

本刊特约稿

拟 Lipschitz 等价的进展综述

奚李峰

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 讨论了拟 Lipschitz 等价的来源、进展与应用, 并提出了若干公开问题.

关键词: 分形; 拟 Lipschitz 等价; Moran 集; 齐性集; 拟 Lipschitz 极小性

中图分类号: O174.12

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2016) 03-0001-07

我们称度量空间之间的双射 $f: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ 是双 Lipschitz 的, 如果存在常数 $L > 0$ 使得对任意的 $x_1, x_2 \in X$, 成立

$$L^{-1}d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq Ld_X(x_1, x_2).$$

双 Lipschitz 映射保持了集合的绝大多数的几何、拓扑与测度性质, 例如

- (1)保持一切所知的分形维数不变;
- (2)保持一致不连通性、一致完备性、多孔性;
- (3)保持 Ahlfors 正则性以及其上测度的加倍性不变.

然而双 Lipschitz 映射的限制条件往往过强, Cooper 与 Pignataro^[1], David 与 Semmes^[2]及 Falconer 与 Marsh^[3]等指出在 Cantor 三分集与如下自相似集 $K = (\beta K) \cup (\beta K + 1/2 - \beta/2) \cup (\beta K + (1 - \beta))$ 之间不存在双 Lipschitz 映射 ($3\beta^{\frac{\log 2}{\log 3}} = 1$), 尽管两者的 Hausdorff 维数等各种分形维数相等.

判断两个集合之间是否存在双 Lipschitz 映射是目前几何测度论的热点问题之一, 由于本文篇幅有限, 不一一在此列举.

1 拟 Lipschitz 等价

放宽对双 Lipschitz 映射的限制, 文献[4]提出了下面的概念.

定义 1 我们称度量空间 (X, d_X) 与 (Y, d_Y) 两者拟 Lipschitz 等价, 如果存在双射 $g: X \rightarrow Y$, 使得对不同的点 $x_1, x_2 \in X$, 当 $d_X(x_1, x_2) \rightarrow 0$ 时, 成立一致

收敛

$$\frac{\log d_Y(g(x_1), g(x_2))}{\log d_X(x_1, x_2)} \rightarrow 1.$$

如上的映射 g 被称为拟 Lipschitz 映射.

注 1 由定义 1 双 Lipschitz 等价蕴含着拟 Lipschitz 等价.

注 2 分形几何在某种意义上, 是关于幂律的几何学, 而所谓幂律, 就是两个量的 $\log$ 比值趋向于给定的指数, 例如 Box 维数就是尺度为 r 的最小覆盖数 N_r 与 r 之间的 $\log$ 比在令 r 趋向 0 时的极限. 因此, 上述定义在某种意义上是极其自然的.

我们注意到在拟 Lipschitz 映射下, 绝大多数的分形维数是不变的, 例如对紧度量空间 X , 对任意的拟 Lipschitz 映射 g , 我们有 $\dim_H g(X) = \dim_H X$, $\dim_P g(X) = \dim_P X$, $\underline{\dim}_B g(X) = \underline{\dim}_B X$, 其中 $\dim_H$, $\dim_P$ 与 $\dim_B$ 分别表示 Hausdorff、填充以及 Box 维数.

有关拟 Lipschitz 等价, 文献[4]有如下的结果: 两个满足强分离条件的自共形集拟 Lipschitz 等价, 当且仅当两者的 Hausdorff 维数相等. 精确来说, 我们有

定理 1 如果 E, F 都是满足强分离条件的 C^1 迭代函数系的不变集,

$$0 < H^s(E), H^t(F) < \infty, \quad (1)$$

则存在双射 $f: E \rightarrow F$, 使得对任意不同点 $x_1, x_2 \in X$, 当 $d_X(x_1, x_2) \rightarrow 0$, 成立一致收敛

$$\frac{\log d_Y(f(x_1), f(x_2))}{\log d_X(x_1, x_2)} \rightarrow \frac{s}{t}.$$

注3 上述映射 f 被称之为拟 Hölder 映射, 若有上述拟 Hölder 双射, 称 E 和 F 拟 Hölder 等价.

例1 我们发现每个满足强分离条件的自相似集 E 都是自共形集, 并且自然成立条件

$$0 < H^{\dim_H E}(E) < \infty,$$

因此2个满足强分离条件的自相似集拟 Lipschitz 等价, 当且仅当两者的 Hausdorff 维数相等. 特别是, 第一节中的 Cantor 三分集与 K 是拟 Lipschitz 等价的, 尽管两者并不 Lipschitz 等价.

考虑到式(1), 我们有如下的

公开问题1 设满足强分离条件的 C^1 自共形集 E, F 的维数 $\dim_H E = s$ 且 $\dim_H F = t$. 若 $H^s(E) = 0$ 或 $H^t(F) = 0$ 时, 是否存在上述的拟 Hölder 等价?

上述问题的困难, 在于 C^1 条件下, 有界畸变(distortion)原理的失效. 通常来说, C^{1+a} ($a > 0$)条件可以保证有界畸变的成立. 而注意到共形映射在二维以上的空间中一定是 C^∞ 的, 因此上述公开问题, 实际上只需要考虑一维的情形.

1.1 符号空间

众所周知, 由于其典型性和简洁性, 符号空间在动力系统、分形几何中占据着极为重要的地位, 其定义如下:

$$\Sigma_2 = \{x_1 x_2 x_3 \cdots x_i \cdots : x_i = 0 \text{ 或 } 1 \forall i\}.$$

这种两符号的符号空间, 其上的位移映射 σ 满足 $\sigma(x_1 x_2 x_3 \cdots x_i \cdots) = x_2 x_3 \cdots x_i \cdots$, 即删除最左边的一个符号. 其上距离定义 $d(x, y) = 2^{-k(x, y)}$, 其中 $k(x, y)$ 是 x, y 两个不同的无限序列

$$x = x_1 x_2 x_3 \cdots x_i \cdots, y = y_1 y_2 y_3 \cdots y_i \cdots$$

中最小的下标 k 使得两者第 k 个字符不同, 即 $x_k \neq y_k$. 这个度量确保符号空间 Σ_2 的 Hausdorff 维数恰好等于1.

符号空间具有两个特性:

(1)一致不连通性.

我们称度量空间 (X, d) 的非空紧集 E 为一致不连通的, 如果存在常数 $c, r^* > 0$ 使得对任意点 $x \in E$ 及 $0 < r < r^*$, 我们可以找到子集合 $E_{x, r} \subset E$ 满足

$$E \cap B(x, cr) \subset E_{x, r} \subset B(x, r), \text{ 且}$$

$$\text{dist}(E_{x, r}, E \setminus E_{x, r}) > cr,$$

此处闭球 $B(x, r) = \{y : d(y, x) \leq r\}$, 而 $\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$ 表示集合 A, B 间最短距离.

可以用图1表示.

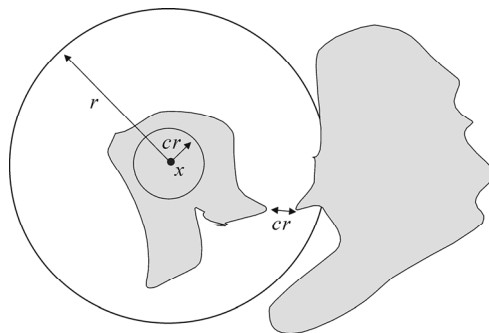


图1 一致不连通图示

符号空间显然是满足一致不连通性质的.

(2) Ahlfors 正则性.

我们称度量空间 (X, d) 的非空紧集 E 为 s 维的 Ahlfors 正则集, 如何存在一个 E 上的有限 Borel 测度 ν , 使得对任意的 $r \leq |E|$ 以及 $x \in E$, 闭球 $B(x, r)$ 的测度成立

$$C^{-1}r^s \leq \nu(B(x, r)) \leq Cr^s,$$

其中 $C > 0$ 是一个独立常数.

为此, 利用归纳法可引入 Σ_2 上的自然质量分布 μ , 使得对于任意的柱形 $[x_1 \cdots x_i]$, 其质量

$$\mu([x_1 \cdots x_i]) = 2^{-i},$$

并将其延拓成为其上的一个 Borel 测度, 不妨仍记作 μ . 设 $2^{-i-1} \leq r < 2^{-i}$ 且 $x = x_1 x_2 x_3 \cdots x_i \cdots$, 于是 $B(x, r) \subset [x_1 x_2 x_3 \cdots x_i]$, 因此

$$r \leq \mu(B(x, r)) = 2^{-i} \leq 2 \cdot r.$$

这是一个典型的1维 Ahlfors 正则集.

拟化原则 给定指标集 A , 我们称两个量 α_t 与 β_t 可比(此处 $t \in A$), 如果存在常数 $L > 0$ 使得对任意的 $t \in A$ 成立

$$L^{-1} \leq \alpha_t / \beta_t \leq L.$$

我们称两个量 $\overline{\alpha}_t$ 与 $\overline{\beta}_t$ 拟可比, 如果当 $\overline{\beta}_t \rightarrow 0$ 时, 成立以下的一致收敛

$$\frac{\log \overline{\alpha}_t}{\log \overline{\beta}_t} \rightarrow 1.$$

若性质 P 涉及两种可比的量, 将其替换为拟可比的量后, 我们得到拟化的性质 P' . 于是

(a)原性质 P 一定蕴含后者 P' , 换言之拟化后的性质 P' 要弱于原性质 P .

(b)假设原性质 P 是双 Lipschitz 映射下不变, 则拟化性质 P' 在拟 Lipschitz 映射下不变.

根据上述拟化原则, 我们有如下两个拟化概念:

(1')拟一致不连通性.

我们称度量空间 (X, d) 的非空紧集 E 为拟一致不连通的, 如果存在 $r^* > 0$ 以及满足

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \kappa(r)}{\log r} = 1$$

的单调不减函数 $\kappa: (0, r^*] \rightarrow (0, \infty)$ 使得对任意的 $x \in E$ 且 $0 < r < r^*$, 我们可找到子集合 $E_{x,r} \subset E$ 满足

$E \cap B(x, \kappa(r)) \subset E_{x,r} \subset B(x, r)$ 且

$\text{dist}(E_{x,r}, E \setminus E_{x,r}) > \kappa(r)$.

可以用图 2 表示.

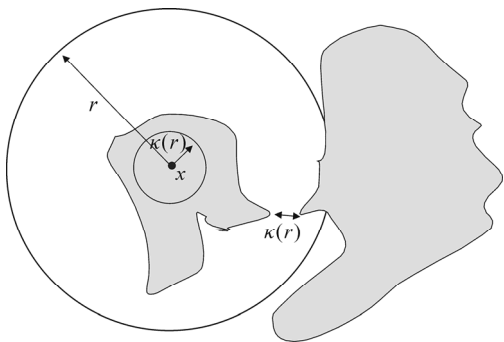


图 2 拟一致不连通图示

(2')拟 Ahlfors 正则性.

我们称度量空间 (X, d) 的非空紧集 E 为 s 维的拟 Ahlfors 正则集, 如果存在一个 E 上的有限 Borel 测度 ν , 使得对任意的 $r \leq |E|$ 以及 $x \in E$, 闭球 $B(x, r)$ 的测度成立如下一致收敛

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(\nu(B(x, r)))}{\log r} = s.$$

自然地, 我们有:

问题 1 什么分形集拟 Hölder 等价于 Σ_2 ?

注意到符号空间满足(拟)一致不连通性以及(拟)Ahlfors 正则性, 并且这两个拟化性质在拟 Lipschitz 映射下不变, 文献[5]得到如下结果:

定理 2 (X, d) 的非空紧集 E 拟 Hölder 等价于 Σ_2 , 当且仅当 E 是拟一致不连通且拟 Ahlfors 正则.

文献[6]得到如下的

推论 1 两个 s 维的、一致不连通的 Ahlfors 正则集彼此拟 Lipschitz 等价.

定理 2 证明的关键在于拟化 Mattila 与 Saaranen 涉及一致不连通的技术性引理^[7], 此外 Mattila 与 Saaranen 还得到: 如果 $s < 1$, 则 s 维的 Ahlfors 正则集一致不连通. 类似可得:

引理 1 如果 $s < 1$, 则 s 维的拟 Ahlfors 正则集一定是拟一致不连通集.

任给两个 s 维的拟 Ahlfors 正则集, 如果 $s < 1$ 则彼此拟 Lipschitz 等价; 对一般的 s , 由于拓扑上的障碍, 即如果两者拓扑上不同胚则不可能拟 Lipschitz 等价, 那么两者是否包含了 s 维的子集使得彼此拟 Lipschitz 等价? Guo 等^[8]正面回答了该问题, 然而他们找到的子集的 s 维 Hausdorff 测度往往等于 0, 我们有如下

公开问题 2 任给两个 s 维的拟 Ahlfors 正则集, 是否分别存在着 s 维 Hausdorff 正则子集, 使得两个子集彼此拟 Lipschitz 等价?

1.2 Moran 集

为方便计, 只讨论一类特殊的 Moran 集^[9-14]. 给定整数序列 $\{n_k (> 2)\}_k$ 以及压缩比序列 $\{c_k\}_k$ 满足 $c_k \in (0, 1)$. 我们令关于有限词的符号空间 $\Omega = \{i_1 \cdots i_t : \text{对每个 } k \leq t \text{ 对应的字符 } i_k \in \{1, 2, \dots, n_k\}\}$. 任给一个词 $i_1 \cdots i_t$, 我们定义连接 $(i_1 \cdots i_t) * j = i_1 \cdots i_t j$. 假设欧氏空间中的一个紧集的族 $\{E_i : i \in \Omega\}$ 满足对任意的 $i = i_1 \cdots i_t$ 成立

(1) $E_{i^*1}, \dots, E_{i^*n_{t+1}} \subset E_i$;

(2) 对每个 j , E_{i^*j} 与 E_i 在几何上相似, 且压缩比为 c_i ;

(3) E_i 内部非空且当 $j \neq j'$ 时, E_{i^*j} 与 $E_{i^*j'}$ 两者的内部互不相交.

我们称极限集 $K = \bigcup_k \bigcup_{i_1 \cdots i_k \in \Omega} E_{i_1 \cdots i_k}$ 为一个具有 $(\{n_k\}_k, \{c_k\}_k)$ 的 Moran 结构的 Moran 集, 并记 $K \in M(\{n_k\}_k, \{c_k\}_k)$, 如图 3 所示.

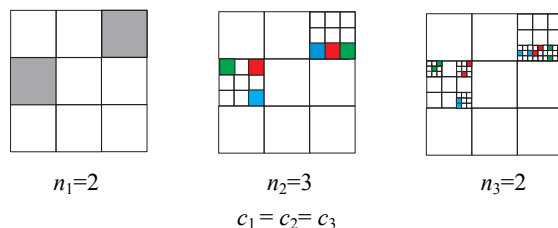


图 3 Moran 集示例(位置可任意, 但个数在每一阶统一)

对于直线上的 Moran 集, 改造集合为其凸包, 不改变最后的极限集, 所以我们通常考虑初始集

(对应空词)是区间.

定理 3^[15-16] 设 $s < 1$ 直线上 Moran 集 $K \in M(\{n_k\}_k, \{c_k\}_k)$, $K' \in M(\{m_k\}_k, \{d_k\}_k)$ 满足 $\inf_k c_k, \inf_k d_k > 0$ 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{\log c_1 \cdots c_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log m_1 \cdots m_k}{\log d_1 \cdots d_k} = s,$$

则 K 与 K' 彼此拟 Lipschitz 等价.

证明 如果我们能证明 K 是 s 维的拟 Ahlfors 正则集, 因 $s \in (0, 1)$, 根据引理 1 可知 K 是拟一致不连通的, 因此 K 与 Σ_2 是拟 Hölder 等价的.

下面我们将证明 K 是 s 维的拟 Ahlfors 正则集, 为此构造自然的质量分布 μ , 使得:

$$\mu(E_{i_1} \cdots i_k) = (n_1 \cdots n_k)^{-1}.$$

不妨设初始区间的直径是 1, 半径 $c_1 \cdots c_k \leq r < c_1 \cdots c_{k-1}$, 容易看到球心在 K 上一个半径 r 的球, 至少包含了一个 k 阶的基本区间, 至少包含在 2 个 $(k-1)$ 阶基本区间内, 所以

$$(n_1 \cdots n_k)^{-1} \leq \mu(B(x, r)) \leq 2(n_1 \cdots n_{k-1})^{-1}.$$

由于 $\inf_k c_k > 0$, 且注意到 $c_k n_k \leq 1$, 我们发现序列 $\{n_k\}_k$ 一致有上界. 因此当 r 趋向于 0 时, 以下

$$\frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \rightarrow s = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_1 \cdots n_k}{-\log c_1 \cdots c_k}$$

一致收敛成立.

证毕.

利用 Moran 集的 Assouad 维数计算^[17-18]以及拟 Ahlfors 正则性, 可以得到如下结论.

命题 1^[19] 令 $E \subset R$ 是一个直线上的满足强分离条件的自相似集. 那么对任意 $t \in (\dim_A E, 1]$, 存在拟 Lipschitz 映射 g_t 使得 $\dim_A(g_t E) = t$.

1.3 齐性集

从 Moran 集中得到启发, 我们可以得到更为抽象的集合.

为此, 我们打算讨论集合的性质, 而是专注于其上所支撑测度的性质, 假设:

- (1) 相同半径的球的测度可比;
- (2) 缩小球的半径, 小球与大球的测度可比;
- (3) 缩小球的半径, 大球中切除小球后的余集的测度与大球测度可比.

如果一个紧集上能支撑满足上述(1)~(3)的 Borel 测度, 就称该集是齐性集.

可以用图 4 表示.

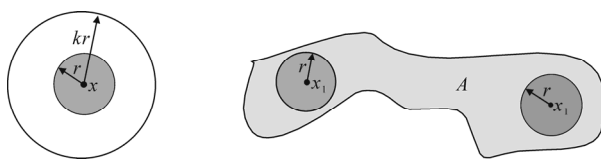


图 4 齐性集从比较球的测度出发

显然, 上述一类 Moran 集是齐性集^[20]. 对于齐性集, 可以考虑其上的双 Lipschitz 嵌入以及拟 Lipschitz 等价问题^[20-21].

2 拟 Lipschitz-Assouad 极小性

对 Assouad 维数 $\dim_A$, 由命题 1 可找到一个拟 Lipschitz 映射 $\tilde{g}$ 使得对 Cantor 三分集成立

$$1 = \dim_A \tilde{g}(C) \neq \dim_A C = \log 2 / \log 3.$$

这意味着 Assouad 维数在拟 Lipschitz 映射下会改变. Assouad 维数究竟在拟 Lipschitz 映射下如何变化呢?

2.1 拟 Assouad 维数

回顾 Assouad 维数: 设 $0 < r < R$, 令 $N_r(F)$ 覆盖 F 的半径为 r 的闭球的最少个数, 并令 $N_{r,R}(E) = \sup_{x \in E} N_r(B(x, R) \cap E)$. 那么 E 的 Assouad 维数

$$\dim_A E = \inf \{ \alpha > 0 \mid \exists c > 0, \text{ 使得对任意的 } 0 < r < R \text{ 成立 } N_{r,R}(E) \leq c(R/r)^\alpha \}.$$

该概念最早由 Assouad 在 20 世纪 70 年代引进^[22-24]. Assouad 维数在拟共形映射与嵌入问题中具有重要作用^[25-26].

设 E 是度量空间 X 的紧子集. 对任意 $\delta \in (0, 1)$, 令

$$h_E(\delta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \sup_{r^{1-\delta} \leq R < 1} \frac{\log N_{r,R}(E)}{\log R - \log r}. \quad (2)$$

由于 $h_E(\delta)$ 关于 δ 具有单调性, 文献[19]定义拟 Assouad 维数

$$\dim_{qA} E = \lim_{\delta \rightarrow 0} h_E(\delta).$$

根据定义, 拟 Assouad 维数满足下面性质:

- (1) 单调性. 若 $E \subset F \subset X$, 则 $\dim_{qA} E \leq \dim_{qA} F$;
- (2) 稳定性. 若 $E, F \subset X$, 则 $\dim_{qA}(E \cup F) = \max(\dim_{qA} E, \dim_{qA} F)$;
- (3) 双 Lipschitz 不变性. 对任意双 Lipschitz 映射 f 成立 $\dim_{qA} E = \dim_{qA} f(E)$;
- (4) 值域范围. 对任意 $E \subset X$, $0 \leq \dim_{qA} E \leq \dim_A E$;

(5)开集维数. If $E \subset R^n$ 是一个非空开集, 则

$$\dim_{qA} E = n.$$

定理 4^[19] 拟 Assouad 维数在拟 Lipschitz 映射下不变.

拟 Assouad 与其他分形维数之间的不等式关系如下:

$$\dim_H E \leq \dim_{qA} E \leq \dim_A E. \quad (3)$$

根据定理 3 和式(3), 我们有

推论 2 对于任意度量空间的紧子集 E 以及任意的拟 Lipschitz 映射 $g: E \rightarrow F$, 成立

$$\dim_A g(E) \geq \dim_{qA} E.$$

2.2 拟 Lipschitz 极小性

我们称紧集 $E \subset R^n$ 关于 Hausdorff 维数拟对称极小, 若对任意 n 维拟对称映射 f , 成立

$$\dim_H f(E) \geq \dim_H E.$$

关于拟对称映射积累了大量的研究^[27-32]. 类比于拟对称极小, 将拟对称映射改为拟 Lipschitz 映射, 我们可以定义关于 Assouad 维数的拟 Lipschitz 极小性.

定义 2 度量空间的紧子集 E 被称为拟 Lipschitz-Assouad 极小, 如果对任意的拟 Lipschitz 映射 g 成立

$$\dim_A g(E) \geq \dim_A E.$$

根据上面的推论 2, 我们有如下结论.

推论 3 如果 $\dim_{qA} E = \dim_A E$, 则 E 是拟 Lipschitz-Assouad 极小的.

对任意 s 维的 Ahlfors 正则集 D , 我们都有 $\dim_A D = \dim_{qA} D = s$, 因为

$$s = \dim_H D \leq \dim_{qA} D \leq \dim_A D = s.$$

因此我们有

命题 2 Ahlfors 正则集都是拟 Lipschitz-Assouad 极小的.

Bedford-McMullen 地毯是一类自仿集, 看似简单实则复杂, McMullen 获得 Fields 奖的重要工作之一就是获得了 Bedford-McMullen 集的 Hausdorff 维数. 给定正整数 $n > m > 2$ 以及字符集 $A \subset \{0, 1, \dots, (n-1)\} \times \{0, 1, \dots, (m-1)\}$ 其元素个数 $\#A > 2$, 则 Bedford-McMullen 地毯 $F \subset R^2$ 是满足下面条件的唯一的紧集

$$F = \bigcup_{(a,b) \in A} S_{(a,b)}(F),$$

$$S_{(a,b)}(x, y) = ((x+a)/n, (y+b)/m).$$

$$\text{令 } t_j = \#\{i \in \{0, 1, \dots, (n-1)\} : (i, j) \in A\}, t = \max_j t_j,$$

且 $s = \#\{j : t_j > 0\}$. Mackay^[33]曾证明

$$\dim_A F = \log_m s + \log_n t.$$

我们有下面的有趣结论.

定理 5^[19] 对 Bedford-McMullen 地毯 E 而言, 我们总有 $\dim_{qA} E = \dim_A E$, 因此我们知该集合为拟 Lipschitz-Assouad 极小的.

证明 只需证明 $\dim_{qA} E \geq \dim_A E$ 就可以得到 E 是拟 Lipschitz-Assouad 极小. 为此将验证

$$\dim_{qA} F \geq \log_m s + \log_n t.$$

注意到 $k > 1$ McMullen 型“正方形”是宽度为 n^{-k} 、高度为 $m^{-k'}$ 满足 $m^{-k'} \approx n^{-k}$ 此处符号 $\approx$ 表示 k' 是最小的满足 $m^{-k'} \leq n^{-k}$ 的正整数. 设 $r = n^{k_1}$, $R = n^{k_2}$ 其中 $k_1 \geq k_2 \geq 1$, 令 $\tilde{N}_{r,R}$ 计 k_2 阶 McMullen 型“正方形”包含 k_1 阶 McMullen 型“正方形”的最大个数, 与通常意义下的 $N_{r,R}(F)$ 对比, 容易检验存在常数 $c > 0$ 使得对任意的 $r, R \in \{n^{-k} : k \in \mathbb{N}\}$ 成立

$$\tilde{N}_{r,R} \leq c N_{r,R}(F). \quad (4)$$

当 $k \geq 1$ 足够大, 如图 5 所示. 我们考虑具有宽度 $R_k = n^{-k}$ 及高度 $m^{-(k+l)}$ 的大“正方形” (此处 $m^{-(k+l)} \approx n^{-k}$) 以及具有宽度 $r_k = n^{-(k+l)}$ 和高度 $m^{-(k+l+l')}$ 的小“正方形” ($m^{-(k+l+l')} \approx n^{-(k+l)}$). 每个 k 阶的“满”的“正方形”包含了 t 个宽度为 $n^{-(k+l)}$ 、高度为 $m^{-(k+l)}$ 的长条, 每个长条包含了 s' 个小“正

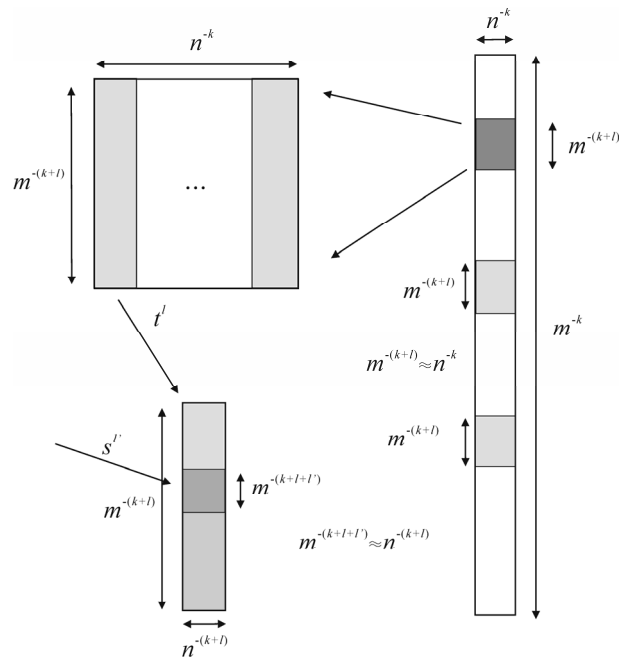


图 5 $\tilde{N}_{r_k, R_k}$ 的计算图示

方形”, 于是

$$\tilde{N}_{r_k, R_k} = s^{l'} t^l.$$

根据式(4), 我们有

$$\frac{\log N_{r_k, R_k}(F)}{\log R_k - \log r_k} \geq \frac{l' \log s + l \log t - \log c}{\log R_k - \log r_k}. \quad (5)$$

注意到当 $k \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{\log R_k}{\log r_k} = \frac{k}{k+1} \rightarrow \frac{\log m}{\log n}.$$

因此当 k 足够大时, 我们有

$$1 - \frac{\log R_k}{\log r_k} \geq (1 - \frac{\log m}{\log n}) / 2 =: \delta_0.$$

由于 $m^{-(k+l)} \approx n^{-k}$ 且 $m^{-(k+l+l')} \approx n^{-(k+l)}$, 令 $k \rightarrow \infty$, 我们得:

$$h_F(\delta_0) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \sup_{r^{1-\delta_0} \leq R < 1} \frac{\log N_{r, R}(F)}{\log R - \log r} \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N_{r_k, R_k}(F)}{\log R_k - \log r_k} \geq \log_m s + \log_n t.$$

于是可得 $\dim_{qA} F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} h_\delta(F) \geq h_F(\delta_0) \geq \log_m s + \log_n t$.

证毕.

我们有如下的猜想或

公开问题 3 是否对一切分形 E , 成立

$$\dim_{qA} E = \inf_g \dim_A g(E), \quad (6)$$

此处 g 取遍所有拟 Lipschitz 变换. 如果不成立, 除了上述 Ahlfors 正则集以及地毯等, 是否存在一大类分形满足上述式(6).

3 结论

由于 Lipschitz 映射对分形结构的要求较高, 作者提出了拟 Lipschitz 等价概念来研究分形的内在结构, 并分别应用于 Ahlfors 正则集与 Assouad 维数, 取得一些进展并提出了若干公开问题. 而最近有关 Ahlfors 正则集与 Assouad 维数的研究, 受到自相似集的弱分离条件的推动, 也正日益受到关注^[34].

参考文献:

- [1] COOPER D, PIGNATARO T. On the shape of Cantor sets[J]. J Differential Geom, 1988, 28(2):203-221.
- [2] DAVID G, SEMMES S. Fractured Fractals and Broken Dreams: Self-Similar Geometry Through Metric and

Measure[M]. New York: Oxford University Press, 1997:1-224.

- [3] FALCONER K J, MARSH D T. Classification of quasi-circles by Hausdorff dimension[J]. Nonlinearity, 1989, 2(3):489-493.
- [4] XI L F. Quasi-Lipschitz equivalence of fractals[J]. Israel J Math, 2007, 160:1-21.
- [5] WANG Q, XI L F. Quasi-Lipschitz equivalence of quasi Ahlfors-David regular sets[J]. Sci China Math, 2011, 54(12):2573-2582.
- [6] WANG Q, XI L F. Quasi-Lipschitz equivalence of Ahlfors-David regular sets[J]. Nonlinearity, 2011, 24(3): 941-950.
- [7] MATTILA P, SAARANEN P. Ahlfors-David regular sets and bilipschitz maps[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2009, 34(2):487-502.
- [8] GUO Q L, LI H, WANG Q. Quasi-Lipschitz equivalence of subsets of Ahlfors-David regular sets[J]. Ann Acad Sci Fenn Math, 2014, 39(2):759-769.
- [9] MORAN P A P. Additive functions of intervals and Hausdorff measure[J]. Proc Cambridge Philos Soc, 1946, 42:15-23.
- [10] HUA S. On the Hausdorff dimension of generalized self-similar sets (Chinese)[J]. Acta Math Appl Sinica, 1994, 17(4):551-558.
- [11] HUA S, LI W X. Packing dimension of generalized Moran sets[J]. Progr Natur Sci (English Ed), 1996, 6(2): 148-152.
- [12] FENG D J, WEN Z Y, WU J. Some dimensional results for homogeneous Moran sets[J]. Sci China Ser A, 1997, 40(5):475-482.
- [13] WEN Z Y. Mathematical Foundations of Fractal Geometry[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 2000:1-358.
- [14] WEN Z Y. Moran sets and Moran classes[J]. Chinese Sci Bull, 2001, 46(22):1849-1856.
- [15] LI H, WANG Q, XI L F. Classification of Moran fractals[J]. J Math Anal Appl, 2011, 378(1):230-237.
- [16] WANG Q. Quasi-Lipschitz equivalence of Moran fractals (Chinese)[J]. Acta Math Sinica (Chin Ser), 2013, 56(2): 187-196.
- [17] LI W W, LI W X, MIAO J J, et al. Assouad dimensions of Moran sets and Cantor-like sets[J]. Frontiers Math China, 2016, 11(3):705-722.
- [18] PENG F J, WEN S Y. On Sierpiński carpets and doubling measures[J]. Nonlinearity, 2014, 27(6):1287-1298.
- [19] LÜ F, XI L F. Quasi-Assouad dimension of fractals[J]. J

- Fractal Geom, 2016, 3:1-29.
- [20] LÜ F, LOU M L, WEN Z Y, et al. Bilipschitz embedding of homogeneous fractals[J]. J Math Anal Appl, 2015, 432(2):888-917.
- [21] LÜ F, LOU M L, XI L F. Homogeneous sets and their quasi-Lipschitz equivalence (Chinese)[J]. Sci China Math (Chin Ser), 2014, 44(10):1073-1090.
- [22] ASSOUAD P. Espaces MÉtriques, Plongements, Facteurs (French) ThÈSe De Doctorat[M]. Orsay: Publications Mathématiques d'Orsay, 1977:1-187.
- [23] ASSOUAD P. Étude d'une dimension métrique liée à la possibilité de plongements dans $\mathbb{R}^n$ [J]. C R Acad Sci Paris Sér (A-B), 1979, 288(15):A731-A734.
- [24] ASSOUAD P. Pseudodistances, Facteurs et Dimension Métrique (French)[M]. New York: Springer-Verlag, 1980: 1-33.
- [25] HEINONEN J. Lectures on Analysis on Metric Spaces [M]. New York: Springer-Verlag, 2001:1-141.
- [26] LUUKKAINEN J. Assouad dimension: Antifractal metrization, porous sets, and homogeneous measures[J]. J Korean Math Soc, 1998, 35(1):23-76.
- [27] GEHRING F W. The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping[J]. Acta Math, 1973, 130:265-277.
- [28] GEHRING F W, VÄISÄLÄ J. Hausdorff dimension and quasiconformal mappings[J]. J London Math Soc (2), 1973, 6:504-512.
- [29] TUKIA P. Hausdorff dimension and quasisymmetric mappings[J]. Math Scand, 1989, 65(1):152-160.
- [30] TYSON J T. Sets of minimal Hausdorff dimension for quasiconformal maps[J]. Proc Amer Math Soc, 2000, 128(11):3361-3367.
- [31] KOVALEV L V. Conformal dimension does not assume values between zero and one[J]. Duke Math J, 2006, 134(1):1-13.
- [32] MACKAY J M, TYSON J T. Conformal Dimension: Theory and Application (University Lecture Series, 54) [M]. Providence RI: American Mathematical Society, 2010:1-143.
- [33] MACKAY J M. Assouad dimension of self-affine carpets[J]. Conform Geom Dyn, 2011, 15:177-187.
- [34] FRASER J M, HENDERSON A M, OLSON E J, et al. On the assouad dimension of self-similar sets with overlaps[J]. Adv Math, 2015, 273:188-214.

Survey on Quasi-Lipschitz Equivalence

XI Li-feng

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: This survey discusses the motivation, development and application of quasi-Lipschitz equivalence and also supplies some related open questions.

Key words: fractal; quasi-Lipschitz equivalence; Moran set; homogeneous set; quasi-Lipshitz minimality

(责任编辑 史小丽)