

非齐次光纤介质中非线性薛定谔方程的相似变换与精确解

张娜, 李彪*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 基于李群理论和符号计算, 获得了具有增益/损耗项和频率啁啾项的非齐次光纤介质中的非线性薛定谔方程的相似变换; 利用所得变换, 把具有群速度参数、克尔非线性效应参数、相位调制参数和增益/损耗参数的变系数非线性薛定谔方程约化为相应常系数非线性薛定谔方程. 通过一个广义的直接求解方法, 构造了常系数非线性薛定谔方程的一组亮孤子解和一组暗孤子解, 进而得到了变系数非线性薛定谔方程丰富的精确解. 最后对所得亮孤子解和暗孤子解进行了动力学分析与讨论.

关键词: 非线性薛定谔方程; 相似变换; 精确解; 符号计算

中图分类号: O175.29

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2016) 03-0008-05

近年来, 基于非线性薛定谔方程激发了大量的理论和实验研究, 这些研究涉及许多物理和应用数学分支, 包括非线性量子场论、凝聚态和等离子体物理、非线性光学、量子电子等. 由于光孤子在长距离电信通讯的成功, 使得越来越多的学者专注于研究不同类型的非线性薛定谔方程, 研究其在时间或空间光孤子的非线性管理和色散管理、孤子激光、非线性光学超快孤子开关等, 发现了许多方法来获得具有非线性项和色散项的各种非线性薛定谔方程的光孤子解, 并讨论孤子激发的各种动力学问题^[1-6]. 本文将研究如下非齐次光纤介质中非线性薛定谔方程:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\alpha(z)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(z) |u|^2 u + M(z) t^2 u + i F(z) u = 0, \quad (1)$$

式中: $u = u(z, t)$ 是电场中的复包络, z 是规范化的距离, t 是延迟时间, $\alpha(z)$ 是群速度色散(GVD)参数, $\beta(z)$ 是与克尔非线性效应有关的参数, $M(z)$ 以及 $F(z)$ 分别对应相位调制与增益/损耗的非齐次参数.

方程(1)是在非齐次光纤介质中控制光脉冲传

播动力的一个非线性系统. 该方程不但在非齐次光纤介质的有关光脉冲压缩传播中有所应用, 而且可以应用于色散孤子管理^[7]. 近年来, 具有各种非齐次项的方程(1)的应用成果越来越多. 数学家和物理学家从不同的角度研究了没有增益/损耗项的方程(1), 如文献[8]从可积的角度研究并得到了一些结果, 同时通过选取一个特殊的参数和基于 Bäcklund 变换, 得到了方程(1)的一孤子解. 当方程(1)没有相位调制项 $M(z)$ 时, 许多学者对此进行了研究, 如文献[9]发现了一个有效的方法, 得到了无穷多新的孤子解, 并讨论了孤子管理和飞秒孤子的放大; 文献[10]发现了一个系统方法, 并构造了该方程的 6 类精确解; 文献[11]通过扩展的射影 Riccati 方程, 得到了方程(1)的 3 类孤子解. 当方程(1)中的参数全为常数, 并加上一些参数间的限制时, 文献[12]通过 Darboux 变换得到了该方程的 N-孤子解, 并研究了在连续波背景下描述孤子调制不稳定性与孤子传输的 2 组精确解.

1 非齐次非线性薛定谔方程的相似变换

为了得到方程(1)的有限变换群, 我们将方程

收稿日期: 2015-12-21.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11271211).

第一作者: 张娜(1989-), 女, 河南遂平人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 孤子理论与应用. E-mail: 1243880917@qq.com

*通信作者: 李彪(1971-), 男, 湖南会同人, 教授, 主要研究方向: 数学物理与数学机械化. E-mail: libiao@nbu.edu.cn

(1)写成如下形式:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\alpha(z)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta(z)u^2v + \\ M(z)t^2u + iF(z)u = 0, \\ -i\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\alpha(z)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \\ \beta(z)v^2u + M(z)t^2v - iF(z)v = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

这里 v 是 u 的共轭函数.

首先, 按照对称群直接法^[13], 设

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \beta_1 U(\xi, \tau) + \delta_1 V(\xi, \tau), \\ v &= \alpha_2 + \beta_2 U(\xi, \tau) + \delta_2 V(\xi, \tau), \end{aligned} \quad (3)$$

这里 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \xi$ 和 τ 都是 $\{z, t\}$ 的复函数.

$$U = U(\xi, \tau), V = V(\xi, \tau),$$

满足下面方程:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{A(\xi)}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \\ B(\xi)U^2V + K(\xi)\tau^2U + iH(\xi)U = 0, \\ i\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{A(\xi)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + \\ B(\xi)UV^2 + K(\xi)\tau^2V - iH(\xi)V = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

这里 $A(\xi), B(\xi), K(\xi), H(\xi)$ 都是 ξ 的函数.

把方程(3)代入方程(2), 并利用方程(4)消去包含 $\partial U / \partial \xi$ 和 $\partial V / \partial \xi$ 的所有项, 得到关于 $\{U, V\}$ 及其各阶导数的 2 个微分多项式. 然后收集 $\{U, V\}$ 及其各阶导数的系数, 得到关于微分函数

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \xi, \tau, \alpha(z), \beta(z), \\ M(z), F(z), A(\xi), B(\xi), K(\xi), H(\xi)\}$$

的一个超定的偏微分方程组. 在符号计算系统-Maple 的帮助下, 通过繁琐的计算, 可得到该方程组的一组解:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = \delta_1 = \beta_2 = 0, \\ \xi &= \theta(z), \\ \tau &= \lambda_1(z)t + \lambda_0(z), \\ \beta_1 &= f(z) \exp\left(-\int \frac{i\tau_z}{\alpha(z)\tau_t} dt\right), \\ \sigma_2 &= \frac{B(\xi)\theta'(z)}{\beta(z)\beta_1}, \end{aligned}$$

$$A(\xi) = \frac{\alpha(z)\tau_t^2}{\theta'(z)},$$

$$H(\xi) = \frac{F(z)}{\theta'(z)} - \frac{\tau_{zt}}{2\tau_t\theta'(z)} + \frac{\theta''(z)\beta(z) - \theta'(z)\beta'(z)}{2(\theta'(z))^2\beta(z)},$$

$$K(\xi) = -\frac{1}{\alpha(z)^2\tau^2\theta'(z)}.$$

$$\int \frac{-\alpha(z)\tau_t\tau_{zz} + \alpha'(z)\tau_t\tau_z + \tau_{zt}\alpha(z)\tau_z}{\tau_t^2} dt +$$

$$i\left(\frac{\beta'(z)}{\beta(z)\theta'(z)\tau^2} + \frac{f'(z)}{f(z)\tau^2\theta'(z)} - \right.$$

$$\left. \frac{\theta''(z)}{2(\theta'(z))^2\tau^2} - \frac{\tau_z^2}{2\alpha(z)\tau_t^2\tau^2\theta'(z)} + \right.$$

$$\left. \frac{M(z)t^2}{\tau^2\theta'(z)}\right). \quad (5)$$

这样从方程(3)和方程(5)可以得到如下相似变换定理.

定理 1 如果 $\{U = U(\xi, \tau), V = V(\xi, \tau)\}$ 是方程(4)的一组解, 那么 $\{u = \beta_1 U(\xi, \tau), v = \delta_2 V(\xi, \tau)\}$ 在条件(5)的约束下就是方程(2)的一组解.

评注 1 当 $A(\xi), B(\xi), K(\xi), H(\xi)$ 取特殊函数或特殊参数时, 可以建立起变系数方程(1)和较简方程之间的相似变换.

令 $A(\xi) = 2, B(\xi) = b, K(\xi) = k, H(\xi) = h$, 从方程(5)可以得到如下结果:

$$\xi = \theta(z) = \frac{1}{2} \int \alpha(z)\lambda_1(z)^2 dz + c_0,$$

$$\tau = \lambda_1(z)t + \lambda_0(z),$$

$$\delta_2 = \frac{b\theta'(z)}{\beta(z)\beta_1},$$

$$\beta_1 = c_0\lambda_1(z)\sqrt{\frac{\alpha(z)}{\beta(z)}} \exp\left\{-i\left[\frac{\lambda_1'(z)t^2 + 2\lambda_0'(z)t}{2\alpha(z)\lambda_1(z)} - \right.\right.$$

$$\left. \frac{1}{4} \int [4k\theta'(z)\lambda_0^2(z) + \frac{(\lambda_0(z))^2}{\theta'(z)}] dz\right\} -$$

$$-\theta'(z)\lambda_0''(z) + \theta''(z)\lambda_0'(z) +$$

$$4k\theta'(z)^3\lambda_0(z) = 0.$$

$$\lambda_1(z)^2 =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\beta(z)^2 \exp(-\int 4F(z)dz)}{\alpha(z)[-2h\int \frac{\beta(z)^2 \exp(-\int 4F(z)dz)}{\alpha(z)} dz + c_1]}, \\
M(z) &= \frac{2F(z)^2}{\alpha(z)} + [\frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} - \frac{2\beta'(z)}{\alpha(z)\beta(z)}]F(z) + \\
& \frac{F'(z)}{\alpha(z)} - \frac{\alpha'(z)\beta'(z)}{2\alpha(z)^2\beta(z)} + \frac{\alpha''(z)}{2\alpha(z)^2} - \\
& \frac{\beta''(z)}{2\alpha(z)\beta(z)} + \frac{\beta'(z)^2}{\alpha(z)\beta(z)^2} - \\
& \frac{2(-k+h^2)\theta'(z)^2}{\alpha(z)}. \quad (6)
\end{aligned}$$

这样在式(6)条件下, 方程(1)就可以变成如下方程:

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + bU^2V + k\tau^2U + ihU &= 0, \\
-i\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} + bUV^2 + k\tau^2V - ihV &= 0. \quad (7)
\end{aligned}$$

2 非齐次非线性薛定谔方程的精确解

基于我们提出的一个直接假设方法^[13-14], 在 $k = h^2$ 的条件下推出方程(7)的两组解:

解 1 亮孤子解

$$\begin{aligned}
U_1 &= \Omega \sqrt{\frac{2}{b}} [A_c + A_s \frac{\rho \cosh(P) + \cos(Q)}{\cosh(P) + \rho \cos(Q)} + \\
& iA_s \frac{\theta \sinh(P) + \kappa \sin(Q)}{\cosh(P) + \rho \cos(Q)}] \exp(i\Delta), \quad (8)
\end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned}
\Delta &= -\frac{h}{2}\tau^2 + \kappa_1\Omega\tau + 2(A_c^2 - \frac{\kappa_1^2}{2})\int \Omega^2 d\xi + \delta_0, \\
P &= A_s\kappa\Omega\tau - aA_s[\kappa_1\kappa + \\
& p_2(1 - \frac{2A_c^2}{A_s^2 + p_2^2})]\int \Omega^2 d\xi + p_0, \\
Q &= p_2\Omega\tau - a[p_2\kappa_1 + \frac{(p_2^2 - A_s^2)}{2}]\int \Omega^2 d\xi + q_0, \\
\rho &= -\frac{2A_cA_s}{A_s^2 + p_2^2}, \\
\theta &= -\frac{2p_2A_c}{A_s^2 + p_2^2},
\end{aligned}$$

$$\kappa = \pm \sqrt{\frac{p_2^2 + (A_s^2 - 4A_c^2)}{A_s^2 + p_2^2}}, \Omega = \exp(2h\xi),$$

这里 $A_c, A_s, p_2, \kappa_1, b > 0, \delta_0, p_0$ 和 q_0 都是任意实常数. 为简单起见, 设 $\Omega = \exp(2h\xi)$.

解 2 暗孤子解

$$\begin{aligned}
U_2 &= \Omega \sqrt{-\frac{2}{b}} [A_c + iA_s \tanh(P)] \exp(i\Delta), \quad (9) \\
\Delta &= -\frac{h}{2}\tau^2 + \kappa_1\Omega\tau - a[A_c^2 + A_s^2 + \frac{\kappa_1^2}{2}]\int \Omega^2 d\xi + \delta_0, \\
P &= A_s\Omega\tau + 2A_s(-\kappa_1 + A_c)\int \Omega^2 d\xi + p_0,
\end{aligned}$$

这里 $A_c, A_s, \kappa_1, b < 0, \delta_0, p_0$ 都是任意实常数.

这样可以利用第一部分给出的相似变换和方程(7)的解(8)与解(9), 给出方程(1)的一组亮孤子解 $u_1 = \beta_1 U_1$ 和一组暗孤子解 $u_2 = \beta_1 U_2$, 其中 $\xi, \tau, \beta_1, M(z), \alpha(z), \beta(z), F(z)$ 由方程(6)决定. 为简单起见, 此处略去导出的方程(1)的亮孤子解和暗孤子解.

3 非齐次非线性薛定谔方程精确解讨论与分析

对前一部分所得方程(1)的亮孤子解 $u_1 = \beta_1 U_1$ 和暗孤子解 $u_2 = \beta_1 U_2$ 进行如下讨论和分析.

3.1 亮孤子解的动力

当 $A_s = 0, u_1$ 约化到如下背景波:

$$u_{1c} = \beta_1 \Omega \sqrt{\frac{2}{b}} A_c \exp(i\Delta). \quad (10)$$

当 $A_c = 0$ 和 $\kappa = 1, u_1$ 约化到如下亮孤子解:

$$u_{1s} = \beta_1 \Omega \sqrt{\frac{2}{b}} A_s \operatorname{sech}(\Phi) \exp(i\Theta), \quad (11)$$

其中 $\Phi = A_s[\Omega\tau - 2(\kappa_1 + p_2)\int \Omega^2 d\xi] + \varphi_0$, φ_0 是任意常数,

$$\begin{aligned}
\Theta &= -\frac{h}{2}\tau^2 + (\kappa_1 + p_2)\Omega\tau - \\
& [(\kappa_1 + p_2)^2 - A_s^2]\int \Omega^2 d\xi + \theta_0,
\end{aligned}$$

其中 θ_0 是任意常数.

这样 u_1 就表示嵌入了背景 u_{1c} 的亮孤子. 同时, 当 $A_c \ll A_s$ 且很小时, 背景波(10)式会在亮孤子解(11)式的存在过程中很小.

当 $\theta = p_2 = 0$ 和 $A_s^2 > 4A_c^2$ 时, $u_1 = \beta_1 U_1$ 就可以写成如下形式:

$$u_{11} = \beta_1 \Omega \int \frac{2}{b} [A_c + \frac{A_s \rho \cosh(P) + \cos(Q) i \kappa \sin(Q)}{\cosh(P) + \rho \cos(Q)}] d\xi, \quad (12)$$

其中

$$\Delta = -\frac{h}{2} \tau^2 + \kappa_1 \Omega \tau + 2(A_c^2 - \frac{\kappa_1^2}{2}) \int \Omega^2 d\xi + \delta_0,$$

$$P = A_s \kappa [\Omega \tau - a \kappa_1 \int \Omega d\xi] + p_0,$$

$$Q = \frac{a A_s^2 \kappa}{2} \int \Omega^2 d\xi + q_0,$$

$$\rho = -\frac{2A_c}{A_s},$$

$$\kappa = \pm \frac{\sqrt{A_s^2 - 4A_c^2}}{A_s},$$

$$\Omega = \exp(2h\xi),$$

而且, 我们发现当

$$\cosh(P) = -2A_c \cos(Q) / A_s + A_s / (A_c \cos(Q))$$

和

$\sinh(P) = 0$ 时, 式(12)的强度分别达到最大和最小值:

$$|u_{11}|_{\min}^2 = \frac{2|\beta_1|^2 \Omega^2}{b} \frac{A_c^2 A_s^2 \sin^2(Q)}{A_s^2 - 4A_c^2 \cos^2(Q)},$$

$$|u_{11}|_{\max}^2 = \frac{2|\beta_1|^2 \Omega^2}{b} [A_c^2 + \frac{A(A_s^2 - 4A_c^2)}{A_s - 2A_c \cos(Q)}], \quad (13)$$

这意味着方程(1)的亮孤子解 $u_1 = \beta_1 U_1$ 的强度只能在最小值和最大值之间进行压缩.

为了进一步考察亮孤子解 $u_1 = \beta_1 U_1$ 的稳定性, 我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|u_{11}|^2 - |u_{1c}|^2) d\xi = \frac{4|\beta_1|^2 \Omega \sqrt{A_s^2 - 4A_c^2}}{b} = N,$$

这是一孤子解 $u_1 = \beta_1 U_1$ 的精确能量, 能量的增减主要由 $\Omega = \exp(2h\xi)$ 进行控制.

相比之下,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|u_{11} - u_{1c}|^2) d\xi = N \frac{4A_c \cos(Q)}{\sqrt{A_s^2 - 4A_c^2 \cos^2(Q)}}.$$

$$\arctan \left[\frac{A_s + 2A_c \cos(Q)}{\sqrt{A_s^2 - 4A_c^2 \cos^2(Q)}} \right],$$

表示形成一个在背景波和脉冲 z -周期的能量交换.

3.2 暗孤子解的动力

从 $u_2 = \beta_1 U_2$ 可以推出:

$$|u_{2c}|^2 = -2|\beta_1|^2 \Omega (A_c^2 + A_s^2) / b,$$

表示暗孤子的背景波强度.

同样可以得到:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_2|^2 - |u_{2c}|^2 d\xi = -2A_s^2 |\beta_1|^2 \Omega^2,$$

表示暗孤子传播的能量交换.

4 结语

基于李群理论和符号计算, 我们研究了具有增益/损耗项和频率啁啾项的非齐次光纤介质中的非线性薛定谔方程的相似变换; 进而利用所得相似变换, 把具有群速度参数、克尔非线性效应参数、相位调制参数和增益/损耗参数的变系数非线性薛定谔方程约化为相应常系数非线性薛定谔方程. 通过一个广义的直接求解方法, 得到了常系数非线性薛定谔方程的一组亮孤子解和一组暗孤子解, 进而得到了变系数非线性薛定谔方程的丰富的精确解. 最后我们对所得亮孤子解和暗孤子解进行了动力学分析与讨论. 这些结果对研究非齐次光纤介质中的光脉冲的放大与压缩、孤子激光、光孤子通信、飞秒激光等具有一定的参考价值.

参考文献:

- [1] HASEGAWA A, KODAMA Y. Solitons in Optical Communications[M]. Oxford: Oxford University Press, 1995:1-56.
- [2] SERKIN V N, HASEGAWA A, BELYAEVA T L. Non-autonomous solitons in external potentials[EB/OL]. [2015-10-12]. <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.98.074102>.
- [3] YAN L F, JIN Q L, ZHANG D, et al. Interactions of dark solitons in photovoltaic photorefractive crystals with diffusion nonlinearity[J]. Optics Communications, 2011, 284:1682-1685.
- [4] PONOMARENKO S A, AGRAWAL G P. Do solitonlike self-similar waves exist in nonlinear optical media? [EB/OL]. [2015-10-12]. <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.97.013901>.
- [5] ZHANG H P, LI B, CHEN Y. Some exact solutions to the

- inhomogeneous higher-order nonlinear Schrödinger equation by a direct method[EB/OL]. [2015-10-12]. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1674-1056/19/6/060302>.
- [6] LI Z D, LI Q Y, HE P B, et al. Interaction of a nonlinear spin-wave and magnetic soliton in a uniaxial anisotropic ferromagnet[J]. *Ann Phys*, 2007, 322:2945-2957.
- [7] MALOMED B A. Soliton Management in Periodic Systems[M]. New York: Springer, 2006:1-86.
- [8] GANAPATHY R, KURIAKOSE V C. Soliton interaction in a dispersion-decreasing fiber with effective gain and effective phase modulation[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, 15:99-105.
- [9] SERKIN V N, HASEGAWA A. Novel soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation model[EB/OL]. [2015-10-12]. <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.85.4502>.
- [10] LI B. A generalized sub-equation expansion method and its application to the nonlinear Schrödinger equation in inhomogeneous optical fiber media[J]. *Int J Mod Phys C*, 2007, 18:1187-1201.
- [11] LI B, CHEN Y. Symbolic computation and solitons of the nonlinear Schrödinger equation in inhomogeneous optical fiber media[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 33: 532-539.
- [12] LI L, LI Z H, LI S Q, et al. Modulation instability and solitons on a cw background in inhomogeneous optical fiber media[J]. *Optics Communications*, 2004, 234:169-176.
- [13] LOU S Y, MA H C. Non-Lie symmetry groups of (2+1)-dimensional nonlinear systems obtained from a simple direct method[EB/OL]. [2015-10-12]. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/38/7/L04>.
- [14] LI B, ZHANG X F, LI Y Q, et al. Solitons in Bose-Einstein condensates with time-dependent atomic scattering length in an expulsive parabolic and complex potential[EB/OL]. [2015-10-12]. <http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevA.78.023608>.

Similarity Transformation and Exact Solutions to Nonlinear Schrödinger Equation in Inhomogeneous Optical Fiber Media

ZHANG Na, LI Biao*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: On the basis of Lie group theory and symbolic computation, a similarity transformation is constructed for the nonlinear Schrödinger (NLS) equation in the inhomogeneous optical fiber media. The related constant-coefficients NLS equations are derived from the inhomogeneous NLS equation with the group velocity dispersion parameter, the Kerr nonlinearity and the inhomogeneous parameters related to phase modulation and loss/gain. Using a generalized direct assumption method, a family of bright soliton solutions and a family of dark soliton solutions are obtained from its related constant-coefficient NLS equation. Finally, nonlinear dynamics of the obtained solutions is discussed and analyzed.

Key words: nonlinear Schrödinger equation; similarity transformation; exact solutions; symbolic computation

(责任编辑 史小丽)