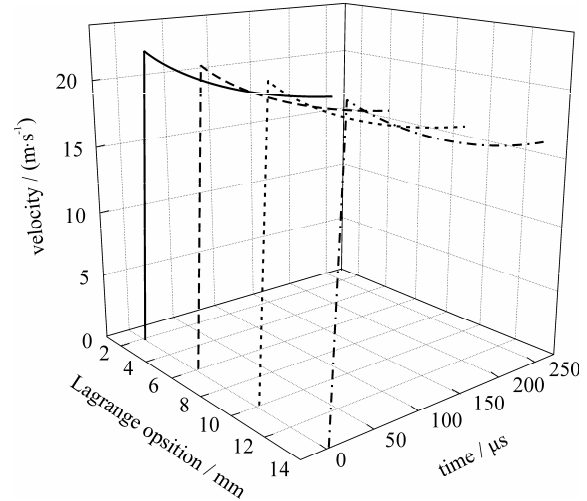


图2 不同 Lagrange 位置点的速度时程曲线

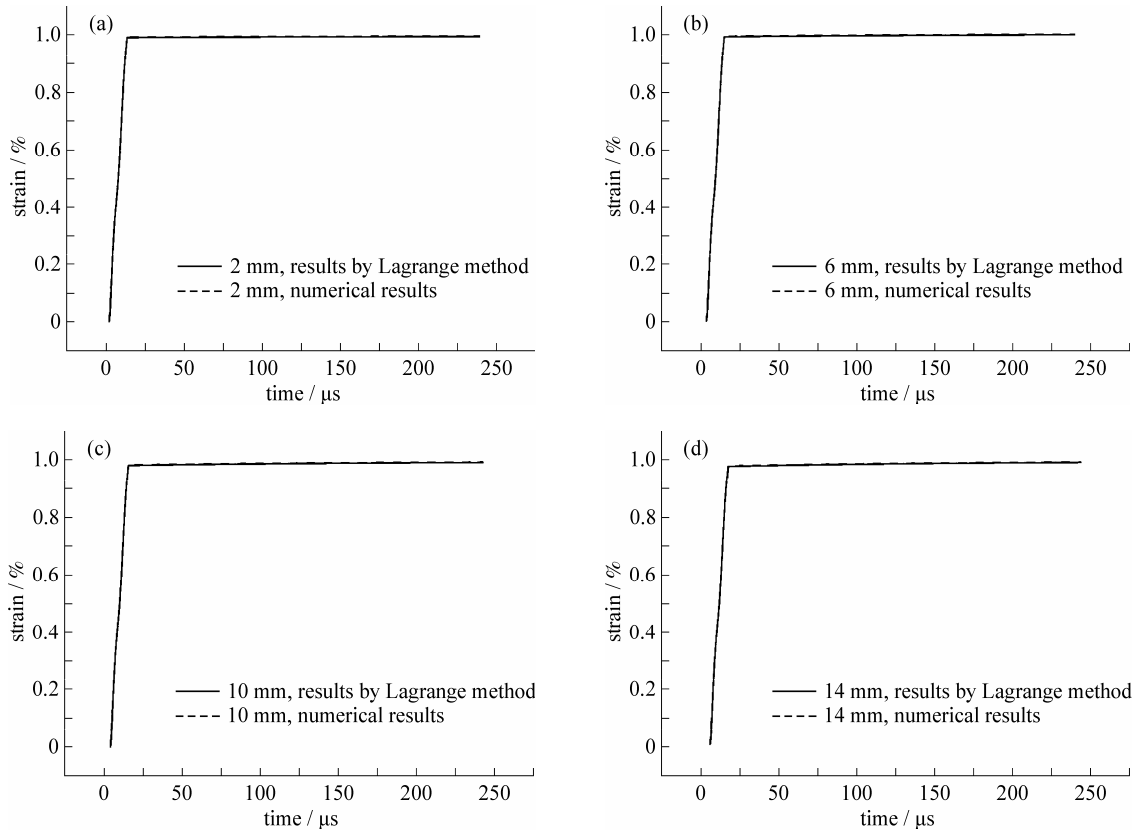


图3 在不同 Lagrange 位置点应变的数值计算结果和“nv+T0”Lagrange 分析结果之比较

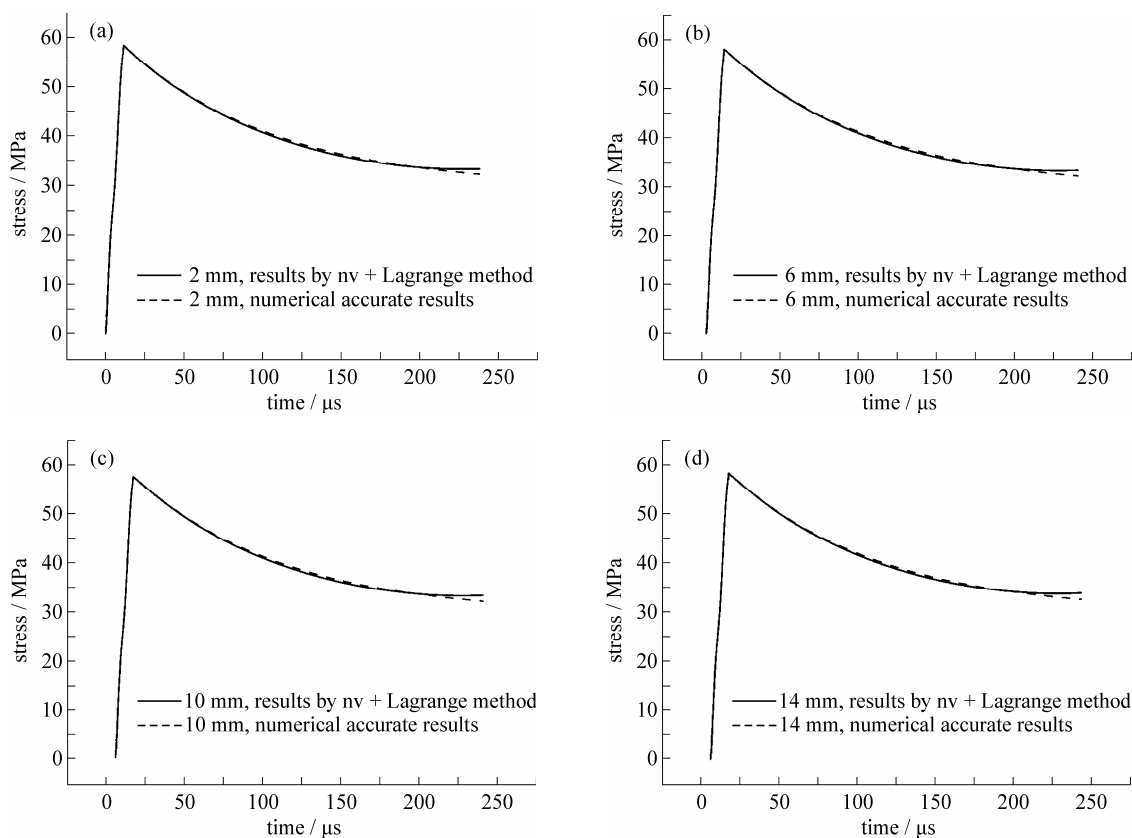


图4 在不同 Lagrange 位置点应力的数值计算结果和“nv+T0”Lagrange 分析结果之比较

2.94 GPa, $E_2 = 3.07$ GPa, $\theta_2 = 95.4 \mu\text{s}$, $\rho_0 = 1190 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, 边界加载条件为恒应变加载. 其中, 有机玻璃材料在不同拉格朗日位置点的速度、应变和应力数值解是取自文献[13].

图2是结合有机玻璃的ZWT方程通过特征线法解得的质点速度曲线, 笔者将该些质点速度曲线当作实验测得的数据, 通过“nv+T0”Lagrange分析法(即(7)式、(8)式和(11)式), 就可以得到图3和图4的结果. 其中图3和图4分别表示在2 mm, 6 mm, 10 mm和14 mm位置处应变和应力的数值计算结果以及“nv+T0”Lagrange结果, 发现数值计算结果和“nv+T0”Lagrange分析结果吻合得很好.

3 结论

基于质点速度波形测量的拉格朗日分析法的难点在于需要同时测得1个拉格朗日位置点的质点速度曲线和应力曲线作为边界条件, 但有时往往不能同时测得这2个量. 为了解决该问题, 笔者提出了“nv+T0”Lagrange分析法. 该分析法的特点在于只需要一组拉格朗日坐标下的质点速度曲

线, 按照路径线法结合零初始条件来求解材料的动态应力应变关系, 并不需要边界应力. 并选取一种典型的率相关粘弹性材料有机玻璃作为例子, 分别采用数值模拟和“nv+T0”Lagrange分析法进行分析, 发现最后得到的应力应变曲线吻合得很好, 从而证明了该种分析法的正确性.

参考文献:

- [1] 王礼立. 应力波基础[M]. 2版. 北京: 国防工业出版社, 2005.
- [2] 朱珏. 混凝土类材料冲击本构特性的 SHPB 技术及 Lagrange 反解法的研究[D]. 合肥: 中国科技大学, 2006.
- [3] Yang L M, Shim V P W. An anlysis of stress uniformity in split Hopkinson bar test specimens[J]. International Journal of Impact Engineer, 2005, 31(2):129-150.
- [4] 朱珏, 胡时胜, 王礼立. SHPB 试验中粘弹性材料的应力均匀性分析[J]. 爆炸与冲击, 2006, 26(4):315-322.
- [5] Fowles R. Conservation relations for spherical and cylindrical stress waves[J]. Journal of Applied Physics, 1970, 41:2740-2741.
- [6] Cowperthwaite M, Williams R F. Determination of constitutive relationships with multiple gauges in nondi-

- vergent waves[J]. Journal of Applied Physics, 1971, 42: 456-462.
- [7] Grady D E. Experimental analysis of spherical wave propagation[J]. Journal of Geophysical Research, 1978(8): 1299-1307.
- [8] 王礼立, 朱珏, 赖华伟. 冲击动力学研究中实测波信息的解读分析[J]. 高压物理学报, 2010, 24(4):279-285.
- [9] 李孝兰. 对一组有机玻璃粒子速度测量波形的拉格朗日分析[J]. 爆炸与冲击, 1985, 5(4):45-53.
- [10] 乔河, 柴华友. 爆炸作用下花岗岩动态本构关系试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1996, 15:446-451.
- [11] 陈叶青, 于亚伦, 冯叔瑜. 用拉格朗日分析方法研究水泥石的动态力学性能[J]. 北京科技大学学报, 1996, 18(4):305-310.
- [12] 赖华伟, 王礼立. 基于质点速度测量的拉格朗日分析方法的重新认识与改进[C]. 第12届全国高压学术讨论会, 2004:132.
- [13] Wang L, Zhu J, Lai H W. A new method combining lagrangian analysis with Hopkinson pressure bar technique [J]. Strain, 2011, 47:173-182.
- [14] 王礼立, 施绍裘, 陈江瑛, 等. ZWT 非线性热粘弹性本构关系的研究与应用[J]. 宁波大学学报: 理工版, 2000, 13(增):141-149.

A Further Discussion on the Lagrangian Analysis Method Based on Particle Velocity Wave-profiles Measurements

DING Yuan-yuan, YANG Li-ming, WANG Li-li*

(Mechanics and Materials Science Research Center, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In the past, the data of boundary stress or a simplified assumption is essential for studying dynamic mechanical properties of materials using the Lagrangian analysis method based on the particle velocity wave-profiles measurements. However, the boundary stress data in some cases can not be detected or determined by the experimental measures. To tackle this situation, this paper presents a modified Lagrangian analysis method which does not involve the boundary stress computation. Starting from the path-lines method and utilizing the zero-initial condition, the material constitutive stress-strain curves under high strain-rates is deduced from only observing the particle velocity curve measurements. The dynamic stress/strain wave-profiles of the PMMA material, as a paradigm, are numerically studied using the proposed method, which are well in agreement with the theoretical result using the method of characteristics, which confirms the reliability and validity of the presented method.

Key words: wave propagation; Lagrangian analysis; rate-dependent constitutive relation

(责任编辑 章践立)