

SPECT 中非均匀衰减扇束投影的局部重建问题研究

沈正洁, 王金平*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 通过将 Natterer 的结果推广到具有复系数的 AtRT(衰减 Radon 变换)和应用针对 ROI(感兴趣区域)的扇束扫描模式中, 得到平行束扫描几何中具有复系数的 AtRT(衰减 Radon 变换)的明确反演公式, 以及 SPECT(单光子发射计算机断层)中非均匀衰减扇束投影的精确局部重建公式. 重建结果基于平行束与扇束之间的坐标变换.

关键词: 非均匀衰减; 衰减 Radon 变换; 感兴趣区域; 局部重建

中图分类号: R311

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2016) 04-0061-06

在现代核医学中, SPECT 作为一种核医学成像技术, 不仅可以重建出病人体内放射性示踪剂的分布水平, 从而能知道病灶内新陈代谢的状况以及组织的活性, 而且因其设备简单和成像费用低而被广泛应用于临床诊断和治疗中. 目前, SPECT 重建算法以 FBP(过滤反投影)算法为主. 对于胸部定量重建而言, 由于必须考虑到组织器官中例如肺、软组织以及肋骨等的非均匀衰减, 但由于 FBP 算法无法对非均匀衰减进行补偿, 此问题直到近些年随着 Novikov 得出的非均匀衰减平行束投影重建公式才得以解决^[1]. 其他一些不同的研究方法也使得 SPECT 的精确重建真正成为可能^[2-6]. 相对于平行束投影, 扇束投影可得到更高精度的 ROI 重建图像^[7-10].

然而, 目前大部分扇束重建算法是基于无衰减或均匀衰减的情形, 对于复杂的非均匀衰减仍然有许多理论和关键技术问题需要研究. 由于复值衰减与 k -空间信号有关^[11-13], 因而具有复衰减的 AtRT 在 3 维 PET(光子发射断层)和 NMR(核磁共振)图像重建中具有很大的作用, 从而在非均匀衰减扇束投影中研究复系数具有重要意义. 虽然 SPECT 技术已经相当成熟, 但是在物体成像、减少射线剂量等方面, 现存的 SPECT 成像方法仍然面对着较大挑战. 实际上, 医生在临床诊断和治疗

中往往只倾向于关注病人的可疑 ROI, 例如大脑以及心脏等器官, 而不是病人的所有部位. 因此, 寻找局部重建算法就显得尤为重要. 一般而言, 由于人的视线有限而无法覆盖整个物体, 而 SPECT 重建图像往往是截断的有限区域, 但当我们把视线集中在一个更小的区域时, 便可以从探测器上截断的数据精确重建出 ROI 的图像.

目前, 根据截断的数据采样来精确重建出 ROI 的图像已经有了很大进步^[14-16]. 基于已有工作的研究, 本文通过把 Natterer 的结果^[2]推广到具有复系数的 AtRT(衰减 Radon 变换)和应用针对 ROI(感兴趣区域)的扇束扫描模式^[14], 得到 SPECT 中非均匀衰减扇束投影的精确局部重建公式. 重建结果基于平行束与扇束之间的坐标变换.

1 平行束扫描中具复系数 AtRT 的明确反演公式

设 $r = (x, y)$ 表示二维欧几里得空间 $\mathbf{R}^2$ 中的一个点, S^1 表示 $\mathbf{R}^2$ 中单位向量构成的集合. 用 $\theta = (\cos \phi, \sin \phi)$ 和 $\theta^\perp = (\cos(\phi + \pi/2), \sin(\phi + \pi/2)) = (-\sin \phi, \cos \phi)$ 来表示 S^1 中一对互相垂直的单位向量. 设 $q(r, \theta)$ 是一个权函数, $\mu(r)$ 和 $f(r)$ 都是 $\mathbf{R}^2$ 中具有紧支集的复值连续可微函数, $\delta(r)$ 是狄拉克函数, 虚数单位 $i = \sqrt{-1}$.

二维的广义 Radon 变换可以被定义为如下等

收稿日期: 2015-04-11.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(61271398).

第一作者: 沈正洁(1987-), 女, 湖北咸宁人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: 742961863@qq.com

*通信作者: 王金平(1962-), 男, 湖北武汉人, 博士/教授, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: wangjinping@nbu.edu.cn

价形式:

$$[R_p f](\theta, s) = \int_{r \cdot \theta = s} f(r) p(r, \theta) dr = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\theta + t\theta^\perp) \cdot p(s\theta + t\theta^\perp, \theta) dt, (\theta, s) \in S^1 \times \mathbf{R}^1, \quad (1)$$

其中, dr 表示直线 $r \cdot \theta = s$ 上的勒贝格测度.

函数 $\mu(r)$ 的 Radon 变换和发散束变换定义为:

$$[R\mu](\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(s\theta + t\theta^\perp) dt, \quad (2)$$

$$[D\mu](r, \theta) = \int_0^\infty \mu(r + t\theta) dt. \quad (3)$$

导数的 Hilbert 变换以及加权 Hilbert 变换被定义为:

$$[Hg](s) = \frac{pv}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(l)}{s-l} dl, \quad (4)$$

$$[Qg](s) = \frac{pv}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'(l)}{s-l} dl, \quad (5)$$

$$[H_\mu g](\theta, s) = \frac{pv}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh(i0.5([HR\mu](\theta, s) - [HR\mu](\theta, l))) g(\theta, l) / (s-l) dl. \quad (6)$$

以下方程能很容易被证明:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) \int_{\mathbf{R}^2} (\cos \phi + i \sin \phi) HRf(r) dr = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\partial}{\partial s} (HRf(r))|_{s=r \cdot \theta} dr. \quad (7)$$

现定义线性算子 $h^\pm(\theta, r \cdot \theta)$ 和 $C^\pm(r, \theta)$ 如下:

$$h^\pm(\theta, r \cdot \theta) = [0.5(I \pm iH)R\mu](\theta, r \cdot \theta), \quad (8)$$

$$C^\pm(r, \theta) = h^\pm(\theta, r \cdot \theta) - [D\mu](r, \theta^\perp), \quad (9)$$

其中, h^- 和 C^- 分别是 h^+ 和 C^+ 的共轭函数.

为了得到具有复系数的 AtRT 的明确反演公式 (定理 1 和定理 2), 引入引理 1 和引理 2.

引理 1 $C^\pm(r, \theta)$ 的傅里叶级数展开具有如下形式:

$$C^\pm(r, \theta) = \sum_{n \geq 0} C_{2n+1}^\pm(r) e^{\pm i(2n+1)\phi}. \quad (10)$$

引理 2 设 $\theta = (\cos \phi, \sin \phi)$, 并且 $(r-\rho)^\perp / |r-\rho| = \zeta = (\cos \psi, \sin \psi)$, 则:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{(r-\rho) \cdot \theta} e^{in\phi} d\phi = \begin{cases} \zeta^\perp / |r-\rho|, n=0, \\ n=0, n \text{ 为奇数}, \\ -i \operatorname{sign}(n) e^{in\psi} \zeta / |r-\rho|, n \text{ 为偶数}, n \geq 2. \end{cases} \quad (11)$$

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{div} \frac{r-\rho}{|r-\rho|^2} = \delta(r-\rho). \quad (12)$$

证明参见参考文献[2]和[11].

定理 1 设 $q(\theta, s) = [R_p f](\theta, s)$, $p(r, \theta) = e^{[D\mu](r, \theta^\perp)}$. 假设 $g(\theta, s) = e^{-0.5[R\mu](\theta, s)} q(\theta, s)$, 并且 $\Theta = \cos \phi + i \sin \phi$, 则可得:

$$f(r) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_0^{2\pi} e^{-[D\mu](r, \theta^\perp) + 0.5[R\mu](\theta, r \cdot \theta)} \Theta [H_\mu g](\theta, s)|_{s=r \cdot \theta} d\theta. \quad (13)$$

证明 根据(6)式, 有:

$$\begin{aligned} [H_\mu g](\theta, s) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\cosh(i0.5([HR\mu](\theta, s) - [HR\mu](\theta, q))) g(\theta, q) / (s-q) dq = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh(i0.5([HR\mu](\theta, s) - [HR\mu](\theta, q)))}{s-q} \cdot \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(q\theta + t\theta^\perp) e^{[D\mu](q\theta + t\theta^\perp, \theta^\perp) - 0.5[R\mu](\theta, q)} dt dq = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\cosh(0.5i([HR\mu](\theta, s) - [HR\mu](\theta, \rho\theta)))}{s - \rho\theta} \cdot \\ &= e^{[D\mu](\rho, \theta^\perp) - 0.5[R\mu](\theta, \rho\theta)} f(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

其中, 运用坐标变换 $\rho = q\theta + t\theta^\perp$ 和 $q = \rho\theta$, 则:

$$\begin{aligned} e^{-[D\mu](r, \theta^\perp) + 0.5[R\mu](\theta, r \cdot \theta)} [H_\mu g](\theta, r\theta) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{R}^2} (\cosh(i0.5([HR\mu](\theta, r\theta) - [HR\mu](\theta, \rho\theta))) / ((r-\rho)\theta) \cdot \\ &= e^{[D\mu](\rho, \theta^\perp) - [D\mu](r, \theta^\perp)} \cdot \\ &= e^{0.5[R\mu](\theta, r \cdot \theta) - 0.5[R\mu](\theta, \rho \cdot \theta)} f(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

由于 $\cosh(m) = (e^m + e^{-m})/2$, $\sinh(m) = (e^m - e^{-m})/2$, 则通过(8)式和(9)式有:

$$\begin{aligned} &\cosh(0.5i[HR\mu](\theta, r\theta)) \cosh(0.5i[HR\mu](\theta, \rho\theta)) \cdot \\ &= e^{[D\mu](\rho, \theta^\perp) - [D\mu](r, \theta^\perp)} = (e^{i0.5[HR\mu](\theta, r\theta)} + \\ &= e^{-0.5i[HR\mu](\theta, r\theta)}) / 2 \cdot e^{-[D\mu](r, \theta^\perp)} \cdot (e^{0.5i[HR\mu](\theta, \rho\theta)} + \\ &= e^{-0.5i[HR\mu](\theta, \rho\theta)}) / 2 \cdot e^{[D\mu](\rho, \theta^\perp)} = \\ &= (e^{C^+(r, \theta) - 0.5[R\mu](\theta, r\theta)} + e^{C^-(r, \theta) - 0.5[R\mu](\theta, r\theta)}) / 2 \cdot \\ &= (e^{0.5[R\mu](\theta, \rho\theta) - C^-(\rho, \theta)} + e^{0.5[R\mu](\theta, \rho\theta) - C^+(\rho, \theta)}) / 2 = \\ &= (e^{0.5[R\mu](\theta, \rho\theta) - 0.5[R\mu](\theta, r\theta)}) / 4 \cdot [(e^{C^+(r, \theta)} + \\ &= e^{C^-(r, \theta)})(e^{-C^-(\rho, \theta)} + e^{-C^+(\rho, \theta)})]. \end{aligned}$$

类似地, 可以得到:

$$\begin{aligned} &\sinh(0.5i[HR\mu](\theta, r\theta)) \sinh(0.5i[HR\mu](\theta, \rho\theta)) \cdot \\ &= e^{[D\mu](\rho, \theta^\perp) - [D\mu](r, \theta^\perp)} = (e^{0.5[R\mu](\theta, \rho\theta) - 0.5[R\mu](\theta, r\theta)}) / 4 \cdot \\ &= [(e^{C^+(r, \theta)} - e^{C^-(r, \theta)})(e^{-C^-(\rho, \theta)} - e^{-C^+(\rho, \theta)})]. \end{aligned}$$

因此, 根据 $\cosh(m-n) = \cosh m \cosh n - \sinh m \sinh n$.

$\sinh n$, 则有:

$$\begin{aligned} & \cosh(i0.5([HR\mu](\theta, r\theta) - [HR\mu](\theta, \rho\theta))) \cdot \\ & e^{[D\mu](\rho, \theta^\perp) - [D\mu](r, \theta^\perp)} = e^{0.5[R\mu](\theta, \rho\theta) - 0.5[R\mu](\theta, r\theta)} \cdot \\ & (e^{C^+(r, \theta) - C^+(\rho, \theta)} + e^{C^-(r, \theta) - C^-(\rho, \theta)}) / 2. \end{aligned}$$

更进一步, 由(7)式和(9)式, 得到:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \int_0^{2\pi} e^{-[D\mu](r, \theta^\perp) + 0.5[R\mu](\theta, r\theta)} \Theta[H_\mu g] \cdot \\ & (\theta, s)|_{s=r\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} (e^{-[D\mu](r, \theta^\perp) + 0.5[R\mu](\theta, r\theta)} \cdot \\ & \Theta[H_\mu g](\theta, s)|_{s=r\theta}) d\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{div} \int_{R^2} \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{(r-\rho)\theta} \cdot \\ & (e^{C^+(r, \theta) - C^+(\rho, \theta)} + e^{C^-(r, \theta) - C^-(\rho, \theta)}) / 2 d\theta f(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

根据引理 2 中 $(r-\rho)^\perp / |r-\rho| = \varsigma = (\cos\psi, \sin\psi)$

以及 $r \cdot \varsigma = \rho \cdot \varsigma$, 于是得到:

$$\begin{aligned} & C^+(r, \varsigma) - C^+(\rho, \varsigma) = [h^+(\varsigma, r \cdot \varsigma) - [D\mu] \cdot \\ & (r, \varsigma^\perp)] - [h^+(\varsigma, \rho \cdot \varsigma) - [D\mu](\rho, \varsigma^\perp)] = \\ & [D\mu](\rho, \varsigma^\perp) - [D\mu](r, \varsigma^\perp). \end{aligned}$$

类似地, 有:

$$C^-(r, \varsigma) - C^-(\rho, \varsigma) = [D\mu](\rho, \varsigma^\perp) - [D\mu](r, \varsigma^\perp).$$

根据(10)式以及 $e^m = \cosh(m) + \sinh(m)$, 此处,

$$\cosh(m) = \sum_{n \geq 0} (m^{2n} / 2n!), \sinh(m) = \sum_{n \geq 0} (m^{2n+1} / (2n+1)!).$$

那么 $e^{C^+(r, \theta) - C^+(\rho, \theta)}$ 的级数展开具有如下形式:

$$\begin{aligned} & e^{C^+(r, \theta) - C^+(\rho, \theta)} = \cosh(C^+(r, \theta) - C^+(\rho, \theta)) + \\ & \sinh(C^+(r, \theta) - C^+(\rho, \theta)) = \cosh\left(\sum_{n \geq 0} (C_{2n+1}^+(r) - \right. \\ & \left. C_{2n+1}^+(\rho)) e^{i(2n+1)\phi}\right) + \sinh\left(\sum_{n \geq 0} (C_{2n+1}^+(r) - \right. \\ & \left. C_{2n+1}^+(\rho)) e^{i(2n+1)\phi}\right) = 1 + \sum_{n \geq 1} C_{2n}^+(r, \rho) e^{i2n\phi} + \\ & \sum_{n \geq 0} C_{2n+1}^+(r, \rho) e^{i(2n+1)\phi}. \end{aligned}$$

由(11)式得到:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{(r-\rho)\theta} \cosh(C^+(r, \theta) - C^+(\rho, \theta)) d\theta = \\ & 2\pi \frac{\varsigma^\perp}{|r-\rho|} - 2\pi i \operatorname{sign}(2n) \sum_{n \geq 1} C_{2n}^+(r, \rho) \cdot \\ & e^{i2n\psi} \frac{\varsigma}{|r-\rho|} = 2\pi \frac{\varsigma^\perp}{|r-\rho|} - 2\pi i \frac{\varsigma}{|r-\rho|} \cdot \\ & [\cosh(C^+(r, \varsigma) - C^+(\rho, \varsigma)) - 1] = 2\pi \frac{\varsigma^\perp}{|r-\rho|} - \\ & 2\pi i \frac{\varsigma}{|r-\rho|} [\cosh([D\mu](\rho, \varsigma^\perp) - [D\mu](r, \varsigma^\perp)) - 1]. \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{(r-\rho)\theta} \cosh(C^-(r, \theta) - C^-(\rho, \theta)) d\theta = \\ & 2\pi \frac{\varsigma^\perp}{|r-\rho|} - 2\pi i \operatorname{sign}(-2n) \sum_{n \geq 1} C_{2n}^-(r, \rho) \cdot \\ & e^{-i2n\psi} \frac{\varsigma}{|r-\rho|} = 2\pi \frac{\varsigma^\perp}{|r-\rho|} + 2\pi i \frac{\varsigma}{|r-\rho|} \cdot \\ & [\cosh([D\mu](\rho, \varsigma^\perp) - [D\mu](r, \varsigma^\perp)) - 1]. \end{aligned}$$

并且,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\theta}{(r-\rho)\theta} \sinh(C^\pm(r, \theta) - C^\pm(\rho, \theta)) d\theta \equiv 0.$$

由引理 2, 可进一步得到:

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{(r-\rho)\theta} \frac{e^{C^+(r, \theta) - C^+(\rho, \theta)} + e^{C^-(r, \theta) - C^-(\rho, \theta)}}{2} d\theta = \\ & \operatorname{div} 2\pi \frac{\varsigma^\perp}{|r-\rho|} = 4\pi^2 \delta(r-\rho). \end{aligned}$$

因此, 有:

$$\frac{1}{\pi} \int_{R^2} 4\pi^2 \delta(r-\rho) f(\rho) d\rho = 4\pi f(r).$$

证毕. 接着即可应用定理 1 来得到定理 2 的结果.

定理 2 设 $q(\theta, s) = [R_p f](\theta, s)$, $p(r, \theta) = e^{[D\mu](r, \theta^\perp)}$.

如果 $g^\pm(\theta, s) = e^{-h^\pm(\theta, s)} q(\theta, s)$, 且 $\Theta = \cos\phi + i\sin\phi$, 则可以得到:

$$\begin{aligned} & f(r) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \int_0^{2\pi} [e^{C^+(r, \theta)} \Theta Hg^+ + \\ & e^{C^-(r, \theta)} \Theta Hg^-](\theta, s)|_{s=r\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (14)$$

证明 首先,

$$Hg^+(\theta, s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-h^+(\theta, q)}}{s-q} R_p f(\theta, q) dq = \frac{1}{\pi} \cdot$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-h^+(\theta, q)}}{s-q} \int_{-\infty}^{\infty} f(q\theta + t\theta^\perp) e^{[D\mu](q\theta + t\theta^\perp, \theta^\perp)} dt dq = \\ & \frac{1}{\pi} \int_{R^2} \frac{1}{s-\rho\theta} f(\rho) e^{[D\mu](\rho, \theta^\perp) - h^+(\theta, \rho\theta)} d\rho, \end{aligned}$$

其中, 运用坐标变换 $\rho = q\theta + t\theta^\perp$ 和 $q = \rho \cdot \theta$.

通过(7)式和(9)式有:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \int_0^{2\pi} e^{C^+(r, \theta)} \Theta Hg^+(\theta, s)|_{s=r\theta} d\theta = \\ & \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} ((e^{C^+(r, \theta)} Hg^+)(\theta, s)|_{s=r\theta}) d\theta = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{div} \int_0^{2\pi} e^{C^+(r,\theta)} \int_{R^2} \frac{\theta}{(r-\rho) \cdot \theta} f(\rho) \cdot e^{-C^+(r,\theta)} d\rho d\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{div} \int_{R^2} \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{(r-\rho) \cdot \theta} \cdot e^{C^+(r,\theta)-C^-(r,\theta)} d\theta f(\rho) d\rho.$$

类似地, 可以得到:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) \int_0^{2\pi} e^{C^-(r,\theta)} \Theta H g^-(\theta, s) \Big|_{s=r \cdot \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{div} \int_{R^2} \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{(r-\rho) \theta} e^{C^-(r,\theta)-C^+(r,\theta)} d\theta f(\rho) d\rho.$$

将以上 2 个方程相加, 则有:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}\right) \int_0^{2\pi} [e^{C^+(r,\theta)} \Theta H g^+ + e^{C^-(r,\theta)} \Theta H g^-] \cdot (\theta, s) \Big|_{s=r \cdot \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{div} \int_{R^2} f(\rho) \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{(r-\rho) \theta} \cdot [e^{C^+(r,\theta)-C^-(r,\theta)} + e^{C^-(r,\theta)-C^+(r,\theta)}] d\theta d\rho.$$

由定理 1, 可得到:

$$\operatorname{div} \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{(r-\rho) \cdot \theta} (e^{C^+(r,\theta)-C^-(r,\theta)} + e^{C^-(r,\theta)-C^+(r,\theta)}) d\theta = \operatorname{div} 4\pi \zeta^\perp / |r-\rho| = 8\pi^2 \delta(r-\rho).$$

因此, 有:

$$\frac{1}{\pi} \int_{R^2} 8\pi^2 \delta(r-\rho) f(\rho) d\rho = 8\pi f(r).$$

证毕.

2 扇束扫描模式中的精确局部重建公式

定理 2 可记为:

$$f(x, y) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} [e^{C^+(s\theta+t\theta^\perp, \theta)} H e^{-h^+} q(\theta, s) + e^{C^-(s\theta+t\theta^\perp, \theta)} H e^{-h^-} q(\theta, s)] d\theta.$$

于是, 定义下面的 2 个函数:

$$f^\pm(x, y) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial s} (e^{C^\pm(s\theta+t\theta^\perp, \theta)} [H e^{-h^\pm} q](\theta, s) + e^{C^\pm(s\theta+t\theta^\perp, \theta)} [Q e^{-h^\pm} q](\theta, s)) \right] d\theta = \frac{1}{8\pi} \left[\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} (e^{C^\pm(s\theta+t\theta^\perp, \theta)}) \frac{e^{-h^\pm} q(\theta, l)}{\pi(s-l)} dl d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{C^\pm(s\theta+t\theta^\perp, \theta)}}{\pi(s-l)} \frac{\partial}{\partial l} (e^{-h^\pm} q)(\theta, l) dl d\theta \right].$$

一种针对 ROI(感兴趣区域)局部重建的扇束 CT(计算机断层)扫描模式如图 1 所示.

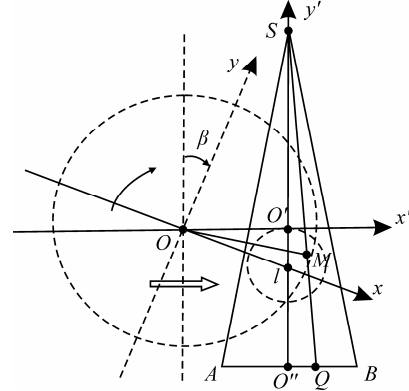


图 1 针对 ROI(感兴趣区域)局部重建的扇束扫描

在图 1 中, O' 和 O 分别是固定坐标系 $\{x', y'\}$ 和可移动坐标系 $\{x, y\}$ 的原点, 其中 O 是被探测物体的旋转中心, 它可沿 x' 轴左右移动. β 是被探测物体顺时针旋转的角度. X -射线源 S 和长度为 $2d$ 的线阵列探测器 AB 都是固定不动的, 且 S 在 y' 轴正半轴上, AB 垂直于 y' 轴. O'' 是 AB 的中点, 位于 y' 轴负半轴上, SO' 和 SO'' 的距离分别是 D 和 D_h . I 是 ROI(感兴趣区域)的中心, 为了保证 ROI 始终都在探测区域内, 当移动点 O 时, 使点 I 仍然在 y' 轴上. 点 M 是 ROI 中任意一点, R 和 $R \cos \beta$ 分别是 OI 和 OO' 的距离. 在得到局部重建公式前, 首先假设 x' 轴上存在一个虚拟探测器与 AB 平行. 对于 AB 上任意一点 Q , 其坐标为 u' , 设 SQ 与 x' 轴的交点为 x' , 于是有 $x' = u'D / D_h$, 其中 $|u'| \leq d$.

平行束和扇束扫描模式的几何关系如下:

$$\theta = \beta + \arctan(x' / D), \quad l = (R \cos \beta + x') D / \sqrt{x'^2 + D^2}, \quad (15)$$

其中, $(D(D^2 - x'R \cos \beta + DR \sin \beta)) / (x'^2 + D^2)^{3/2}$ 是从 (x', β) 变换到 (l, θ) 的雅可比行列式.

假设 $M'(\lambda, \varphi)$ 是 ROI 中任意一个待重建点, 且 x'_1 是 SM' 与 x' 轴的交点, 此时 $\theta = \beta + \omega$, $\cos \omega = D / \sqrt{x'^2 + D^2}$, 则有:

$$s - l = \lambda \cos(\beta - \varphi + \omega) - (R \cos \beta + x') \cos \omega = [\lambda \cos(\beta - \varphi) - (R \cos \beta + x'_1)] \cos \omega + (x'_1 - x') \cos \omega - \lambda \sin(\beta - \varphi) \sin \omega = \lambda \sin(\beta - \varphi) x'_1 \cos \omega / D + (x'_1 - x') \cos \omega - \lambda \sin(\beta - \varphi) \sin \omega = (\lambda \sin(\beta - \varphi) + D) \cdot$$

$$(x'_1 - x') / \sqrt{x'^2 + D^2} = G(x'_1 - x'),$$

其中,

$$G = \frac{\lambda \sin(\beta - \varphi) + D}{\sqrt{x'^2 + D^2}}, \quad (16)$$

$$x'_1 = \frac{D[\lambda \cos(\beta - \varphi) - R \cos \beta]}{\lambda \sin(\beta - \varphi) + D}.$$

在扇束坐标系 (x', β) 中, 可以定义加权扇束投影 $W^\pm(x', \beta)$ 为:

$$W^\pm(x', \beta) = e^{-h^\pm} q(\theta, l) \Big|_{\theta=\beta+\arctan \frac{x'}{D}, l=(R \cos \beta+x') \frac{D}{\sqrt{x'^2+D^2}}} =$$

$$e^{-[0.5(I \pm iH)R\mu](x', \beta)} q(\beta + \arctan(x'/D),$$

$$(R \cos \beta + x') \frac{D}{\sqrt{x'^2 + D^2}}).$$

假设 $f(x, y)$ 和 $\mu(x, y)$ 在单位圆盘上都是光滑的, 则:

$$\frac{\partial W^\pm(x', \beta)}{\partial x'} - \frac{D}{x'^2 + D^2} \frac{\partial W^\pm(x', \beta)}{\partial \beta} =$$

$$\frac{D(D^2 - x'R \cos \beta + DR \sin \beta)}{(x'^2 + D^2)^{3/2}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial l} (e^{-h^\pm} q)(\theta, l) \Big|_{\theta=\beta+\arctan \frac{x'}{D}, l=(R \cos \beta+x') \frac{D}{\sqrt{x'^2+D^2}}}.$$

通过坐标变换, 在坐标系 (x', β) 中, $f^\pm(x, y)$ 中加权因子表示为:

$$N_\beta^\pm(\lambda, \varphi, x'_1) =$$

$$e^{C^\pm(s\theta+t\theta^\perp, \theta)} \Big|_{\theta=\beta+\arctan \frac{x'_1}{D}, s=\lambda \cos(\theta-\varphi), t=\lambda \sin(\theta-\varphi)}, \quad (17)$$

$$N_{\beta_1}^\pm(\lambda, \varphi, x'_1) =$$

$$\frac{\partial}{\partial s} e^{C^\pm(s\theta+t\theta^\perp, \theta)} \Big|_{\theta=\beta+\arctan \frac{x'_1}{D}, s=\lambda \cos(\theta-\varphi), t=\lambda \sin(\theta-\varphi)}, \quad (18)$$

因此, $f^\pm(\lambda, \varphi)$ 具有如下形式:

$$f^\pm(\lambda, \varphi) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-Dd/D_h}^{Dd/D_h} \frac{N_\beta^\pm(\lambda, \varphi, x'_1)}{\pi G(x'_1 - x')} \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \right.$$

$$\left. \frac{D}{x'^2 + D^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) W^\pm(x', \beta) dx' d\beta +$$

$$\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-Dd/D_h}^{Dd/D_h} \frac{N_{\beta_1}^\pm(\lambda, \varphi, x'_1)}{\pi G(x'_1 - x')} \cdot$$

$$\frac{(D^2 - x'R \cos \beta + DR \sin \beta)}{(x'^2 + D^2)^{3/2}} \cdot$$

$$W^\pm(x', \beta) dx' d\beta$$

运用线性卷积和算子 Q 的正规核, 可以算出 $f^\pm(\lambda, \varphi)$ 中所包含的明确微分算子. 在文中, 分别

用文献[14]中 Ramp 滤波器 $h_R(t)$ 和 Hilbert 滤波器 $h_H(t)$ 来表示算子 Q 和 H 的核函数, 定义如下:

$$h_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dv |v| e^{i2\pi vt}, \quad (19)$$

$$h_H(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} dv i \operatorname{sign}(v) e^{i2\pi vt}. \quad (20)$$

根据文献[14]中加权函数微分的 Hilbert 变换可转换为原函数的 Ramp 变换, 并且假设 $T = \lambda \cdot \sin(\beta - \varphi) + D$, $L = D^2 - x'R \cos \beta + DR \sin \beta$, 则:

$$f^\pm(\lambda, \varphi) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{N_\beta^\pm(\lambda, \varphi, x'_1)}{T^2} d\beta \cdot$$

$$\int_{-Dd/D_h}^{Dd/D_h} h_R(x'_1 - x') \frac{LD}{\sqrt{x'^2 + D^2}} W^\pm(x', \beta) dx' +$$

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{N_{\beta_1}^\pm(\lambda, \varphi, x'_1)}{T} d\beta \int_{-Dd/D_h}^{Dd/D_h} h_H(x'_1 - x') \cdot$$

$$\frac{LD}{x'^2 + D^2} W^\pm(x', \beta) dx'.$$

最后, 将 $f^+(\lambda, \varphi)$ 和 $f^-(\lambda, \varphi)$ 相加, 则可得到扇束采样几何中针对 ROI(感兴趣区域)的精确局部重建公式:

$$f(\lambda, \varphi) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{N_\beta^+(\lambda, \varphi, x'_1)}{T^2} d\beta \cdot$$

$$\int_{-Dd/D_h}^{Dd/D_h} h_R(x'_1 - x') \frac{LD}{\sqrt{x'^2 + D^2}} W^+(x', \beta) dx' +$$

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{N_{\beta_1}^+(\lambda, \varphi, x'_1)}{T} d\beta \int_{-Dd/D_h}^{Dd/D_h} h_H(x'_1 - x') \cdot$$

$$\frac{LD}{x'^2 + D^2} W^+(x', \beta) dx' +$$

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{N_\beta^-(\lambda, \varphi, x'_1)}{T^2} d\beta \cdot$$

$$\int_{-Dd/D_h}^{Dd/D_h} h_R(x'_1 - x') \frac{LD}{\sqrt{x'^2 + D^2}} W^-(x', \beta) dx' +$$

$$\frac{1}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \frac{N_{\beta_1}^-(\lambda, \varphi, x'_1)}{T} d\beta \int_{-Dd/D_h}^{Dd/D_h} h_H(x'_1 - x') \cdot$$

$$\frac{LD}{x'^2 + D^2} W^-(x', \beta) dx'.$$

参考文献:

- [1] NOVIKOV R G. An explicit inversion formula for the attenuated X-ray transform[J]. Ark Mat, 2002, 40:145-167.

- [2] NATTERER F. Inversion of the attenuated Radon transform[J]. *Inverse Problems*, 2001, 17:113-119.
- [3] ARZUBOV E V, BUKHGEIM A L, KAZANTSEV S G. Two dimensional tomography problem and the theory of A-analytic functions[J]. *Siberian Adv Math*, 1998, 8:1-20.
- [4] WANG J P. Inversion and property characterization on generalized transform of Radon type[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2011, 31(3):636-643.
- [5] BOMAN J, STROMBERG J O. Novikov's inversion formula for the attenuated Radon transform: A new approach[J]. *J Geo Anal*, 2004, 14:185-198.
- [6] YOU J S. The attenuated Radon transform with complex coefficients[J]. *Inverse Problems*, 2007, 23:1963-1971.
- [7] KUNYANSKY L. A new SPECT reconstruction algorithm based on the Novikov's explicit inversion formula[J]. *Inverse Problems*, 2001, 17:293-306.
- [8] GUILLEMENT J P, JAUBERTEAU F, KUNYANSKY L et al. On single-photon emission computed tomography imaging based on an exact formula for the nonuniform attenuated correction[J]. *Inverse Problems*, 2002, 18:11-19.
- [9] 马建华, 颜刚, 陈凌剑, 等. 扇形束 CT 超短扫描优质重建算法研究[J]. *中国生物医学工程学报*, 2008, 27(3): 347-352.
- [10] YOU J S, ZENG G L, LIANG Z G. FBP algorithms for attenuated fan-beam projections[J]. *Inverse Problems*, 2005, 21:1179-1192.
- [11] LJUNGGREN S. A simple graphical representation of Fourier-based imaging methods[J]. *J Magn Reson*, 1983, 54:338-43.
- [12] JIANG L Y, OUYANG C H. Compact differences of composition operators on holomorphic function spaces in the unit ball[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2011, 31B(5): 1679-1693.
- [13] XIAN J. Weighted sampling and reconstruction in weighted reproducing kernel spaces[J]. *J Math Anal Appl*, 2010, 367(1):34-42.
- [14] 张惠韬, 陈明, 张朋. 一种针对感兴趣区域的 CT 扫描模式及其重建公式[J]. *自然科学发展*, 2007, 17(11): 45-47.
- [15] NOO F, CLACKDOYLE R, PACK J. A two-step Hilbert transform method for 2D image reconstruction[J]. *Phys Med Biol*, 2004, 49:3903-3923.
- [16] ZENG G L, YOU J S, HUANG Q et al. Two finite inverse Hilbert transform formulae for region-of-interest tomography[J]. *Int J Imag Technol*, 2007, 17(4):219-223.

Local Reconstruction of Nonuniform Attenuated Fan-beam Projection in SPECT

SHEN Zheng-jie, WANG Jing-ping^{*}

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this work, the inversion formula of the nonuniform attenuated Radon transform (AtRT) with complex coefficients in parallel-beam geometry, and the local reconstruction formula in SPECT with nonuniform absorption fan-beam data are derived by extending Natterer's results to the AtRT with imaginary coefficients and applying the fan-beam acquisition geometry for the Region of Interest (ROI). The reconstruction result is achieved based on a usual transform between parallel-beam and fan-beam coordinates.

Key words: nonuniform absorption; attenuated Radon transform; region of interest; local image reconstruction

(责任编辑 章践立)