

一个新的二参数二元几何分布及其多元推广

李国安, 李建峰

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 导出了一个新的二参数二元几何分布, 其可靠性模型背景是至多一个元件有效的系统. 同时, 讨论了该二元几何分布的识别性、分布特征及参数估计, 并以该二元几何分布为例说明通过识别性途径实现二元随机变量的计算机生成方法, 最后给出了该二参数二元几何分布的多元情形.

关键词: 二元几何分布; 识别性; 分布特征; 参数估计; 计算机生成

中图分类号: O212.4

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2017) 01-0059-05

文献[1-2]讨论了一个二元 Marshall-Olkin 型几何分布; 文献[3]给出了二元 Marshall-Olkin 型几何分布的参数估计; 文献[4]给出了著名的二元 Marshall-Olkin 型指数分布; 文献[5]讨论了一个二参数的二元几何分布, 并给出了参数估计; 文献[6]讨论了一个二元 Freund 型几何分布, 并给出了参数估计. 针对文献[5]中该二参数二元几何分布及其对应的可靠性模型, 我们在市场满意度调查的二元二点分布基础上, 利用二元二点分布和二元几何分布的关系, 导出了一个新的二参数二元几何分布, 其可靠性模型背景是至多一个元件有效系统, 同时讨论了该二元几何分布的识别性、分布特征及参数估计.

随机变量的计算机生成是分布模型能模拟成功的关键, 从现有的文献看主要有 4 种形式: (1)二元随机变量本身就是二个独立的一元随机变量的最小值、最大值, 如文献[1-4, 7-9]; (2)利用乘法公式, 把二元随机变量的分布函数表示成一个随机变量的分布函数与一个随机变量的条件分布函数相乘, 如文献[7]; (3)把二元随机变量表示成 2 个独立的一元随机变量的线性表达式, 如文献[10]; (4)利用文献[11]中提出的多元分布的识别性概念, 首先对二元随机变量的分布参数进行识别, 进而得到二元随机变量分布的一个特征, 从而实现二元随机变量的计算机生成, 如文献[12-17]. 从文献[6-17]可

以归纳得出, 通过识别性途径实现二元绝对连续型或连续混合型随机变量的计算机生成方法.

本文以导出的一个新的二元几何分布为例, 给出了通过识别性途径实现二元离散型随机变量的计算机生成方法.

1 二元几何分布的识别性

参照满意度市场调查研究中的二元二点分布定义, 导出了如下一个二元几何分布.

定义 1 称 (X, Y) 服从类似于满意度市场调查中二元二点分布的二元几何分布, 是指 (X, Y) 有如下二元几何分布:

$$P(X=0, Y=0) = p_1 + p_2 - 1,$$

$$P(X=k, Y=0) = (1-p_1)^k p_1, k=1, 2, \dots$$

$$P(X=0, Y=k) = (1-p_2)^k p_2, k=1, 2, \dots$$

$$0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1, p_1 + p_2 > 1,$$

记作 $(X, Y) \sim BGD(p_1, p_2)$.

记 $U = \max(X, Y)$, 定义 $I=1, 2, 3$ 分别对应于 $X > Y, Y > X, X=Y$ 时.

引理 1 $(X, Y) \sim BGD(p_1, p_2)$, 则 $X \sim GD(p_1)$, $Y \sim GD(p_2)$, 这里 $X \sim GD(p_1)$ 表示随机变量 X 服从参数为 p_1 的几何分布.

证明

$$P(X=0) = P(X=0, Y=0) + \sum_{k=1}^{\infty} P(X=0, Y=k) =$$

$$\begin{aligned}
 & p_1 + p_2 - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (1-p_2)^k p_2 = p_1, \\
 & P(X=k) = P(X=k, Y=0) + \\
 & \sum_{j=1}^{\infty} P(X=k, Y=j) = \\
 & (1-p_1)^k p_1, k=1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

由此得 $X \sim GD(p_1)$, 同理可得 $Y \sim GD(p_2)$.

引理 2 若 $(X, Y) \sim BGD(p_1, p_2)$, 则 U 的分布律为:

$$\begin{aligned}
 & P(U=0) = p_1 + p_2 - 1, \\
 & P(U=k) = (1-p_1)^k p_1 + (1-p_2)^k p_2, k=1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}
 & P(U=0) = P(X=0, Y=0) = p_1 + p_2 - 1, \\
 & P(U=k) = P(X=k, Y=0) + P(X=0, Y=k) = \\
 & (1-p_1)^k p_1 + (1-p_2)^k p_2, k=1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

引理 3 若 $(X, Y) \sim BGD(p_1, p_2)$, 则 (U, I) 的联合分布律为:

$$\begin{aligned}
 & P(U=k, I=j) = \\
 & \begin{cases} (1-p_1)^k p_1, k=1, 2, \dots, j=1, \\ (1-p_2)^k p_2, k=1, 2, \dots, j=2, \\ p_1 + p_2 - 1, k=0, j=3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}
 & P(U=k, I=1) = P(X=k, Y=0) = \\
 & (1-p_1)^k p_1, k=1, 2, \dots \\
 & P(U=k, I=2) = P(X=0, Y=k) = \\
 & (1-p_2)^k p_2, k=1, 2, \dots \\
 & P(U=1, I=3) = P(X=0, Y=0) = \\
 & p_1 + p_2 - 1.
 \end{aligned}$$

定理 1 若 $(X, Y) \sim BGD(p_1, p_2)$, $(X', Y') \sim BGD(p'_1, p'_2)$, 若仅已知 U 与 U' 同分布, 则所有参数皆不可识别.

证明 由 $p_1 + p_2 - 1 = p'_1 + p'_2 - 1$,

$$\begin{aligned}
 & (1-p_1)^k p_1 + (1-p_2)^k p_2 = \\
 & (1-p'_1)^k p'_1 + (1-p'_2)^k p'_2,
 \end{aligned}$$

可得所有参数皆不可识别.

定理 2 若 $(X, Y) \sim BGD(p_1, p_2)$, $(X', Y') \sim BGD(p'_1, p'_2)$, 若已知 (U, I) 与 (U', I') 同分布, 则所有参数皆可识别.

$$\text{证明 由 } \begin{cases} (1-p_1)^k p_1 = (1-p'_1)^k p'_1, \\ (1-p_2)^k p_2 = (1-p'_2)^k p'_2, \\ p_1 + p_2 - 1 = p'_1 + p'_2 - 1, \end{cases}$$

直接可得:

$$\begin{cases} p_1 = p'_1, \\ p_2 = p'_2. \end{cases}$$

2 二元几何分布的特征及计算机生成

从上可知, 仅是 U 分布已知时所有参数皆不可识别; 当 (U, I) 分布已知时, 所有参数皆可识别, 即所有参数皆可估计. 同时应注意到, (X, Y) 分布决定 (U, I) 分布, (U, I) 分布是否能唯一决定 (X, Y) 分布是关键, 若能, 这就是一个分布特征的结果.

定理 3 若 (X, Y) 服从二元几何分布, 则 $(X, Y) \sim BGD(p_1, p_2)$ 当且仅当 (U, I) 的分布律为:

$$\begin{aligned}
 & P(U=k, I=j) = \\
 & \begin{cases} (1-p_1)^k p_1, k=2, 3, \dots, j=1, \\ (1-p_2)^k p_2, k=2, 3, \dots, j=2, \\ p_1 + p_2 - 1, k=0, j=3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

二元几何分布随机变量的计算机生成如下:

根据 $P(I=1) = p_1 + p_2 - 1$, $P(I=2) = 1 - p_1$, $P(I=3) = 1 - p_2$, 把 $(0, 1)$ 区间分成 3 段, 分别为 $(0, p_1 + p_2 - 1]$, $(p_1 + p_2 - 1, p_2]$, $(p_2, 1)$, 长度分别为 $p_1 + p_2 - 1$, $1 - p_1$, $1 - p_2$. 对长度为 $1 - p_1$, $1 - p_2$ 二段分别分成可列段, 长度为 $1 - p_1$ 的一段, 以对应概率 $P(U=k, I=1) = (1-p_1)^{k-1} p_1, k=2, 3, \dots$, 作为区间长度来划分, 分成:

$$\begin{aligned}
 & (p_1 + p_2 - 1, p_1 + p_2 - 1 + (1-p_1)p_1], \\
 & (p_1 + p_2 - 1 + (1-p_1)p_1, \\
 & p_1 + p_2 - 1 + \sum_{k=2}^3 (1-p_1)^{k-1} p_1], \dots, \\
 & (p_1 + p_2 - 1 + \sum_{k=2}^n (1-p_1)^{k-1} p_1, \\
 & p_1 + p_2 - 1 + \sum_{k=2}^{n+1} (1-p_1)^{k-1} p_1], \dots
 \end{aligned}$$

长度为 $1 - p_2$ 的一段, 以对应概率:

$$P(U=j, I=2) = (1-p_2)^{j-1} p_2, j=2, 3, \dots,$$

作为区间长度来划分, 与此类似地分成可列个区间. 记服从 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机数为 t_i , (U, I) 对应的伪随机数为 (u_i, I_i) , (X, Y) 对应的伪随机数为 (x_i, y_i) . 首先产生服从 $(0, 1)$ 上均匀分布的随机数 t_i , 若 t_i 落入 $(0, p_1 + p_2 - 1]$, 则 $I_i = 3$, $u_i = 1$, 由此得 $x_i = 1$, $y_i = 1$; 若 t_i 落入 $(p_1 + p_2 - 1, p_2]$, 且 t_i 落入 $(p_1 + p_2 - 1, p_1 + p_2 - 1 + (1-p_1)p_1]$, 则 $I_i = 1$, $u_i = 2$; 若 t_i 落入 $(p_1 + p_2 - 1, p_2]$, 且 t_i 落入 $(p_1 +$

$p_2 - 1 + \sum_2^n (1 - p_1)^{k-1} p_1$, $p_1 + p_2 - 1 + \sum_2^{n+1} (1 - p_1)^{k-1} p_1$, 则 $I_i = 1$, $u_i = n$, 由此得 $x_i = n$, $y_i = 1$; 若 t_i 落入 $(p_2, 1)$, 与此类似可得 $I_i = 2$, $u_i = j$, 由此得 $x_i = 1$, $y_i = j$.

3 二元几何分布的参数估计及模拟

从定理3可知, 来自总体 $(X, Y) \sim BGD(p_1, p_2)$ 的样本与来自对应总体 (U, I) 的样本等价. 从定理3出发, 可直接获得所有参数的最大似然估计.

定理4 设 $(X, Y) \sim BGD(p_1, p_2)$ 是总体, $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ 是来自总体 (X, Y) 容量为 n 的样本, 记 $U_i = \max(X_i, Y_i)$, 定义随机变量 $I_i = 1, 2, 3$, 分别对应 $X_i > Y_i$, $Y_i > X_i$, $X_i = Y_i$ 时, $(U_1, I_1), \dots, (U_n, I_n)$ 是来自总体 (U, I) 容量为 n 的样本, 则参数 p_1, p_2 基于样本 $(U_1, I_1), \dots, (U_n, I_n)$ 的最大似然估计为:

$$\hat{p}_1 = \frac{b_n \pm \sqrt{b_n^2 - 4a_n c_n}}{2a_n},$$

$$\hat{p}_2 = 1 - \hat{p}_1 + \frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1) \sum_1^n (w_{3i}^{(0)})}{\hat{p}_1 \sum_1^n ((k_i + 1)w_{1i}^{(k_i)}) - \sum_1^n (w_{1i}^{(k_i)})},$$

其中:

$$w_{1i}^{(k_i)} = \begin{cases} 1, U_i = k_i, I_i = 1, \\ 0, \text{其他}, \end{cases}$$

$$w_{2i}^{(k_i)} = \begin{cases} 1, U_i = k_i, I_i = 2, \\ 0, \text{其他}, \end{cases}$$

$$w_{3i}^{(0)} = \begin{cases} 1, U_i = 0, I_i = 3, \\ 0, \text{其他}, \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, n,$$

$\hat{p}_1$ 为方程 $a_n p_1^2 - b_n p_1 + c_n = 0$ 的解, 其中 a_n, b_n, c_n 均是样本的函数.

证明 似然函数

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial p_1} = \frac{\sum_1^n (w_{1i}^{(k_i)})}{p_1} - \frac{\sum_1^n (k_i w_{1i}^{(k_i)})}{1 - p_1} + \frac{\sum_1^n (w_{3i}^{(0)})}{p_1 + p_2 - 1}, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial p_2} = \frac{\sum_1^n (w_{2i}^{(k_i)})}{p_2} - \frac{\sum_1^n (k_i w_{2i}^{(k_i)})}{1 - p_2} + \frac{\sum_1^n (w_{3i}^{(0)})}{p_1 + p_2 - 1}, \end{cases}$$

令

$$\frac{\sum_1^n (w_{1i}^{(k_i)})}{p_1} - \frac{\sum_1^n (k_i w_{1i}^{(k_i)})}{1 - p_1} + \frac{\sum_1^n (w_{3i}^{(0)})}{p_1 + p_2 - 1} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\sum_1^n (w_{2i}^{(k_i)})}{p_2} - \frac{\sum_1^n (k_i w_{2i}^{(k_i)})}{1 - p_2} + \frac{\sum_1^n (w_{3i}^{(0)})}{p_1 + p_2 - 1} = 0, \quad (2)$$

记

$$d_n = \frac{\sum_1^n (w_{1i}^{(k_i)}) - p_1 \sum_1^n ((k_i + 1)w_{1i}^{(k_i)})}{p_1(1 - p_1)},$$

由式(1)得:

$$p_1 + p_2 - 1 = -\frac{\sum_1^n (w_{3i}^{(0)})}{d_n},$$

$$1 - p_2 = \frac{d_n p_1 + \sum_1^n (w_{3i}^{(0)})}{d_n},$$

$$p_2 = \frac{d_n - d_n p_1 - \sum_1^n (w_{3i}^{(0)})}{d_n},$$

代入式(2)得:

$$\begin{aligned} & d_n p_1 \sum_1^n (w_{2i}^{(k_i)}) + \sum_1^n (w_{2i}^{(k_i)}) \sum_1^n (w_{3i}^{(0)}) - d_n \sum_1^n (k_i w_{2i}^{(k_i)}) + \\ & d_n p_1 \sum_1^n (k_i w_{2i}^{(k_i)}) + \sum_1^n (w_{3i}^{(0)}) \sum_1^n (k_i w_{2i}^{(k_i)}) = \\ & d_n^2 (1 - p_1) p_1 + d_n (1 - p_1) \sum_1^n (w_{3i}^{(0)}) - \\ & d_n p_1 \sum_1^n (w_{3i}^{(0)}) - \sum_1^n (w_{3i}^{(0)}) \sum_1^n (w_{3i}^{(0)}), \end{aligned}$$

用

$$d_n = \frac{\sum_1^n (w_{1i}^{(k_i)}) - p_1 \sum_1^n ((k_i + 1)w_{1i}^{(k_i)})}{p_1(1 - p_1)},$$

代入, 记:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_1^n (w_{3i}^{(0)})^2 + 2 \sum_1^n (w_{3i}^{(0)}) \sum_1^n ((k_i + 1)w_{1i}^{(k_i)}) + \\ & (\sum_1^n ((k_i + 1)w_{1i}^{(k_i)}))^2 + \\ & \sum_1^n (k_i + 1)w_{2i}^{(k_i)} \sum_1^n (k_i + 1)w_{1i}^{(k_i)} + \\ & \sum_1^n (w_{3i}^{(0)}) \sum_1^n (k_i + 1)w_{2i}^{(k_i)}, \end{aligned}$$

表 1 选取 $p_1=0.6, p_2=0.7$ 时定理 4 的模拟结果

n	w_1	w_2	w_3	w_x	w_y
100	38	30	32	97	68
1 000	418	306	276	1 118	715
10 000	3 921	3 021	3 058	10 508	7 381
100 000	40 044	30 026	29 930	106 854	73 009
1 000 000	400 178	299 112	300 710	1 066 210	726 254
10 000 000	4 000 696	3 000 524	2 998 780	10 669 571	7 287 011

n	a_n	b_n	c_n	$\hat{p}_1$	$\hat{p}_2$
100	25 413	22 378	4 104	0.620 175	0.720 026
1 000	2 939 946	2 503 600	461 054	0.582 229	0.705 982
10 000	284 167 002	245 196 279	44 460 219	0.603 69	0.698 311
100 000	28 696 325 712	24 750 339 360	4 523 250 108	0.599 615	0.699 441
1 000 000	2 861 201 404 080	2 469 514 922 092	451 412 789 340	0.600 273	0.700 569
10 000 000	286 425 243 148 062	247 094 447 949 685	45 151 707 030 248	0.599 916	0.699 965

$$\begin{aligned}
b_n &= 2 \sum_{i=1}^n ((k_i + 1)w_{1i}^{(k_i)}) \sum_{i=1}^n (w_{1i}^{(k_i)}) + \\
&\quad (\sum_{i=1}^n (w_{3i}^{(0)}))^2 + 2 \sum_{i=1}^n (w_{3i}^{(0)}) \sum_{i=1}^n (w_{1i}^{(k_i)}) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n (w_{3i}^{(0)}) \sum_{i=1}^n ((k_i + 1)w_{1i}^{(k_i)}) - \\
&\quad \sum_{i=1}^n (w_{3i}^{(0)}) \sum_{i=1}^n ((k_i + 1)w_{2i}^{(k_i)}) + \\
&\quad \sum_{i=1}^n (k_i w_{2i}^{(k_i)}) \sum_{i=1}^n (k_i + 1)w_{1i}^{(k_i)} + \\
&\quad \sum_{i=1}^n ((k_i + 1)w_{2i}^{(k_i)}) \sum_{i=1}^n (w_{1i}^{(k_i)}), \\
c_n &= \sum_{i=1}^n (w_{3i}^{(0)}) \sum_{i=1}^n (w_{1i}^{(k_i)}) + (\sum_{i=1}^n (w_{1i}^{(k_i)}))^2 + \\
&\quad \sum_{i=1}^n (k_i w_{2i}^{(k_i)}) \sum_{i=1}^n (w_{1i}^{(k_i)}),
\end{aligned}$$

由

$$a_n p_1^2 - b_n p_1 + c_n = 0, \text{ 得:}$$

$$\hat{p}_1 = \frac{b_n \pm \sqrt{b_n^2 - 4a_n c_n}}{2a_n}, \text{ 代入得:}$$

$$\begin{aligned}
\hat{p}_2 &= 1 - \hat{p}_1 + \frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1) \sum_{i=1}^n (w_{3i}^{(0)})}{\hat{p}_1 \sum_{i=1}^n ((k_i + 1)w_{1i}^{(k_i)}) - \sum_{i=1}^n (w_{1i}^{(k_i)})}.
\end{aligned}$$

由上述二元几何分布随机变量的计算机生成方法, 得 a_n, b_n, c_n . 由此得 $\hat{p}_1, \hat{p}_2$; 进而得至多一

个元件有效的系统可靠度估计为:

$$\hat{p} = 2 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2.$$

选取 $p_1 = 0.6, p_2 = 0.7$, 由表 1 得模拟值为:

$$\hat{p}_1 = 0.599\ 916, \hat{p}_2 = 0.699\ 965,$$

$$\hat{p} = 2 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0.700\ 119.$$

其中

$$w_1 = \sum_{i=1}^n (w_{1i}^{(k_i)}), \quad w_2 = \sum_{i=1}^n (w_{2i}^{(k_i)}),$$

$$w_3 = \sum_{i=1}^n (w_{3i}^{(0)}), \quad w_x = \sum_{i=1}^n ((k_i + 1)w_{1i}^{(k_i)}),$$

$$w_y = \sum_{i=1}^n ((k_i + 1)w_{2i}^{(k_i)}),$$

$$a_n = (w_x + w_3)(w_x + w_y + w_3),$$

$$b_n = w_1(w_x + w_y + w_3) + (w_x + w_3) \cdot$$

$$(w_1 + w_y + w_3) - w_2 w_x,$$

$$c_n = w_1(w_1 + w_y + w_3 - w_2),$$

$$\hat{p}_1 = \frac{b_n + \sqrt{b_n^2 - 4a_n c_n}}{2a_n},$$

$$\hat{p}_2 = 1 - \hat{p}_1 + \frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)w_3}{\hat{p}_1 w_x - w_1}.$$

4 二元几何分布的多元推广

定义 2 称 (X, Y, Z) 服从类似于满意度市场调查三元二点分布的三元几何分布, 是指 (X, Y, Z) 有如下的三元几何分布:

$$\begin{aligned}
P(X=0, Y=0, Z=0) &= p_1 + p_2 + p_3 - 1, \\
P(X=k, Y=0, Z=0) &= (1-p_1)^k p_1, k=1, 2, \dots, \\
P(X=0, Y=k, Z=0) &= (1-p_2)^k p_2, k=1, 2, \dots, \\
P(X=0, Y=0, Z=k) &= (1-p_3)^k p_3, k=1, 2, \dots, \\
0 \leq p_1 \leq 1, \quad 0 \leq p_2 \leq 1, \quad 0 \leq p_3 \leq 1, \\
p_1 + p_2 + p_3 &> 1,
\end{aligned}$$

记作 $(X, Y, Z) \sim TGD(p_1, p_2, p_3)$.

类似地, 可定义 m 元几何分布, 记作

$$(X_1, X_2, \dots, X_m) \sim MGD(p_1, p_2, \dots, p_m).$$

参考文献:

- [1] SUN K, BASU A P. A characterization of a bivariate geometric distribution[J]. Statist Probab Lett, 1995, 23: 307-311.
- [2] BASU A P, DHAR S K. Bivariate geometric distribution [J]. J Appl Statist Sci, 1995, 2:33-44.
- [3] 顾蓓青, 王蓉华, 徐晓岭. 离散二元几何分布串联系统的参数估计[J]. 数理统计与管理, 2009, 28(3):428-435.
- [4] MARSHALL A W, OLKIN I. A multivariate exponential distribution[J]. J Amer Statist Assoc, 1967, 62(1):30-44.
- [5] KRISHNA H, PUNDIR P S. A bivariate geometric distribution with applications to reliability[J]. Communications in Statistics - Theory and Methods, 2009, 38(7):1079-1093.
- [6] DHAR S K. Data analysis with discrete analog of Freund's model[J]. J Appl Statist Sci, 1998, 7:169-183.
- [7] LI J, DHAR S K. Modeling with a bivariate geometric distribution[J]. Communications in Statistics - Theory and Methods, 2013, 42(2):252-266.
- [8] FREUND J E. A bivariate extension of the exponential distribution[J]. J Amer Statist Assoc, 1961, 56:971-977.
- [9] KUNDU D, GUPTA R D. Bivariate generalized exponential distributions[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2009, 100:581-593.
- [10] FRIDAY D S, PATIL G P. A bivariate exponential model with applications to reliability and computer generation of random variables[C]//TSOKOS C P, SHIMI I. Theory and Applications of Reliability, New York: Academic Press, 1977:527-549.
- [11] BASU A P, GHOSH J K. Identifiability of the multinorma and other distributions under competing risks model[J]. Journal of Multivariate Analysis, 1978, 8(3): 413-429.
- [12] 李国安. 二元 Weinman 型指数分布的特征及其应用[J]. 数学研究与评论, 2005, 25(2):337-340.
- [13] 李国安. 二元 Block-Basu 型指数分布的特征及其应用 [J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(10):178-184.
- [14] 李国安, 王立洪. 二元 Proschan-Sullo 型指数分布的特征及其应用[J]. 宁波大学学报(理工版), 2007, 20(4): 468-472.
- [15] 朱翰, 李国安. 二元 Friday-Patil 型指数分布的特征及其应用[J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(3):520-528.
- [16] 李国安. 二元 Freund 型指数分布的特征及参数估计[J]. 大学数学, 2011, 27(5):48-51.
- [17] HANAGAL D D, AHMADI K A. Bayesian estimation of the parameters of bivariate exponential distributions[J]. Communications in Statistics - Simulation and Computation, 2009, 38(7):1391-1413.

A new bivariate geometric distribution and its multivariate extension

LI Guo-an, LI Jian-feng

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: A new bivariate geometric distribution is derived in this paper. Its reliability model is a system of at most one valid. Some properties including identifiability and distributional characteristic as well as parameter estimation of the bivariate geometric distribution are considered. The bivariate geometric distribution is taken as an example to show the method of computer generation of random variables by means of identifiability. Finally, its multivariate extension is provided.

Key words: bivariate geometric distribution; identifiability; distributional characteristic; parameter estimation; computer generation

(责任编辑 史小丽)