

Logistic-Hull-White 随机波动率期权定价

胡贵宾¹, 陶祥兴^{2*}, 周婷婷², 张蕊家¹

(1. 宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211; 2. 浙江科技学院 理学院, 浙江 杭州 310023)

摘要: 研究了标的资产的随机价格波动率, 在引入 Logistic-Hull-White 随机波动率模型的基础上, 推导出在该模型下的欧式看涨期权定价理论, 并进一步实证分析了该模型的有效性.

关键词: 波动率; Hull-White 模型; Logistic 模型; 欧式看涨期权

中图分类号: F830

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2016) 04-0067-05

在对金融衍生品进行定价时, 往往会选用不同的标的资产价格随机过程, 这些随机过程主要有几何布朗运动^[1]、分数布朗运动^[2-3]、带有跳过程运动^[4]等. 因为波动率是衡量这些随机过程的不确定性, 因此它是决定金融衍生品价格的重要因素之一. 例如利率的波动率决定债券价格, 股票的波动率决定股指期货、股票期权价格. 随着欧式 B-S 期权定价公式的出现^[5], 之后各类金融衍生品的定价成为了金融数学研究者的一个重要研究对象, 其中随机波动率的欧式看涨期权定价研究成为了许多期权研究者的主要研究方向. 该公式含有标的资产初始价格 S_0 、时间 T 、利率 r 、波动率 σ 、敲定价 K 共 5 个参数的函数解析式^[6]. 在常数利率 r 下, 波动率 σ 将决定 B-S 期权价格的大小, 所以波动率的研究对 B-S 期权价格的作用是显而易见的. 而且文献[7-8]也证实了随机波动率的预测对期权(衍生品)定价起到关键性作用, 因此波动率的研究在金融数学的地位是至关重要的.

多数文献主要从以下 4 个方向来研究标的资产的随机波动率: (1) 从期权价格的隐含波动率倒推真实波动率^[9]; (2) 用标的资产的历史波动率替换真实波动率^[10]; (3) 从 GARCH 类模型预测真实波动率^[11]; (4) 从随机波动率(SV)模型来解析真实波动率^[12]. 前 3 种主要运用数值法, 效果的优劣与各模型息息相关, 但不足之处是它们不能提供准确的波动率解析公式. 最后一个方向虽能提供具体

解析公式, 但其仍有进一步修改和扩展的空间^[13], 此外还有一些其他模型也值得借鉴^[14-15]. 在对从第 4 个方向出发的研究中, 发现 Hull-White 随机波动率模型是少数能为欧式期权提供函数公式的典型代表, 它能有效弥补数值法上的诸多不足. 从文献[13,16]发现, 此模型并不能得到很满意的结论, 原因在于一方面它们通过连续时间的随机过程对标的资产价格的随机波动性进行描述, 但非交易的波动不能随意用现有资产来对冲, 这是考虑到市场风险会使标的资产的期权定价变得更加复杂. 尽管通过适当的假设可以消除市场波动率风险, 然而最后的解则需要复杂的数值方法. 另一主要方面是这些模型未能考虑到一个客观事实, 即波动率的增长会受到标的资产内外部的共同作用而导致其增长速度放缓.

针对上述第二方面原因, 本文对 Hull-White 随机波动率模型的假设进行研究, 将它与 Logistic 模型结合^[17], 研究了随机波动率在其增长受阻情况下的 Logistic-Hull-White 随机波动率模型. 新模型能更贴切地描述金融市场中各种内外因素对股价波动的干预现象, 并得到了波动率的相关定理. 在常数利率下, 推出了标的资产在该模型下的欧式看涨期权定价定理, 该定理推广了 Hull-White 随机波动率模型的欧式期权定价定理. 此模型不仅含有 Logistic 模型和 Hull-White 模型, 而且模型中的参数来源于历史波动率的统计数据. 因此它是

收稿日期: 2015-04-14.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11171306); 浙江省自然科学基金(LY12A01024).

第一作者: 胡贵宾(1989-), 男, 江西上饶人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 期权定价. E-mail: huguibin314@126.com

*通信作者: 陶祥兴(1965-), 男, 浙江台州人, 博士/教授, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: xxtau@163.com

一个集解析法与数值法为一体的新型随机波动率欧式看涨期权定价模型.

1 预备知识

为研究更具代表性, 本文只研究标的资产是普通股票的一般情况, 并假设股价变化过程遵循布朗运动, 因而其股价也存在波动率.

定义 1 股价的波动率 $\sigma(t)$ 是指在时间区间 $[0, T]$ 内, 使它满足股价的回报方差 $V = \int_0^T \sigma^2(t) dt$, 回报标准差为 $\sqrt{V}$ 的随机变量. $\sigma^2(t)$ 为股价的回报方差率, 它是波动率的平方, 同时也是一个关于时间 t 的连续随机变量. 在 B-S 公式中, 随机变量 $\sigma(t) = \sigma$ 为常数, 股价的回报方差 $V = \sigma^2 T$, 而股价回报的标准差是 $\sigma\sqrt{T}$.

定义 2 股价的随机波动率的波动率是指将股价的波动率本身作为一个随机变量, 那么此随机变量也具有波动率.

伊藤引理^[6] 假设随机变量 x 服从下面经典伊藤过程:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz, \quad (1)$$

其中, dz 是一个维纳过程, a 和 b 是 x 和 t 的函数. 变量 x 的漂移率为 a , 波动率为 b , 如果函数 G 遵循下面过程:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz, \quad (2)$$

那么, G 也是一个伊藤过程, 并且其漂移率为 $\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$, 波动率为 $\frac{\partial G}{\partial x} b$.

假设股价 $S(t)$ 是一个遵循广义维纳过程 $W(t)$ 的随机变量, 满足(3)式. 那么, 它的方差 $\sigma^2(t)$ 是另一个遵循广义维纳过程 $B(t)$ 的随机变量, 且满足(4)式. 将它们合并便得到 Hull-White 随机波动率模型^[12-13].

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = udt + \sigma(t)dW(t), \quad (3)$$

$$\frac{d\sigma^2(t)}{\sigma^2(t)} = pdt + \xi dB(t), \quad (4)$$

其中, u 为股价期望收益率, p, ξ 是与 $S(t)$ 独立的常量^[12]. $W(t), B(t)$ 是 2 个不同维纳过程, 且其相关系数为 ρ . 本文假设 $\rho = 0$, 即 $dB(t)dW(t) = 0$.

从式(4)形式上可以看出, 它与生物种群增长

模型^[17]同属一个数学模型. 区别在于 Hull-White 模型具有波动项, 而后者没有. 根据金融市场的实际情况, 在成熟市场中波动率的增长过程会受到标的资产内部和整个金融市场极其复杂的共同作用, 它在平稳期具有一定的上限值. 而该模型的假设并不能准确刻画这种共同作用的影响, 导致结果是标的资产的波动率将突破某一上限值. 所以为解决此矛盾, 必须提出一种描述随机波动率的增长受阻的新模型.

2 Logistic-Hull-White 随机波动率

本节引进 Logistic-Hull-White 随机波动率模型, 并研究此随机波动率的期望回报率的数学特征性质.

定义 3 假设回报方差率 $\sigma^2(t)$ 是一个增长受阻的广义维纳过程, p 是其期望增长平均速度, ξ 是随机波动率的波动率. 而且 M 是在时间区间 $(0, +\infty)$ 内的上限方差率. p, ξ, M 都是常数, 并且它们都可以通过历史波动率统计近似得到. 如果 $\sigma^2(t)$ 满足以下微分方程:

$$\frac{d\sigma^2(t)}{\sigma^2(t)} = p \left(1 - \frac{\sigma^2(t)}{M} \right) dt + \xi \left(1 - \frac{\sigma^2(t)}{M} \right) dB(t), \quad (5)$$

则将(3)式和(5)式合记为 Logistic-Hull-White 股价的随机波动率模型.

当股票方差率随时间增大时, 其增长速度受到一定的阻碍, 其增长速度必将减缓. 当其增长速度达到理论上限值 M 时候, 它将在 M 值上下持续波动.

定理 1 在 Logistic-Hull-White 随机波动率模型中, 股价的期望回报方差率为:

$$E(\sigma^2(t)) = \frac{M\sigma_0^2 e^{(p-\xi^2/2)t}}{M - \sigma_0^2 + e^{(p-\xi^2/2)t}}. \quad (6)$$

证明 令:

$$N(t) = \sigma^2(t), \quad F = \frac{\sigma^2(t)}{M - \sigma^2(t)} = \frac{N(t)}{M - N(t)},$$

则,

$$\frac{dF}{F} = \frac{MdN(t)}{N(t)(M - N(t))}.$$

结合(5)式, 得(7)式如下:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dN(t)}{N(t)(1 - N(t)/M)} = pdt + \xi dB(t). \quad (7)$$

令 $G = \ln F$, F 和 t 的函数 G 遵循以下过程:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial F} pF + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial F^2} \xi^2 F^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial F} \xi F dB(t). \quad (8)$$

因为

$$\frac{\partial G}{\partial F} = \frac{1}{F}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial F^2} = -\frac{1}{F^2},$$

将其代入式(8), 所以 G 满足:

$$dG = (p - \xi^2 / 2) dt + \xi dB(t). \quad (9)$$

因为 p 和 ξ 都为常数, 式(9)说明 G 满足同一个广义维纳过程, 由伊藤引理可得它的漂移率为 $p - \xi^2 / 2$, 波动率为 ξ . 所以在 $0 \sim T$ 之间 $\ln F$ 的变化服从一般的正态分布, 其期望是 $p - \xi^2 / 2$, 回报方差是 $\xi^2 T$. 那么有

$$\ln F - \ln F_0 \sim \phi[(p - \xi^2 / 2)T, \xi^2 T], \quad (10)$$

其中, $\phi(m, n)$ 表示一个期望为 m , 方差为 n 的正态分布, 进而有

$$\ln F \sim \phi[(p - \xi^2 / 2)T + \ln F_0, \xi^2 T] \quad (11)$$

由式(11)得:

$$E(F) = \frac{N(t)}{M - N(t)} = \frac{N_0}{M - N_0} e^{(p - \xi^2 / 2)t}, \quad (12)$$

解出式(12)中的 $N(t)$ 得:

$$E(N(t)) = \frac{MN_0 e^{(p - \xi^2 / 2)t}}{M - N_0 + N_0 e^{(p - \xi^2 / 2)t}}. \quad (13)$$

将 $N(t) = \sigma^2(t)$, $N_0 = \sigma_0^2$ 代入式(13), 得:

$$E(\sigma^2(t)) = \frac{M\sigma_0^2 e^{(p - \xi^2 / 2)t}}{M - \sigma_0^2 + \sigma_0^2 e^{(p - \xi^2 / 2)t}},$$

得证.

定理 2 假设该股票没有受到任何阻碍, 其股价的期望波动回报方差的函数表达式如下:

$$E(\sigma^2(t)) = \sigma_0^2 e^{(p - \xi^2 / 2)t}. \quad (14)$$

证明 当股票未受到任何阻碍作用, 该假设等价于 $M \rightarrow \infty$. 利用洛必达求极限法则, 同时对分母和分子关于 M 求导, 得:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} E(\sigma^2(t)) = \frac{M\sigma_0^2 e^{(p - \xi^2 / 2)t}}{M - \sigma_0^2 + \sigma_0^2 e^{(p - \xi^2 / 2)t}} = \frac{(M\sigma_0^2 e^{(p - \xi^2 / 2)t})'}{(M - \sigma_0^2 + \sigma_0^2 e^{(p - \xi^2 / 2)t})'} = \sigma_0^2 e^{(p - \xi^2 / 2)t}. \quad (15)$$

所以 $E(\sigma^2(t)) = \sigma_0^2 e^{(p - \xi^2 / 2)t}$, 另外该定理也可从式(4)根据伊藤引理直接证得.

3 Logistic-Hull-White 随机波动率下的欧式看涨股票期权

在 Hull-White 模型^[12]中定义 $\bar{V} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(s) ds$, 则其欧式看涨期权价格为:

$$C(S_t, \sigma_t^2, t) = \int [e^{-(T-t)} \int (S_T - K)^+ g(S_T / \bar{V}) dS_T] \cdot h(\bar{V} / \sigma_t^2) d\bar{V},$$

式中, $g(S_T / \bar{V})$ 是 S_T 关于 $\bar{V}$ 的条件密度函数; $h(\bar{V} / \sigma_t^2)$ 是 $\bar{V}$ 的密度函数; K 是期权的敲定价格; h 是 $\bar{V}$ 的密度函数.

定理 3 在 Logistic-Hull-White 模型下, 一份初始价格 S_0 、到期时间为 T 、无风险利率 r 、敲定价格为 K 且无分红的欧式看涨股票期权. 假设 $\rho = 0$, 由文献[12]可得出该份股票期权价格的修正公式应为 Black-Scholes 期权价格在有效期内平均方差率分布上的积分值:

$$C(S_t, \sigma_t^2, t) = \int c^{B-S}(\bar{V}) \frac{M\sigma_0^2 Q}{(T-t)^3 (p - \xi^2 / 2)} \left(\frac{M\sigma_0^2 Q}{p - \xi^2 / 2} - \sigma^2(t)(T-t) \right) dt, \quad (16)$$

其中,

$$c^{(B-S)}(\bar{V}) = S_0 N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2),$$

$$Q = \ln \frac{M - \sigma_0^2 + e^{(p - \xi^2 / 2)T}}{M - \sigma_0^2 + e^{(p - \xi^2 / 2)t}}, \quad (17)$$

式中, $c^{B-S}(\bar{V})$ 为欧式看涨股票期权的价格^[6], M 为方差率的上限值.

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy,$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + V / 2)(T - t)}{\sqrt{V}},$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{V},$$

$$V = \frac{M\sigma_0^2}{p - \xi^2 / 2} \ln \frac{M - \sigma_0^2 + e^{(p - \xi^2 / 2)T}}{M - \sigma_0^2 + e^{(p - \xi^2 / 2)t}}.$$

证明 根据 Logistic-Hull-White 模型的假设, 因为 $W(t)$ 和 $B(t)$ 是 2 个不同的维纳过程, 其相关系数为 $\rho = 0$, 即 $dB(t)dW(t) = 0$, 可由文献[16]得其欧式股票的看涨期权为:

$$c(S_t, \sigma_t^2, t) = \int c^{(B-S)}(\bar{V}) h(\bar{V} / \sigma^2(t)) d\bar{V}. \quad (18)$$

又因为定理 1 可得股价的回报方差:

$$V(t) = \int_0^t \sigma^2(s) ds = \int_0^t \frac{M\sigma_0^2 e^{(p-\xi^2/2)s}}{M - \sigma_0^2 + e^{(p-\xi^2/2)s}} ds = \frac{M\sigma_0^2}{p - \xi^2/2} \ln \frac{M - \sigma_0^2 + e^{(p-\xi^2/2)t}}{M - \sigma_0^2 + 1}. \quad (19)$$

那么根据 Hull-White 模型中对 $\bar{V}$ 的定义有^[12]:

$$\bar{V} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(s) ds = \frac{1}{T-t} \left(\int_0^T \sigma^2(s) ds - \int_0^t \sigma^2(s) ds \right) = \frac{1}{T-t} \left(\frac{M\sigma_0^2}{p - \xi^2/2} \ln \frac{M - \sigma_0^2 + e^{(p-\xi^2/2)T}}{M - \sigma_0^2 + 1} - \frac{M\sigma_0^2}{p - \xi^2/2} \ln \frac{M - \sigma_0^2 + e^{(p-\xi^2/2)t}}{M - \sigma_0^2 + 1} \right) = \frac{1}{T-t} \cdot \frac{M\sigma_0^2}{p - \xi^2/2} \ln \frac{M - \sigma_0^2 + e^{(p-\xi^2/2)T}}{M - \sigma_0^2 + e^{(p-\xi^2/2)t}}. \quad (20)$$

由文献[6]的(17)式, 而且根据其模型假设和(5)式及定理 1, 因为 $W(t)$ 和 $B(t)$ 是 2 个不同的维纳过程, 其相关系数为 $\rho=0$, 即 $dB(t)dW(t)=0$. 可将 $\bar{V}$ 直接代入 d_1 和 d_2 , 最后将它们代入(17)式得出 $c^{(B-S)}(\bar{V})$. 其中由(20)式可得:

$$h(\bar{V} / \sigma^2(t)) = \frac{1}{T-t} \frac{M\sigma_0^2}{p - \xi^2/2} \ln \frac{M - \sigma_0^2 + e^{(p-\xi^2/2)T}}{M - \sigma_0^2 + e^{(p-\xi^2/2)t}}. \quad (21)$$

又因为:

$$d\bar{V} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(s) ds = \frac{\int_t^T \sigma^2(s) ds - \sigma^2(t)(T-t)}{(T-t)^2} dt = \left(\frac{M\sigma_0^2}{(T-t)^2 (p - \xi^2/2)} \ln \frac{M - \sigma_0^2 + e^{(p-\xi^2/2)T}}{M - \sigma_0^2 + e^{(p-\xi^2/2)t}} - \frac{\sigma^2(t)}{T-t} \right) dt. \quad (22)$$

最后将(17)式、(21)式、(22)式代入(18)式整理得到(16)式, 得证.

4 实证分析

选取美国 IBM 公司 2014 年 9 月 29 日至 2015 年 3 月 30 日的股价数据, 根据历史波动率的有关

算法计算各时间点的历史波动率得到图 1. 从图 1 可知, 随着时间的增长, 波动率开始急剧增长到理论上限值 M , 然后缓慢下降, 最后它在该股票的波动率的附近震荡. 图 1 证实了两点: (1) 从 0.20 年后该波动率趋于平缓, 这就说明一般利用历史波动率来计算该股票的真实波动率所选取的时间区间应该为 90 d(0.25 a)是可取的. (2) 该股价的波动率是一个随机变量, 且近似满足 Logistic 模型曲线.

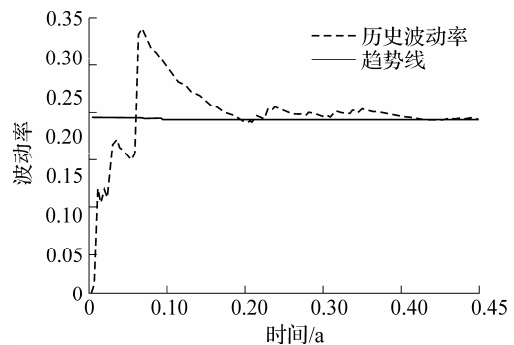


图 1 各时刻的历史波动率增长情况

图 2 是根据 IBM 股票初始 $S_0 = 162.67$ 得到的期望股价值, 可以从图中发现该模型得出的理论股价期望值偏大, 但两种的差值比较小, 即理论模型的误差较小.

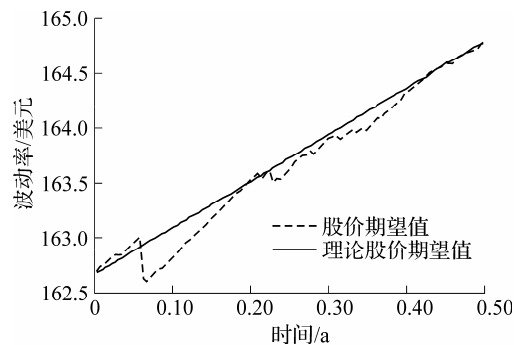


图 2 IBM 股票期望价格比较

5 结论

从理论角度出发将 Hull-White 随机波动率模型推广到标的资产在金融市场环境阻碍的一般情形, 得到 Logistic-Hull-White 随机波动率模型, 并给出了在该情景下的欧式看涨期权新公式. 从实证角度出发证实了波动率是一个随机变量, 其增长曲线符合 Logistic 模型. 在利用历史波动率代替真实的波动率时, 选取的时间区间应该较长. 同时对比两者的期望股价, 发现 Logistic-Hull-White 模

型的期望股价与实际波动率下的期望股价十分接近, 误差非常小。

综上两点, 该新模型具有一定的理论与实际指导价值。不仅如此, 它结合了历史波动率的计算方法和两个经典模型, 并吸取了数值和解析方法的各自优点, 因此它为标的资产的衍生品定价提供有效的参考, 具有一定的指导意义。但由于新模型的期权价格积分表达式非常复杂, 暂时无法完全算出该积分, 导致缺少新模型与其他定价公式的价格实证比较, 但这也是下一步工作要突破的重点和难点。

参考文献:

- [1] 张峻华, 戴伦, 刘文浩. 股票价格行为关于几何布朗运动的模拟——基于中国上证综指的实证研究[J]. 财经界(学术版), 2014(19):31-33.
- [2] 陈飞跃, 杨蓉, 龚海文. 混合分数布朗运动环境下欧式期权定价[J]. 经济数学, 2014(3):9-13.
- [3] 徐云. 基于分数布朗运动的具有信息影响的投资组合期权定价[J]. 数学的实践与认识, 2014, (19):170-175.
- [4] 彭斌, 彭菲. 基于跳-分形模型的美式看涨期权定价[J]. 数学的实践与认识, 2014(24):1-9.
- [5] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 1973, 81:637-654.
- [6] HULL J C. 期货、期权及其他衍生产品[M]. 王勇, 索吾林, 译. 北京: 机械工业出版社, 2011:9.
- [7] 鲍群芳, 陈思, 李胜宏. VIX 期权定价与校正[J]. 金融理论与实践, 2012(4):67-70.
- [8] 楼耀尧. 基于随机波动率假设的权证定价理论评述[J]. 金融发展研究, 2009(5):26-30.
- [9] 陈蓉, 吕恺. 隐含波动率曲面: 建模与实证[J]. 金融研究, 2010(8):136-154.
- [10] 张华. 基于中国证券市场的历史波动率与收益率关系的实证研究[J]. 甘肃金融, 2012(8):62-65.
- [11] 徐炜, 黄炎龙. GARCH 模型与 VaR 的度量研究[J]. 数量经济技术经济研究, 2008(1):120-132.
- [12] HULL J, WHITE A. The pricing of options on assets with stochastic volatilities[J]. The Journal of Finance, 1987, 42:281-299.
- [13] 孔庆雨, 李超杰. 具有随机波动率的期权定价的研究进展[J]. 经济师, 2006(12):33-35.
- [14] 陈杨林, 夏正喜. 随机波动率模型分析与应用[J]. 九江职业技术学院学报, 2010(4):78-80.
- [15] 张素梅. 随机波动风险和跳风险下欧式期权定价[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 2011(5):784-787.
- [16] 温鲜, 邓国和, 霍海峰. Hull-White 随机波动率模型的欧式障碍期权[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2009(4):49-52.
- [17] 蒋长安, 孙广才. 生物种群增长模型的研究[J]. 陕西工学院学报, 2003(4):42-44.

The Pricing of Options on Logistic-Hull-White Stochastic Volatility Model

HU Gui-bin¹, TAO Xiang-xing^{2*}, ZHOU Ting-ting², ZHANG Rui-jia¹

(1.Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2.Faculty of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: This paper presents the study on the Stochastic volatility of the underlying asset price, and introduces Logistic-Hull-White stochastic volatility model. The European call option pricing theory is derived using the established model, and the model is further validated using a case study.

Key words: volatility; Hull-White model; Logistic model; European call option

(责任编辑 章践立)