

一类局部射影平坦的广义 (α, β) -度量

吴亚东, 李本伶*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 作为著名 Hilbert 第四问题的正则性情况, 局部射影平坦 Finsler 度量的研究一直是 Finsler 几何中的重要问题. 文中主要讨论一类多项式类型的广义 (α, β) -度量, 并得到了此类度量是局部射影平坦度量的等价条件, 以及利用此等价条件构造了一些新的非闵可夫斯基的局部射影平坦的广义 (α, β) -度量.

关键词: Finsler 度量; 射影平坦; 广义 (α, β) -度量

中图分类号: O186

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2017) 01-0064-04

1 引言

著名 Hilbert 第四问题是描述在开子集 $U \subset R^n$ 上测地线是直线的距离函数, 它是在正则情况下对局部射影平坦的 Finsler 度量的分类. 黎曼几何是 Finsler 几何中特殊的一类, 且黎曼度量是局部射影平坦的当且仅当它有常截面曲率. 在 Finsler 几何中有不少度量由黎曼度量和其他 1-形式构成, 如 Randers 度量 $F = \alpha + \beta$ 由黎曼度量 $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ 和 1-形式 $\beta = b_i(x)y^i$ 构成, 它在物理及生物等领域都有相关应用. 文献[1-2]证明了 Randers 度量 $F = \alpha + \beta$ 是局部射影平坦的等价于 α 是射影平坦的, 且 β 是闭的 1-形式. 文献[3]分类了局部射影平坦的常曲率 Randers 度量. 更一般的 (α, β) 度量 $F = \alpha\phi(s)$ (其中 $\phi = \phi(s)$ 是 1 个 C^∞ 函数, $s = \beta/\alpha$) 也是由黎曼度量 $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ 和 1-形式 $\beta = b_i(x)y^i$ 构成. 文献[4]中对局部射影平坦的 (α, β) -度量进行了分类刻画. 其他关于此类局部射影平坦度量的相关结果可见文献[6-8].

在文献[8]中引入广义 (α, β) -度量 $F = \alpha\phi(b^2, s)$, 其中, $\phi = \phi(b^2, s)$ 是一个 C^∞ 函数, $s = \beta/\alpha$, $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ 是黎曼度量, $\beta = b_i(x)y^i$ 是 1-形式, 这是一类比 (α, β) -度量更一般的度量. 由于其结构更一般, 度量类型更丰富, 近年来受到了广泛关

注, 不少局部射影平坦度量也被发现^[9-10]. 那么如何构造更多的新的广义 (α, β) -度量对丰富 Finsler 几何就有重要意义.

文中笔者将研究如下的广义 (α, β) -度量 $F = \alpha(f_0 + f_1 s + f_2 s^2)$, 其中, $s = \beta/\alpha$, $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ 是黎曼度量, $\beta = b_i(x)y^i$ 是 1-形式, $f_i = f_i(b^2)$, $i = 0, 1, 2$.

事实上, 由于我们考虑的是度量局部的性质, 因此只需考虑广义 (α, β) -度量:

$$F = \alpha(f + gs + hs^2), \quad (1)$$

其中, $s = \beta/\alpha$, $f = f(b^2)$, $g = g(b^2)$, $h = \pm 1$, $f' = \partial f / \partial(b^2)$, $g' = \partial g / \partial(b^2)$, 并且构造一些新的非闵可夫斯基的局部射影平坦 Finsler 度量.

如果在局部 $f_2 > 0$, 令 $\bar{\beta} = \sqrt{f_2}\beta$, $\bar{s} = \bar{\beta}/\alpha$, 由于 $s = \beta/\alpha$, 则 $F = \alpha(f_0 + f_1 s + f_2 s^2)$ 变形为 $F = \alpha(f_0 + f_1 \bar{s} / \sqrt{f_2} + \bar{s}^2)$.

如果在局部 $f_2 < 0$, 令 $\bar{\beta} = \sqrt{-f_2}\beta$, $\bar{s} = \bar{\beta}/\alpha$, 由于 $s = \beta/\alpha$, 则 $F = \alpha(f_0 + f_1 s + f_2 s^2)$ 变形为 $F = \alpha(f_0 + f_1 \bar{s} / \sqrt{-f_2} - \bar{s}^2)$.

在以下定理中, 在一定条件下可得到局部射影平坦度量(1)式的等价条件.

定理 1 对于开子集 $U \subset R^n$ 上广义 (α, β) -度量 $F = \alpha(f + gs + hs^2)$ 而言, 假设黎曼度量 α 是局部射影平坦的, 则 F 是局部射影平坦的当且仅当

收稿日期: 2015-03-19.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11371209); 浙江省自然科学基金(LY13A010013); 浙江省教育厅科研基金(Y201326630).

第一作者: 吴亚东(1987-), 男, 河南平顶山人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 微分几何. E-mail: 192010757@qq.com

*通信作者: 李本伶(1979-), 女, 浙江宁波人, 教授, 主要研究方向: 微分几何. E-mail: libenling@nbu.edu.cn

满足以下条件之一:

(I)若 $f' \neq h$, 则 β 平行于 α , 此时 $G^i = G_\alpha^i$;

(II)若 $f' = h$, 则 $h=1$, 且 $f=b^2+c$, c 为任意非负常数. 且存在函数 $u=u(x)$, 使得 $b_{ij} = ua_{ij}/2$. 而此时, $G^i = G_\alpha^i + \alpha y^i u(g+4s+2g's^2)/(2(c+b^2+gs+s^2))$, 其中, G^i 和 G_α^i 分别为 F 和 α 的测地系数.

从定理1可见, 情况(I)中 β 平行于 α 是平凡的情形, 而在情况(II)中 β 为 α 共形1-形式. 由此通过求解 β , 可以构造一些特殊的局部射影平坦的 Finsler 度量.

例1 取 $\alpha = |y|$ 为欧氏度量, 显然欧氏度量是局部射影平坦的. 取 $\beta = \langle x, y \rangle$, 可见 $b_{ij} = \delta_{ij}$, 因此, $s_{ij} = 0$, $r_{ij} = \delta_{ij} = a_{ij}$ 满足定理1中(2)的条件. 故此时的度量 F 即为非闵可夫斯基的局部射影平坦度量.

事实上由黎曼几何的知识可知, 局部射影平坦的黎曼度量即为具有常数截面曲率的度量, 其在局部可表示如下:

$$\alpha_\kappa = \frac{\sqrt{(1+\kappa|x|^2)|y|^2 - \kappa\langle x, y \rangle^2}}{1+\kappa|x|^2},$$

式中, κ 为 α_κ 的截面曲率. 在文献[5]中已给出以上黎曼度量的共形1-形式为:

$$\beta = \frac{\varepsilon\langle x, y \rangle + (1+\kappa|x|^2)\langle a, y \rangle - \kappa\langle a, x \rangle\langle x, y \rangle}{(1+\kappa|x|^2)^{3/2}},$$

式中, ε 为任意常数, a 为任意常向量. 此时,

$$b_{ij} = \frac{\varepsilon - \kappa\langle a, x \rangle}{\sqrt{(1+\kappa|x|^2)}},$$

$$a_{ij} = \frac{\varepsilon - \kappa\langle a, x \rangle}{\sqrt{(1+\kappa|x|^2)}} \frac{(1+\kappa|x|^2)\delta_{ij} - \kappa x_i x_j}{1+\kappa|x|^2}.$$

因此, 定理1中情形(2)已得到了 F 的所有解.

2 预备知识

定义1 在向量空间 V 上的闵可夫斯基形式 $F = F(y): V \rightarrow R$ 是具有以下性质的 C^∞ 函数:

(a) $F \geq 0$, 而且 $F = 0$ 当且仅当 $y = 0$;

(b) F 是齐次函数, 即 $F(\lambda y) = \lambda F(y)$, $\lambda > 0$, $y \in V$;

(c) 对于任意的 $y \in V \setminus \{0\}$, 基本形式 g_y 是正定的, 其中,

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} [F^2(y + su + tv)] \Big|_{s=t=0}.$$

定义2 设流形 M 上函数 $F: TM \rightarrow [0, +\infty)$ 满足以下条件:

(a) 在 $TM \setminus \{0\}$, F 是 C^∞ 函数;

(b) 对于任意的 $x \in M$, 在 $T_x M$ 上, F 是闵可夫斯基形式, 则称 F 为 Finsler 度量.

$F = F(x, y)$ 是开集 R^n 上的 Finsler 度量, F 的测地线满足方程:

$$d^2 x^i / dt^2 + 2G^i(x(t), dx/dt) = 0,$$

其中, $G^i = G^i(x, y)$ 称为 F 的测地系数, 且 $G^i = g^{il} \{ [F^2]_{x^k} y^k - [F^2]_{y^l} \} / 4$.

若 $F = F(x, y)$ 的测地线都是直线, 则称其为局部射影平坦的 Finsler 度量. 在这种情况下, 其测地系数满足 $G^i = P y^i$, 其中, $P = P(x, y)$ 是关于 y 的正定一次齐次函数, 则 P 称为 F 的射影因子.

为了简化, 令 b_{ij} 为 β 关于 α 的共变导数的系数. 且记:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= (b_{ij} + b_{ji}) / 2, s_{ij} = (b_{ij} - b_{ji}) / 2, r_i^j = b^j r_{ji}, \\ s_i &= b^j s_{ji}, y_i = y^j a_{ji}, r^i = a^{ij} r_j, s^i = a^{ij} s_j, r = b^i r_i, \\ s_0 &= s_i y^i, s_0^i = a^{ij} s_{jk} y^k, r_0 = r_i y^i, r_{00} = r_{ij} y^i y^j. \end{aligned}$$

在文献[8]中, 在开子集 $U \subset R^n$ 上定义了广义 (α, β) -度量 $F = \alpha \phi(b^2, s)$ 是 Finsler 度量, 其中 C^∞ 正函数 ϕ 满足:

(i) 当 $n \geq 3$ 时, $\phi - s\phi_2 > 0$ 和 $\phi_{22} > 0$;

(ii) 当 $n = 2$ 时, $\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22} > 0$.

则其测地系数 G^i 满足:

$$\begin{aligned} G^i &= y^i (G_\alpha^i + \alpha Q s_0^i + \{ \Theta(-2\alpha Q s_0 + r_{00} + 2\alpha^2 Rr) + \alpha \Omega(r_0 + s_0) \} / \alpha + \{ \Psi(-2\alpha Q s_0 + r_{00} + 2\alpha^2 Rr) + \alpha \Pi(r_0 + s_0) \} b^i - \alpha^2 R(r^i + s^i)), \end{aligned} \quad (2)$$

其中,

$$\Theta = \frac{(\phi - s\phi_2)\phi_2 - s\phi\phi_{22}}{2\phi(\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22})}, Q = \frac{\phi_2}{\phi - s\phi_2},$$

$$\Psi = \frac{\phi_{22}}{2(\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22})}, R = \frac{\phi_1}{\phi - s\phi_2},$$

$$\Pi = \frac{(\phi - s\phi_2)\phi_{12} - s\phi_1\phi_{22}}{(\phi - s\phi_2)(\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22})},$$

$$\Omega = \frac{2\phi_1}{\phi} - \frac{s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2}{\phi} \Pi,$$

$$\phi_1 = \frac{\partial}{\partial(b^2)} \phi, \phi_2 = \frac{\partial}{\partial s} \phi, \phi_{12} = \frac{\partial^2}{\partial(b^2)\partial s} \phi, \phi_{22} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \phi.$$

本文考虑条件如(I)的 Finsler 度量, 则其相应

的 ϕ 须满足以下条件:

(i) 当 $n \geq 3$ 时, $f - hs^2 > 0$ 和 $h > 0$,

(ii) 当 $n = 2$ 时, $f + 2hb^2 - 3hs^2 > 0$.

定理 1 中的条件(II)当 $f' = h$ 时, 由于自然地 $b^2 - s^2 > 0$, 此时 $h = 1$.

在证明定理 1 的过程中需要以下引理.

引理 1 若 b^2 为常数, 则 $s_k + r_k = 0$.

证明 $b^2 = b_i b^i$, 两边同时对 x^k 求导, 可得 $b_{x^k}^2 = 2b^i b_{ik} = b^i (s_{ik} + r_{ik}) = r_k + s_k = 0$.

引理 2 若 $s_0 = c\beta$, 则 $s_i = 0$.

证明 由已知得 $s_i = cb_i$, 两边对 b^i 作缩并得, $cb^2 = cs_i b^i = 0$, 显然可得 $c = 0$, 所以 $s_i = cb_i = 0$.

引理 3 如果 $U\alpha + V = 0$, 其中 $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$ 是黎曼度量, U 和 V 是关于 y 的多项式, 则 $U = 0$, $V = 0$.

证明 显然成立.

3 主要定理的证明

命题 1 黎曼度量 α 和广义 (α, β) -度量 F 是局部射影平坦的, 则

$$\{b^i \Psi r_{00} + b^i \alpha \Pi(r_0 + s_0) - \alpha^2 R(r^i + s^i) - 2b^i \alpha \Psi \cdot Qs_0 + \alpha Qs_0^i + 2b^i \alpha^2 \Psi Rr\} \alpha^2 + ((\alpha^2 R - \alpha \beta \Pi)(r_0 + s_0) - \beta \Psi r_{00} + 2\alpha \beta \Psi Qs_0 - 2\alpha^2 \beta \Psi Rr) y^i = 0. \quad (3)$$

证明 由于 α 是局部射影平坦, 则 $G_\alpha^i = P_\alpha y^i$, 其中, $P_\alpha = \alpha_{x^k} y^k / (2\alpha)$ 是黎曼度量 α 的射影因子. 再由(2)式可得存在 1-形式 $\bar{P} = \bar{P}(x, y)$, 使得

$$G^i - G_\alpha^i = \bar{P} y^i, \quad (4)$$

其中,

$$G^i - G_\alpha^i = \alpha Qs_0^i + \{\Theta(-2\alpha Qs_0 + r_{00} + 2\alpha^2 Rr) + \alpha \Omega(r_0 + s_0)\} y^i / \alpha + \{\Psi(-2\alpha Qs_0 + r_{00} + 2\alpha^2 Rr) + \alpha \Pi(r_0 + s_0)\} b^i - \alpha^2 R(r^i + s^i). \quad (5)$$

把(5)式代入(4)式, 可得:

$$\{b^i \Psi r_{00} + b^i \alpha \Pi(r_0 + s_0) - \alpha^2 R(r^i + s^i) - 2b^i \alpha \Psi \cdot Qs_0 + \alpha Qs_0^i + 2b^i \alpha^2 \Psi Rr\} \alpha^2 + \{(\alpha^2 R - \alpha \beta \Pi) \cdot (r_0 + s_0) - \beta \Psi r_{00} + 2\alpha \beta \Psi Qs_0 - 2\alpha^2 \beta \Psi Rr\} y^i = 0.$$

定理 1 证明 通过(2)式可知充分性是显然的, 此时只需证明必要性即可.

由命题 1 可知, 将 $\phi = f + gs + hs^2$ 代入(3)式, 并整理可得:

$$W_6^i \alpha^6 + W_5^i \alpha^5 + W_4^i \alpha^4 + W_3^i \alpha^3 + W_2^i \alpha^2 + W_0^i = 0, \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned} W_6^i &= f' \{2b^i hr - (f + 2hb^2)(r^i + s^i)\}, \\ W_5^i &= g' \{2b^i hr - (f + 2hb^2)(r^i + s^i)\} \beta + \\ &\quad g' f b^i (r_0 + s_0) + 2gh(s_0^i b^2 - b^i s_0) + g f s_0^i, \\ W_4^i &= 3f' h(r^i + s^i) \beta^2 + 2h \{2h(b^2 s_0^i - b^i s_0) - \\ &\quad b^i f' (r_0 + s_0) - y^i r f' + f s_0^i\} \beta + (y^i f f' + \\ &\quad 2y^i f' h b^2)(r_0 + s_0) + b^i h f r_{00}, \\ W_3^i &= 3hg'(r^i + s^i) \beta^3 - h \{2y^i r g' + 3gs_0^i + 2b^i g' \cdot \\ &\quad (r_0 + s_0)\} \beta^2 + 2hy^i \{s_0 g + b^2 g' (r_0 + s_0)\} \beta, \\ W_2^i &= -6s_0^i h^2 \beta^3 - h \{y^i f' (r_0 + s_0) + b^i h r_{00} - \\ &\quad 4y^i h s_0\} \beta^2 - y^i h f r_{00} \beta, \\ W_0^i &= y^i h^2 \beta^3 r_{00}. \end{aligned}$$

由引理 3 可得:

$$W_6^i \alpha^6 + W_4^i \alpha^4 + W_2^i \alpha^2 + W_0^i = 0, \quad (7)$$

$$W_5^i \alpha^5 + W_3^i = 0. \quad (8)$$

(7)式与(8)式分别两边同时对 b_i 作缩并, 可得:

$$ff' r \alpha^6 - \{h r f' \beta^2 + f \beta (f s_0 + f' r_0 + 2h s_0)\} \alpha^4 + \{h(f s_0 + f' r_0 + 2h s_0) \beta^3 + h r_{00} (f + h b^2) \beta^2\} \alpha^2 + h^2 r_{00} \beta^4 = 0, \quad (9)$$

$$\{b^2 f g' (r_0 + s_0) - r f g' \beta + s_0 f g\} \alpha^2 - h \beta^2 \cdot$$

$$\{(b^2 g' (r_0 + s_0) + g s_0 - r g' \beta)\} = 0. \quad (10)$$

(9)式关于 α 的最低次项系数为 $h^2 \beta^4 r_{00}$. 所以存在数量函数 $u = u(x)$ 使得 $r_{00} = u \alpha^2$, 进而可得:

$$r_{ij} = u a_{ij}. \quad (11)$$

把(11)式分别代入到(9)式与(10)式, 可得:

$$\{hu(f' - h) \beta^3 + h s_0 (2h + f') \beta^2 - u(f' - h) \cdot (h b^2 + f) \alpha^2 \beta - f s_0 (2h + f') \alpha^2\} \beta + b^2 f u (f' - h) \alpha^4 = 0. \quad (12)$$

$$(g + b^2 g') (f \alpha^2 - h \beta^2) s_0 = 0. \quad (13)$$

因为 α^2 是不可约的, 通过(12)式可得:

$$f u (f' - h) = 0. \quad (14)$$

情形 1 $f = 0$, 把其代入到(12)式, 可得 $(2s_0 - u\beta)\beta + ub^2\alpha^2 = 0$. 由引理 3 得 $u = 0$, 再将其代入上式, 得到 $s_0 = 0$, 则 $s_i = 0$. 将 $r_{ij} = 0$ 与 $s_i = 0$ 代入到(8)式, 可得 $ghs_0^i (2b^2\alpha^2 - 3\beta^2) = 0$, 即 $gs_0^i = 0$.

情形 2 f 为非零常数, 则 $f' = 0$. 由(14)式可

得 $u=0$, 再由 (11) 式可得 $r_{ij}=0$. 将其代入 (12) 式, 可得 $h\beta s_0(f\alpha^2 - h\beta^2)=0$. 显然可得 $s_0=0$, 则 $s_i=0$. 再把上述公式代入到 (8) 式, 可得 $\{(f+2hb^2)\cdot\alpha^2 - 3h\beta^2\}gs_0^i=0$, 即 $gs_0^i=0$.

由情形 1 和情形 2 可知, f 为常数时, $s_i=0$, $r_{ij}=0$, $gs_0^i=0$.

当 $g=0$, 由 (7) 式显然可得 $s_0^i=0$, 则 $s_{ij}=0$. 进而可得 $b_{ij}=0$, 所以 β 平行于 α . $G^i=G_\alpha^i$.

当 $s_0^i=0$, 则 $s_{ij}=0$. 由于 $b_{ij}=(r_{ij}+s_{ij})/2=0$, 所以 β 平行于 α . 此时 $G^i=G_\alpha^i$.

情形 3 设 f 是关于 b^2 的函数, 且 $f' \neq h$, 再由 (14) 式可得 $u=0$, 即 $r_{ij}=0$. 将其代入到 (12) 式可得 $s_0(2h+f')(h\beta^2 - f\alpha^2)=0$.

显然 $f'=-2h$. 假设 $s_0=0$, 则 $s_i=0$, 再由 $u=0$ 和 (11) 式可得 $r_{ij}=0$. 则由引理 2 可得, b^2 为常数, 这与情形 3 矛盾. 则 $f'=-2h$.

由 (13) 式显然可得 $g+b^2g'=0$. 进而可得 $f=-2hb^2+c_1$, $g=c_2/b^2$, c_1, c_2 为任意常数.

把上面公式代入到 (8) 式, 可得 $g'(b^i s_0 - s^i \beta - s_0^i b^2)(c_1 \alpha^2 - 3h\beta^2)=0$. 显然可得:

$$b^i s_0 - s^i \beta - s_0^i b^2 = 0, \quad (15)$$

两边同时对 y^j 求导, 得到 $b^i s_j - s^i b_j - s_j^i b^2 = 0$, 再两边同时对 y_i, b^j 作缩并, 可得 $2s_0 b^2 = 0$, 则 $s_0=0$, 则 $s_i=0$. 将其代入到 (15) 式, 可得 $s_{ij}=0$. 这与情形 3 矛盾. 所以不存在情形 3 这种情况.

情形 4 $f'=h$, 且 $u \neq 0$, 则 $r_{ij}=ua_{ij}$. 将其代入到 (12) 式, 可得 $s_0(2h+f')(h\beta^2 - f\alpha^2)=0$.

显然 $s_0=0$, 再由 (8) 式可得 $s_0^i=0$. 此时,

$b_{ij}=ua_{ij}/2$. 把以上公式代入到 (2) 式, 可得:

$$G^i = G_\alpha^i + \frac{u(g+4hs+2g's^2)}{2(c+hb^2+gs+hs^2)} \alpha y^i.$$

参考文献:

- [1] BACSO S, MATSUMOTO M. On Finsler spaces of Douglas type: A generalization of the notion of Berwald space[J]. Publ Math Debrecen, 1997, 51:385-406.
- [2] CHERN S S, SHEN Z M. Riemann-Finsler geometry[M]. New York: World Scientific, 2005:66-125.
- [3] SHEN Z M. Projectively flat Randers metrics with constant flag curvature[J]. Math Ann, 2003, 325:19-30.
- [4] SHEN Z M. On projectively flat (α, β) -metrics[J]. Canad Math Bull, 2009, 52:132-144.
- [5] ZHONG M S, HAO X. On Randers metrics with isotropic S-curvature[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2008, 24:789-796.
- [6] LI B L. On the classification of projectively flat Finsler metrics with constant flag curvature[J]. Adv Math, 2014, 257:266-284.
- [7] MO X H, SHEN Z M, YANG C H. Some constructions of projectively flat finsler metrics[J]. Sci China Ser A, 2006, 49(5):703-714.
- [8] YU C T, ZHU H M. On a new class of Finsler metrics[J]. Diff Geo Appl, 2011, 29:244-254.
- [9] SHEN Z M, YU CHANGTAO. On a class of Einstein Finsler metrics[J]. Canad Math Bull, 2014, 25(4):30-47.
- [10] SHEN Y B, ZHAO L L. Some projectively flat (α, β) -metrics[J]. Sci China Ser A, 2006, 49:838-851.
- [11] 张淑洁, 祖豆蔻, 李本伶. 具有 m 次根的射影平坦芬斯勒度量[J]. 宁波大学学报(理工版), 2011, 24(3):48-52.

On a class of projectively flat general (α, β) -metrics

WU Ya-dong, Li Ben-ling*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: As the regular case of famous Hilbert's fourth problem, the study of projectively flat Finsler metric is an important problem in Finsler geometry. In this paper, we discuss and prove equivalent conditions for a class of polynomial type, projectively flat general (α, β) -metrics. Using the equivalent conditions, we construct some new non-Minkowskian projectively flat general (α, β) -metrics.

Key words: Finsler metric; projectively flat; general (α, β) -metrics.

(责任编辑 章践立)