

双曲型仿射不变流的最优系统及群不变解

沃维丰¹, 杨淑心¹, 黄 晴²

(1. 宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211; 2. 西北大学 数学学院, 陕西 西安 710217)

摘要: 利用李点对称群理论, 研究了双曲型仿射不变流的对称群, 构造了几何流对应的最优系统, 并利用最优系统对方程进行约化, 讨论了群不变解.

关键词: 双曲型仿射不变曲线流; 李点对称群; 最优系统; 对称约化; 群不变解

中图分类号: O175.27

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2017) 03-0036-06

本文利用不变群理论研究了一个从仿射几何流中推导出的非线性方程的群不变解问题. 关于几何流的群不变解及最优系统的研究, 已有很多结果^[1-4]. 李点对称群方法是研究几何和物理领域中微分方程不变解的基础方法. 为了求解微分方程的群不变解, 首先要确定微分方程的李点对称群及其子群. 因为李群通常包含无穷多个相同维数的子群, 而每个子群会对应一个群不变解. 为了得到所有的群不变解, 需构建最优系统.

本文将研究如下双曲型仿射不变曲线流^[5]:

$$\gamma_u = \bar{N}, \quad (1)$$

其中: γ 是平面曲线; $\bar{N}$ 是其仿射法向量, 它与欧氏单位法向量 $\bar{n}$ 和切向量 $\bar{t}$ 关系为:

$$N = k^{\frac{1}{3}}\bar{n} - \frac{1}{3}k^{-\frac{2}{3}}\bar{t},$$

其中: k 和 s 分别为欧氏曲率和欧氏弧长. 双曲型仿射不变曲线流式(1)对应的非线性方程为:

$$u_{tt} = u_{xt}^2 / u_{xx} + u_{xx}^{\frac{1}{3}}, \quad (2)$$

其中: $(x, u(x, t))$ 表示曲线 γ . 方程(2)由文献[5]得到, 并且该文献证明了曲线流(2)的局部可解性和有限时间爆破等性质.

首先利用 Olver 提出的方法^[6]系统地研究了非线性方程(2), 求解出该方程的对称代数. 接着本文采用 Olver 文中的方法^[6]构建并证明了该方程的一维最优系统, 最后利用最优系统, 求出一些约化方程

和群不变解.

1 方程(2)的李点对称

定理 1 非线性发展方程(2) 的李点对称群的无穷小生成元为:

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial x, v_2 = \partial u, v_3 = -u\partial x + x\partial u, v_4 = u\partial x + x\partial u, \\ v_5 &= x\partial x - u\partial u, t = \partial t, d = x\partial x + u\partial u + (2/3)t\partial t, \\ v_8 &= t\partial x, v_9 = t\partial u. \end{aligned}$$

证明 考虑无穷小生成元

$$X = \xi(x, t, u)\partial x + \tau(x, t, u)\partial t + \eta(x, t, u)\partial u, \quad (3)$$

式(3)的二次延拓为:

$$\begin{aligned} prX^{(2)} &= X + \eta_x^{(1)}\partial u_x + \eta_t^{(1)}\partial u_t + \\ &\quad \eta_{xx}^{(2)}\partial u_{xx} + \eta_{tt}^{(2)}\partial u_{tt} + \eta_{xt}^{(2)}\partial u_{xt}, \end{aligned}$$

其中: 无穷小 $\eta_x^{(1)}$, $\eta_t^{(1)}$, $\eta_{xx}^{(2)}$, $\eta_{tt}^{(2)}$, $\eta_{xt}^{(2)}$ 可由 ξ, τ, η 及其导数表示. 由无穷小标准, 方程(2)允许无穷小生成子式(3)当且仅当

$$prX^{(2)}(\Delta)|_{\Delta=0} = 0, \quad \Delta = u_{xt} - u_{tt}^{\frac{1}{2}}u_{xx}^{\frac{1}{2}} + u_{xx}^{\frac{2}{3}}.$$

整理得确定方程, 即

$$\begin{aligned} \eta_{xt}^{(2)} - \frac{1}{2}u_{xx}^{\frac{1}{2}}u_{tt}^{-\frac{1}{2}}\eta_{tt}^{(2)} + \\ \left(\frac{2}{3}u_{xx}^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}u_{tt}^{\frac{1}{2}}u_{xx}^{-\frac{1}{2}}\right)\eta_{xx}^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

当

$$u_{tt} = u_{xt}^2 / u_{xx} + u_{xx}^{\frac{1}{3}}. \quad (5)$$

将 $\eta_{tt}^{(2)}$, $\eta_{xx}^{(2)}$, $\eta_{xt}^{(2)}$ 代入方程(4), 然后通过方程(5)消去 u_{xt} , 再令所有含 u 的各阶导数项及常数项的系数为零, 得到决定方程组:

$$\begin{aligned}\tau_t - 1/2(\eta_{tt} + \xi_x) &= 0, \\ \tau_x &= \tau_u = 0, \\ \xi_{uu} &= \xi_{xx} = \xi_{tt} = \xi_{xu} = \xi_{xt} = \xi_{ut}, \\ \eta_{uu} &= \eta_{xx} = \eta_{tt} = \eta_{xu} = \eta_{xt} = \eta_{ut},\end{aligned}$$

由方程组解出 ξ , τ , η :

$$\begin{aligned}\xi &= C_1 x + C_2 t + C_3 u + C_4, \\ \tau &= 1/2(C_7 + C_1)t + C_9, \\ \eta &= C_5 x + C_6 t + C_7 u + C_8,\end{aligned}$$

其中: $C_i (i=1, \dots, 9)$ 是任意不相关常数. 这样就得到了方程(2)的九维李点对称群, 它的无穷小生成子即为定理1所列的无穷小生成子.

2 方程(2)的一维最优系统

定理2 方程(2)对称代数的一维最优系统为:

$$\begin{aligned}\{w_1 &= v_1, w_2 = t, w_3 = v_3, w_4 = v_3 + t, \\ w_5 &= v_3 - t, w_6 = d, \\ w_7 &= d + \alpha v_3 (\alpha \neq 0, \pm(1/3)), \\ w_8 &= v_4, w_9 = v_3 - v_4, \\ w_{10} &= v_3 + v_4 + v_1, w_{11} = v_4 + t, \\ w_{13} &= v_3 + v_4 - t, w_{14} = v_3 + v_4 + v_1 + t, \\ w_{15} &= v_3 + v_4 + v_1 - t, \\ w_{16} &= d + v_4, w_{17} = d + v_4 + v_2, \\ w_{18} &= d + \alpha v_4 (\alpha > 0, \alpha \neq 1),\end{aligned}$$

$$w_{19} = v_3 + v_4 + d\}.$$

证明 由文献[6]对称李代数算子(3)中每一个 v_i 都生成一个伴随表达式 $Ad(\exp(\varepsilon v_i))$, 其定义为:

$$\begin{aligned}Ad(\exp(\varepsilon v_i))v_j &= v_j - \varepsilon[v_i, v_j] + \\ &\varepsilon/2![v_i, [v_i, v_j]] - \dots,\end{aligned}$$

其中运用李括号运算 $[v_i, v_j] = v_i v_j - v_j v_i$ (表1), 伴随作用的结果见表2.

设 $V = \sum_{i=1, i \neq 6, 7}^9 a_i v_i + a_6 t + a_7 d$ 是方程(2)的李代数的一般向量, a_i 是不全为零的任意常数. 首先对于适当的 ε , 伴随表示 $Ad(\exp(\varepsilon v_3))$ 作用在 V 上可以将 v_4 和 v_5 相互旋转. 因此, 在下面讨论中, 不妨设 $a_5 = 0$. 所以有:

$$V = \sum_{i=1, i \neq 5, 6, 7}^9 a_i v_i + a_6 t + a_7 d,$$

把 $Ad(\exp(\varepsilon v_3))$ 作用在该向量上,

$$Ad(\exp(\varepsilon v_3))V = \sum_{i=1, i \neq 5, 6, 7}^9 \tilde{a}_i v_i + \tilde{a}_6 t + \tilde{a}_7 d,$$

令

$$\begin{cases} \tilde{a}_3 = a_3 \frac{e^{2\varepsilon} + e^{-2\varepsilon}}{2} - a_4 \frac{e^{2\varepsilon} - e^{-2\varepsilon}}{2} = 0, \\ \tilde{a}_4 = a_4 \frac{e^{2\varepsilon} + e^{-2\varepsilon}}{2} - a_3 \frac{e^{2\varepsilon} - e^{-2\varepsilon}}{2} = 0, \end{cases}$$

得到:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{a_4^2 - a_3^2}}{a_3 - a_4}, \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{a_4^2 - a_3^2}}{a_4 - a_3}, a_4^2 > a_3^2,$$

或

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{a_3^2 - a_4^2}}{a_3 - a_4}, \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{a_3^2 - a_4^2}}{a_4 - a_3}, a_3^2 > a_4^2.$$

表1 李括号运算

Ad	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	t	d	v_8	v_9
v_1	0	0	v_2	v_2	v_1	0	v_1	0	0
v_2	0	0	$-v_1$	v_1	$-v_2$	0	v_2	0	0
v_3	$-v_2$	v_1	0	$2v_5$	$-2v_4$	0	0	$-v_9$	v_8
v_4	$-v_2$	$-v_1$	$-2v_5$	0	$-2v_3$	0	0	$-v_9$	$-v_8$
v_5	$-v_1$	v_2	$2v_4$	$2v_3$	0	0	0	$-v_8$	$v_9/3$
t	0	0	0	0	0	0	$2t/3$	v_1	v_2
d	$-v_1$	$-v_2$	0	0	0	$-2t/3$	0	$-v_8/3$	$v_9/3$
v_8	0	0	v_9	v_9	v_8	$-v_1$	$v_8/3$	0	0
v_9	0	0	$-v_8$	v_8	$-v_9$	$-v_2$	$-v_9/3$	0	0

表 2 方程(2)的对称李代数的伴随作用

Ad	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	t	d	v_8	v_9
v_1	v_1	v_2	$v_3 - \varepsilon v_2$	$v_4 - \varepsilon v_2$	$v_5 - \varepsilon v_1$	t	$d - \varepsilon v_1$	v_8	v_9
v_2	v_1	v_2	$v_3 + \varepsilon v_1$	$v_4 - \varepsilon v_1$	$v_5 + \varepsilon v_2$	t	$d - \varepsilon v_2$	v_8	v_9
v_3	$v_1 \cosh \varepsilon + v_2 \sinh \varepsilon$	$v_2 \cosh \varepsilon - v_1 \sinh \varepsilon$	v_3	$v_4 \cos 2\varepsilon - v_5 \sin 2\varepsilon$	$v_5 \cos 2\varepsilon + v_4 \sin 2\varepsilon$	t	d	$v_8 \cosh \varepsilon + v_9 \sinh \varepsilon$	$v_9 \cosh \varepsilon - v_8 \sinh \varepsilon$
v_4	$v_1 \cosh \varepsilon + v_2 \sinh \varepsilon$	$v_2 \cosh \varepsilon + v_1 \sinh \varepsilon$	$v_3 \cosh 2\varepsilon + v_5 \sinh 2\varepsilon$	v_4	$v_5 \cosh 2\varepsilon + v_3 \sinh 2\varepsilon$	t	d	$v_8 \cosh \varepsilon + v_9 \sinh \varepsilon$	$v_9 \cosh \varepsilon + v_8 \sinh \varepsilon$
v_5	$e^\varepsilon v_1$	$e - \varepsilon v_2$	$v_3 \cosh 2\varepsilon - v_4 \sinh 2\varepsilon$	$v_4 \cosh 2\varepsilon - v_3 \sinh 2\varepsilon$	v_5	t	d	$e^\varepsilon v_8$	$e^\varepsilon v_9$
t	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	t	$d - 2\varepsilon t/3$	$v_8 - \varepsilon v_1$	$v_9 - \varepsilon v_2$
d	$e^\varepsilon v_1$	$e^\varepsilon v_2$	v_3	v_4	v_5	$e^{2\varepsilon/3} t$	d	$e^{\varepsilon/3} v_8$	$e^{\varepsilon/3} v_9$
v_8	v_1	v_2	$v_3 - \varepsilon v_9$	$v_4 - \varepsilon v_9$	$v_5 - \varepsilon v_8$	$t + \varepsilon v_1$	$d - \varepsilon v_8/3$	v_8	v_9
v_9	v_1	v_2	$v_3 + \varepsilon v_8$	$v_4 - \varepsilon v_8$	$v_5 + \varepsilon v_9$	$t + \varepsilon v_2$	$d + \varepsilon v_9/3$	v_8	v_9

现在来证明非零的 V 所张成的空间必然等价于某个或某些 w_i 所张成的. 分别考虑以下 3 种情形:

情形 1 $a_3^2 > a_4^2$ 或者 $a_3 = a_4 = 0$.

取适当的 ε , 我们用 $Ad(\exp(\varepsilon v_5))$ 消去 v_4 , 即向量 V 被约化为:

$$V = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_6 t + a_7 d + a_8 v_8 + a_9 v_9.$$

(1) 若 $a_7 \neq 0$, 不妨设 $a_7 = 1$, 用 $Ad(\exp(\varepsilon t))$ 消去 t , 则 $V = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + d + a_8 v_8 + a_9 v_9$, 再用 $Ad(\exp(\varepsilon_2 v_2))$ 和 $Ad(\exp(\varepsilon_1 v_1))$ 先后作用其上, 得到新向量:

$$V = \tilde{a}_1 v_1 + \tilde{a}_2 v_2 + \cdots,$$

其中:

$$\tilde{a}_1 = a_1 + a_3 \varepsilon_2 - \varepsilon_1, \quad \tilde{a}_2 = a_2 - \varepsilon_2 - a_3 \varepsilon_1,$$

选取

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1 + a_2 a_3}{1 + a_3^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_2 - a_1 a_3}{1 + a_3^2},$$

那么 $V = a_3 v_3 + d + a_8 v_8 + a_9 v_9$. 因为 $Ad(\exp(\varepsilon v_3))$ 可以旋转 v_8 和 v_9 , 所以不妨设 $a_8 = 0$. 再用 $Ad(\exp(\varepsilon d))$ 作用其上消去 v_9 , 这样 V 等价于 $d \pm v_9 + a_3 v_3$ 或 $d + a_3 v_3$.

当 $V = d \pm v_9 + a_3 v_3$, 用

$$Ad(\exp(\varepsilon_4 v_9)) Ad(\exp(\varepsilon_3 v_8))$$

作用在该向量上, 则 $V = d + a_3 v_3 + \tilde{a}_8 v_8 + \tilde{a}_9 v_9$.

令

$$\begin{cases} \tilde{a}_8 = a_3 \varepsilon_4 - \varepsilon_3 / 3 = 0, \\ \tilde{a}_9 = \pm 1 - a_3 \varepsilon_3 + \varepsilon_4 / 3 = 0, \end{cases}$$

得到:

$$\varepsilon_4 = \frac{\pm 3}{9a_3^2 - 1}, \quad \varepsilon_3 = 3a_3 v_4.$$

若 $a_3 \neq \pm(1/3)$, 令 $\tilde{a}_8 = \tilde{a}_9 = 0$, 那么有 $V = d + a_3 v_3$. 若 $a_3 = \pm(1/3)$, 那么 $V = d + v_9 \pm (1/3)v_3$ (或 $d - v_9 \pm (1/3)v_3$).

当 $V = d + a_3 v_3$ 时, 如果 $a_3 = 0$, 那么 $V = d$; 如果 $a_3 \neq 0$, 那么 $V = d + a_3 v_3$.

(2) 当 $a_7 = 0$, 则

$$V = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_6 t + a_8 v_8 + a_9 v_9.$$

若 $a_3 \neq 0$, 用 $Ad(\exp(\varepsilon_1 v_1))$, $Ad(\exp(\varepsilon_2 v_2))$, $Ad(\exp(\varepsilon_3 v_8))$, $Ad(\exp(\varepsilon_4 v_9))$ 先后作用在向量 V 上, 得到新向量:

$$V = \tilde{a}_1 v_1 + \tilde{a}_2 v_2 + a_3 v_3 + a_6 t + \tilde{a}_8 v_8 + \tilde{a}_9 v_9.$$

令

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 = a_1 + a_3 \varepsilon_2 + a_6 \varepsilon_3 = 0, \\ \tilde{a}_2 = a_2 - a_3 \varepsilon_1 + a_6 \varepsilon_4 = 0, \\ \tilde{a}_8 = a_8 + a_3 \varepsilon_4 = 0, \\ \tilde{a}_9 = a_9 - a_3 \varepsilon_3 = 0, \end{cases}$$

得到:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_2 a_3 - a_6 a_8}{a_3^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{-(a_1 a_3 + a_6 a_9)}{a_3^2},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_9}{a_3}, \quad \varepsilon_4 = -\frac{a_8}{a_3}.$$

再用 $Ad(\exp(\varepsilon d))$ 作用在 V 上, 这样 V 就等价于 $v_3 \pm t$ 或 v_3 .

若 $a_3 = 0$, 则 $V = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_6 t + a_8 v_8 + a_9 v_9$.

(i) 当 $a_6 \neq 0$, 用 $Ad(\exp(\varepsilon_1 v_8))$ 消去 v_1 , 再用 $Ad(\exp(\varepsilon_2 v_9))$ 消去 v_2 , 那么 $V = t + a_8 v_8 + a_9 v_9$.

如果 $a_8^2 + a_9^2 \neq 0$, 由于 $Ad(\exp(\varepsilon v_3))$ 可以旋转 v_8 和 v_9 , 所以不妨设 $a_9 = 0$, 那么

$$V = t + a_8 v_8 \quad (a_8 \neq 0),$$

再用 $Ad(\exp(\varepsilon v_5))$ 作用, 向量 V 等价于 $t + v_8$ (或 $t - v_8$). 如果 $a_8^2 + a_9^2 = 0$, 则 $V = t$.

(ii) 当 $a_6 = 0$ 时, 则 $V = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_8 v_8 + a_9 v_9$.

如果 $a_8^2 + a_9^2 \neq 0$, 由于 $Ad(\exp(\varepsilon v_3))$ 可以旋转 v_8 和 v_9 , 所以不妨设 $a_9 = 0$, 那么

$$V = v_8 + a_1 v_1 + a_2 v_2,$$

然后先用 $Ad(\exp(\varepsilon t))$ 消去 v_1 , 再用 $Ad(\exp(\varepsilon v_5))$ 作用在向量上, V 就等价于 $v_8 + v_2$ 或 $v_8 - v_2$ 或 v_8 .

如果 $a_8^2 + a_9^2 = 0$, 则

$$V = a_1 v_1 + a_2 v_2 \quad (a_1^2 + a_2^2 \neq 0),$$

用 $Ad(\exp(\varepsilon v_3))$ 做旋转, 那么 V 等价于 v_1 .

情形 2 $a_3^2 < a_4^2 \quad (a_4 \neq 0)$.

我们选合适的 ε , 用 $Ad(\exp(\varepsilon v_5))$ 去消去 v_3 , 那么 $V = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_4 v_4 + a_6 t + a_7 d + a_8 v_8 + a_9 v_9$.

(1) 当 $a_7 = 0$ 时, 我们用 $Ad(\exp(\varepsilon_1 v_1))$ 消去 v_2 , 用 $Ad(\exp(\varepsilon_2 v_2))$ 消去 v_1 , 那么

$$V = v_4 + a_6 t + a_8 v_8 + a_9 v_9,$$

再在 $Ad(\exp(\varepsilon d))$ 作用下, V 等价于

$$v_4 + t + a_8 v_8 + a_9 v_9 \text{ 或者}$$

$$v_4 - t + a_8 v_8 + a_9 v_9 \text{ 或者}$$

$$v_4 + a_8 v_8 + a_9 v_9.$$

由于在 $Ad(\exp((\pi/2)v_3))$ 作用下, $v_4 + t + a_8 v_8 + a_9 v_9$ 可以转化为 $v_4 - t + a_8 v_8 + a_9 v_9$, 所以 V 等价于 $v_4 + t + a_8 v_8 + a_9 v_9$ 或者 $v_4 + a_8 v_8 + a_9 v_9$.

如果 $V = v_4 + a_8 v_8 + a_9 v_9$, 用 $Ad(\exp(\varepsilon_1 v_8))$ 消去 v_9 , $Ad(\exp(\varepsilon_2 v_9))$ 消去 v_8 , V 就转变成 v_4 .

如果 $V = v_4 + t + a_8 v_8 + a_9 v_9$, 用 $Ad(\exp(\varepsilon_1 v_8))$ 消去 v_9 , $Ad(\exp(\varepsilon_2 v_9))$ 消去 v_8 , V 就转变成 $v_4 + t + a_8 v_2 + a_9 v_1$. 然后再用 $Ad(\exp(\varepsilon_3 v_1))$ 消去 v_2 , $Ad(\exp(\varepsilon_4 v_2))$ 消去 v_1 , 所以 $V = v_4 + t$.

(2) 当 $a_7 \neq 0$ 时, $Ad(\exp((\pi/2)v_3))$ 可以改变 a_4 的符号, 所以不妨设 $a_7 = 1, a_4 > 0$, 即

$$V = d + a_4 v_4 + a_1 v_1 + a_2 v_2 +$$

$$a_6 t + a_8 v_8 + a_9 v_9 \quad (a_4 > 0).$$

用 $Ad(\exp(\varepsilon t))$ 消去 t , 有:

$$V = d + a_4 v_4 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_8 v_8 + a_9 v_9,$$

然后

$$Ad(\exp(\varepsilon_2 v_9)) Ad(\exp(\varepsilon_1 v_8)) V = d +$$

$$a_4 v_4 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \tilde{a}_8 v_8 + \tilde{a}_9 v_9,$$

令

$$\begin{cases} \tilde{a}_8 = a_8 - \varepsilon_1 / 3 - a_4 \varepsilon_2 = 0, \\ \tilde{a}_9 = a_9 + \varepsilon_2 / 3 - a_4 \varepsilon_1 = 0, \end{cases}$$

得到:

$$\varepsilon_1 = \frac{3(a_8 + 3a_4 a_9)}{9a_4^2 + 1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{3(3a_4 a_8 - a_9)}{9a_4^2 + 1}.$$

用上面的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 消去 v_8, v_9 , 那么

$$V = d + a_4 v_4 + a_1 v_1 + a_2 v_2.$$

然后

$$Ad(\exp(\varepsilon_2 v_2)) Ad(\exp(\varepsilon_1 v_1)) V =$$

$$d + a_4 v_4 + \tilde{a}_1 v_1 + \tilde{a}_2 v_2,$$

令

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 = a_1 - \varepsilon_1 - a_4 \varepsilon_2 = 0, \\ \tilde{a}_2 = a_2 - \varepsilon_2 - a_4 \varepsilon_1 = 0, \end{cases}$$

得到:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_4 a_2 - a_1}{a_4^2 - 1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_4 a_1 - a_2}{a_4^2 - 1}.$$

(i) 若 $a_4 \neq 1$, 取 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 使得 V 等价于:

$$V = d + a_4 v_4 \quad (a_4 > 0, a_4 \neq 1).$$

(ii) 若 $a_4 = 1$, 令 $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = a_1$ 使得:

$$V = d + v_4 + \tilde{a}_2 v_2,$$

再用 $Ad(\exp(\varepsilon d))$ 单位化, 那么 V 就等价于:

$$d + v_4 + v_2 \text{ (或 } d + v_4 - v_2 \text{) 或 } d + v_4.$$

情形 3 当 $a_3^2 = a_4^2 > 0$.

假设 $a_3 = a_4 = 1$, 用 $Ad(\exp(\varepsilon v_3))$ 作用, 有:

$$V = v_3 + v_4 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_6 t + a_7 d + a_8 v_8 + a_9 v_9,$$

再用 $Ad(\exp(\varepsilon_2 v_2)) Ad(\exp(\varepsilon_1 v_1))$ 作用在 V 上, 使得:

$$V = v_3 + v_4 + \tilde{a}_1 v_1 + \tilde{a}_2 v_2 + a_6 t + a_7 d + a_8 v_8 + a_9 v_9,$$

令

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 = a_1 - a_7 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_2 = 0, \\ \tilde{a}_2 = a_2 - a_7 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_1 = 0, \end{cases}$$

可得:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1}{a_7}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_2 - 2\varepsilon_1}{a_7}.$$

(1) 当 $a_7 \neq 0$ 时, 用 $Ad(\exp(\varepsilon t))$ 使 t 消失, 使得:

$$V = a_1 v_1 + a_2 v_2 + v_3 + v_4 + a_7 d + a_8 v_8 + a_9 v_9,$$

取 ε_1 和 ε_2 使 v_1, v_2 消失, 那么

$$V = v_3 + v_4 + a_7 d + a_8 v_8 + a_9 v_9.$$

然后用 $Ad(\exp(\varepsilon_1 v_8))$, $Ad(\exp(\varepsilon_2 v_9))$ 先后作用其上, 得到新向量:

$$V = v_3 + v_4 + a_7 d + \tilde{a}_8 v_8 + \tilde{a}_9 v_9,$$

令

$$\begin{cases} \tilde{a}_8 = a_8 - (a_7/3)\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_2 = 0, \\ \tilde{a}_9 = a_9 - \varepsilon_1 - \varepsilon_1 - (a_7/3)\varepsilon_2 = 0, \end{cases}$$

得到:

$$\varepsilon_1 = \frac{3a_8}{a_7}, \quad \varepsilon_2 = \frac{-3(a_9 - 2\varepsilon_1)}{a_7}.$$

用上述 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 使 v_8 和 v_9 消失, 那么

$$V = v_3 + v_4 + a_7 d,$$

再用 $Ad(\exp(\varepsilon_3 v_5))$ 作用在 V 上, 得到:

$$V = e^{-2\varepsilon_3} v_3 + e^{-2\varepsilon_3} v_4 + a_7 d,$$

然后取适当的 ε , 使 V 等价于 $v_3 + v_4 + d$ 或

$$v_3 + v_4 - d.$$

(2) 当 $a_7 = 0$ 时,

$$V = a_1 v_1 + a_2 v_2 + v_3 + v_4 + a_6 t + a_8 v_8 + a_9 v_9,$$

用 $Ad(\exp(\varepsilon v_8))$ 消去 v_9 , 再用 $Ad(\exp(\varepsilon v_1))$ 消去 v_2 , 使得:

$$V = a_1 v_1 + v_3 + v_4 + a_6 t + a_8 v_8.$$

若 $a_8 \neq 0$, 用 $Ad(\exp(\varepsilon t))$ 消去 v_1 , 再用 $Ad(\exp(\varepsilon d))$ 单位化, 使得 $V = v_3 + v_4 + a_6 t + v_8$ 或 $V = v_3 + v_4 + a_6 t - v_8$, 两者可以用 $Ad(\exp(\pi v_3))$ 相互转化. 如果 $a_6 = 0$, $V = v_3 + v_4 + v_8$; 如果 $a_6 \neq 0$, 我们先做直接运算:

$$Ad(\exp(\varepsilon_1 v_5))V = e^{-2\varepsilon_1} v_3 + e^{-2\varepsilon_1} v_4 + e^{\varepsilon_1} v_8 + a_6 t,$$

$$Ad(\exp(\varepsilon_2 d))Ad(\exp(\varepsilon_1 v_5))V =$$

$$e^{-2\varepsilon_1} v_3 + e^{-2\varepsilon_1} v_4 + e^{\varepsilon_1} e^{\frac{\varepsilon_2}{3}} v_8 + e^{\frac{2\varepsilon_2}{3}} a_6 t.$$

令

$$\begin{cases} e^{-2\varepsilon_1} = e^{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{3}}, \\ e^{-2\varepsilon_1} = e^{\frac{2\varepsilon_2}{3}} |a_6|, \end{cases}$$

得到 $\varepsilon_1 = 1/4 \ln |a_6|$, $\varepsilon_2 = -9/4 \ln |a_6|$. 那么 $\tilde{a}_3 = \tilde{a}_4 = \tilde{a}_8 = |\tilde{a}_6| = 1$, 通过单位化, 使得 V 等价于 $v_3 + v_4 + v_8 + t$ 或 $v_3 + v_4 + v_8 - t$.

若 $a_8 = 0$, 这时 $V = v_3 + v_4 + a_1 v_1 + a_6 t$. 用 $Ad(\exp(\varepsilon t))$ 作用, 使得 $V = v_3 + v_4 + v_1 + a_6 t$ (或 $v_3 + v_4 - v_1 + a_6 t$) 或者 $v_3 + v_4 + a_6 t$, 其中 $v_3 + v_4 +$

$v_1 + a_6 t$ 可通过 $Ad(\exp(\pi v_3))$ 转化为 $v_3 + v_4 - v_1 + a_6 t$. 如果 $V = v_3 + v_4 + a_6 t$, 通过 $Ad(\exp(\varepsilon d))$ 作用, V 等价于 $v_3 + v_4 + t$ 或 $v_3 + v_4 - t$ 或 $v_3 + v_4$ (或 $v_3 - v_4$). 如果 $V = v_3 + v_4 + v_1 + a_6 t$.

(i) 当 $a_6 = 0$, 那么 $V = v_3 + v_4 + v_1$.

(ii) 当 $a_6 \neq 0$, 我们先做直接运算:

$$Ad(\exp(\varepsilon_1 v_5))V = e^{-2\varepsilon_1} v_3 + e^{-2\varepsilon_1} v_4 + e^{\varepsilon_1} v_1 + a_6 t,$$

$$Ad(\exp(\varepsilon_2 d))Ad(\exp(\varepsilon_1 v_5))V =$$

$$e^{-2\varepsilon_1} v_3 + e^{-2\varepsilon_1} v_4 + e^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} v_1 + e^{\frac{2\varepsilon_2}{3}} a_6 t,$$

令

$$\begin{cases} e^{-2\varepsilon_1} = e^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} e^{-2\varepsilon_1} = e^{\frac{2\varepsilon_2}{3}} |a_6|, \end{cases} \quad (7)$$

由式(6)得出 $\varepsilon_2 = -3\varepsilon_1$, 代入式(7)得 $|a_6| = 1$. 所以 $V = v_3 + v_4 + v_1 + a_6 t$ ($a_6 \neq 0$) 不能再进一步约化. 这样就证明了方程(2)的任意一维子空间等价于 $w_1, \dots, w_{20}$ 所张成的某个子空间.

3 方程(2)的对称约化和群不变解

得到最优系统之后, 可以把原偏微分方程(2)化为常微分方程. 下面以 w_{17} 为例.

3.1 w_{17} 情形

首先求解 w_{17} 对应的不变量 y, v . 为求不变量, 我们解 w_{17} 相应的特征方程. w_{17} 的特征方程为:

$$\frac{dx}{x+u} = \frac{dt}{(2/3)t} = \frac{du}{x+u}, \quad (8)$$

解式(8), 得到 w_{17} 的 2 个群不变量:

$$y = u - x, \quad v = t^{-3}(u + x), \quad (9)$$

从不变量(9)得到原方程(2)的不变解具有下面形式:

$$u = t^3 v(y) - x, \quad (10)$$

由式(10)计算出 u 关于 x, t 的各阶导数:

$$u_{xx} = \frac{-4t^3 v_{yy}}{(t^3 v_y - 1)^3},$$

$$u_{tt} = \frac{6tv + 6t^4 v v_y - 12t^7 v v_y^2 + 9t^7 v^2 v_{yy}}{(1 - t^3 v_y)^3},$$

$$u_{xt} = \frac{6(t^2 v_y - t^5 v_y^2 + t^5 v v_{yy})}{(t^3 v_y - 1)^3},$$

把以上结果代入方程(2), 得到以下常微分方程:

$$36v_y^2 + (4v_{yy})^{\frac{4}{3}} = 1.$$

3.2 其余情形

其余情形的不变解或约化方程见表 3, 其中'表示单变量函数对其自变量的导数.

表 3 非平凡群不变解及其约化方程

情形	不变量	不变解(或约化方程)
w_1	$y=t, v=u$	$v=C_1y+C_2$
w_2	$y=x, v=u$	$v=C_1y+C_2$
w_3	$y=t, v=u^2+x^2$	$v_y^2-2vv_{yy}-4v^{4/3}=0$
w_6	$y=xt^{-3/2}, v=u/x$	$(vy)^{1/3}+y^2v_y=0$
w_8	$y=t, v=u^2+x^2$	$v_y^2-2vv_{yy}+4v^{4/3}=0$
w_9	$y=t, v=u$	$v=C_1y+C_2$
w_{10}	$y=t, v=u-x^2$	$v=2^{-2/3}y^2+C_1y+C_2$
w_{12}	$y=x, v=u-2xt$	$v=y^2+C_1y+C_2$
w_{13}	$y=x, v=u+2xt$	$v=y^2+C_1y+C_2$
w_{14}	$y=t-x, v=u-x^2$	$v_{yy}=+(v_{yy}+2)^{1/3}$
w_{15}	$y=t+x, v=u-x^2$	$v_{yy}=+(v_{yy}+2)^{1/3}$
w_{16}	$y=u-x, v=t^3(u+x)$	$36v_y^2+(4v_{yy})^{4/3}=1$
w_{19}	$y=xt^{-3/2}, v=-2\ln x+u/x$	$9h^{-1}-y+h^{1/3}+y^2v_y=0$
		其中 $h=2y^{-1}+2v_y+vv_{yy}$

参考文献:

- [1] CHOU K S, ZHU X P. The Curve Shortening Problem [M]. Boca Raton FL: Chapman & Hall/CRC, 2001:1-68.
- [2] QU C Z, HUANG Q. Symmetry reductions and exact solutions of the affine heat equation[J]. J Math Anal Appl, 2008, 346:521-530.
- [3] DONG Z Z, CHEN Y, KONG D X. Symmetry reduction and exact solutions of a hyperbolic Monge-Ampere equation[J]. Chinese Annals of Mathematics, 2012, 33B(2): 309-316.
- [4] CHOU K S, LI G X. Optimal systems and invariant solutions for the curve shortening problem[J]. Communications in Analysis & Geometry, 2002, 10(2):241-274.
- [5] WO W F, MA F Y, QU C Z. A hyperbolic-type affine invariant curve flow[J]. Communications in Analysis & Geometry, 2014, 22(2):219-245.
- [6] OLVER P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. New York: Springer, 1998:75-238.

Optimal system and group invariant solutions of a hyperbolic-type affine invariant flow

WO Wei-feng¹, YANG Shu-xin¹, HUANG Qing²

(1.Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2.School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: Based on the classical symmetry method, the group invariant solutions of a hyperbolic-type affine invariant curve flow are investigated. The symmetry group is studied and its one-dimensional optimal system is determined. A corresponding optimal system is found and some group invariant solutions associated with the reduced equation are also obtained.

Key words: a hyperbolic-type affine invariant curve flow; Lie group of symmetry; optimal system; symmetry reduction; group-invariant solutions

(责任编辑 史小丽)