

# 考虑再维修的备件库存控制及设备维修策略

郑立俊<sup>1</sup>, 郑长征<sup>2</sup>, 徐嗣桢<sup>1\*</sup>

(1. 宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211; 2. 中国电子信息产业发展研究院, 北京 100846)

**摘要:** 针对单纯采取库存分配的设备维修策略大幅降低低级别设备保障率的不足, 面向被延期维修的故障设备再维修, 提出备件库存控制策略和设备维修集成策略. 通过构建动态规划模型, 得出最优备件订货策略、故障设备即时维修策略、等待维修的故障设备再维修策略及相应的库存控制临界点. 算例表明, 相比单纯的库存分配策略和不考虑故障设备级别的维修策略, 该策略能明显减少设备维修费用, 且提高低级别设备保障率和总的保障率.

**关键词:** 随机故障; 设备维修策略; 备件库存管理; 再维修

中图分类号: F274

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2017) 04-0082-06

设备维修是企业生产经营活动的一个重要环节. Gu等<sup>[1]</sup>指出飞机的维修费用约占总运营成本的13%, 并研究了单一零部件随机发生故障情形下其备件的最优订货量. 备件的库存管理策略直接决定了设备的维修策略, 维修策略也要求备件库存管理策略与之相配套衔接. 1968年, Falkner<sup>[2]</sup>提出了备件库存管理和维修策略的联合策略后, 备件采购、库存管理和设备维修策略联合决策方法一直是企业和学界关注的重点<sup>[3-7]</sup>. 郑长征等<sup>[8]</sup>考虑了生命周期服从指数分布的备件库存管理与设备维修问题, 根据设备的重要性区分设备等级, 给出了考虑周期性检查策略( $T, Q$ )和关键点控制的维修策略的联合决策模型, 未被立即维修的设备统一延期到下一次备件订单到达后再予维修. 该策略通过将库存备件在不同级别故障设备之间的合理分配来提高高级别设备的保障率, 从而降低了设备维护成本, 但造成了低级别设备的保障率和总保障率下降. 本文针对单纯采用库存分配的设备维修策略(Rationing Only Policy, RO)造成低级别设备保障率和总保障率低的缺陷, 在文献<sup>[8]</sup>基础上, 提出了考虑等待修理故障设备差异化的再维修策略(Rationing with Re-service Policy, RRS), 即未被立即维修的设备故障可以重新考虑在本次备件订

货周期内得到维修. 再维修策略加大了模型求解的难度. 通过构建动态规划模型, 得出不同级别设备故障的维修策略和等待维修的故障设备的再维修策略, 并给出期初备件订货策略, 为企业维护设备提供理论支持和决策参考.

## 1 模型的建立

### 1.1 模型假设和符号说明

本文仅研究高、低两个级别设备故障的维修策略, 且假设备件不会折损. 设 $h$ 为单位备件库存持有成本,  $\omega$ 为单位备件采购成本,  $b_i$ 为 $i$ 级别( $i=1, 2$ 分别表示高、低级别)设备发生故障时未即时维修造成的停工单位时间成本, 且 $b_1 > b_2$ . 设固定订货周期 $T$ . 将 $T$ 分成 $n$ 个足够小的时间单位 $\Delta t$ , 使得在 $\Delta t$ 内最多只有一台设备发生故障, 且最多只能用备件维修一台故障设备. 假设设备随机发生故障, 且在 $\Delta t$ 内有一台级别 $i$ 设备发生故障的概率为 $\lambda_i \Delta t$ . 定义 $(t, x, \bar{m}_t)$ 为维修状态, 其中 $t$ 为当前时刻到备件订货周期末所剩的时间( $t=1, 2, \dots, n$ ,  $t=1$ 表示期末,  $t=n$ 为期初),  $x$ 为备件现有库存水平,  $\bar{m}_t = \{m_1, m_2\}$ 为 $t$ 时刻等待维修的故障设备的数量向量,  $m_i$ 为等待维修的 $i$ 级别故障设备数.  $t=0$ 表示维修期结束时刻, 此时未维修的故障设

收稿日期: 2016-08-15.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11101441); 浙江省自然科学基金(LQ13A010020).

第一作者: 郑立俊(1991-), 男, 安徽黄山人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 应用数学. E-mail: 1411071480@nbu.edu.cn

\*通信作者: 徐嗣桢(1982-), 女, 浙江温州人, 博士, 主要研究方向: 随机分析. E-mail: xusiyuan@nbu.edu.cn

备可用下一周期新到备件一次性维修. 定义

$$y_i(t, x, \bar{m}_t) = \begin{cases} 1, \text{状态}(t, x, \bar{m}_t) \text{下为} i \text{级别新发生} \\ \quad \text{故障设备提供即时维修, (1)} \\ 0, \text{否则.} \end{cases}$$

$$z(t, x, \bar{m}_t) = \begin{cases} 1, \text{状态}(t, x, \bar{m}_t) \text{下为等待维修的} \\ \quad \text{设备提供维修, (2)} \\ 0, \text{否则.} \end{cases}$$

在明确状态  $(t, x, \bar{m}_t)$  下, 上述记号分别简记为  $y_i = 0, 1$  和  $z = 0, 1$ . 令  $c_{i, y_i=0}(t, x, \bar{m}_t)$  与  $c_{i, y_i=1}(t, x, \bar{m}_t)$  分别表示  $(t, x, \bar{m}_t)$  状态下  $i$  级别设备发生故障时, 不提供和提供即时维修后, 到期末所需的期望维修费用 (简称期望维修费用). 定义  $c_{3, z=1}(t, x, \bar{m}_t)$  和  $c_{3, z=0}(t, x, \bar{m}_t)$  分别为没有新发生故障时, 维修和不维修等待的故障设备的期望维修费用. 此外, 定义  $C(t, x, \bar{m}_t)$  为状态  $(t, x, \bar{m}_t)$  下的最小期望维修费用.

## 1.2 模型的分析 and 转化

总期望维修费用最小化是维护部门的最终目的. 当  $x > 0$  时最佳的 RRS 维修策略是先修高级别故障设备. 故只要  $x > 0$ , 必有  $m_1 = 0$ . 此时等待维修的故障设备  $\bar{m}_t = (m_1, m_2)$  退化成  $\bar{m}_t = (0, m_2)$ . 下文用  $m_2$  代替  $(0, m_2)$ . 分两种情况对模型进行分析.

### (1) 库存备件 $x = 0$

1) 此时对新发生故障的设备只能延期维修, 即  $y_i(t, 0, \bar{m}_t) = 0$ , 故有

$$c_{1, y_1=0}(t, 0, \bar{m}_t) = (m_1 + 1)b_1\Delta t + m_2b_2\Delta t + C(t-1, 0, \bar{m}_{t-1}), \text{其中 } \bar{m}_{t-1} = (m_1 + 1, m_2); \quad (3)$$

$$c_{2, y_2=0}(t, 0, \bar{m}_t) = m_1b_1\Delta t + (m_2 + 1)b_2\Delta t + C(t-1, 0, \bar{m}_{t-1}), \text{其中 } \bar{m}_{t-1} = (m_1, m_2 + 1). \quad (4)$$

2) 当没有设备发生新故障时, 对等待维修的设备也不能提供再维修服务, 有

$$c_{3, z=0}(t, 0, \bar{m}_t) = m_1b_1\Delta t + m_2b_2\Delta t + C(t-1, 0, \bar{m}_{t-1}), \text{其中 } \bar{m}_{t-1} = (m_1, m_2). \quad (5)$$

由于在  $\Delta t$  内最多只有一台设备发生故障, 且级别  $i$  设备发生故障的概率为  $\lambda_i\Delta t$ , 故没有设备发生故障的概率为  $1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\Delta t$ . 综合(3)~(5)式, 在  $(t, 0, \bar{m}_t)$  状态下, 期望维修费用为

$$C(t, 0, \bar{m}_t) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Delta t c_{i, y_i=0}(t, 0, \bar{m}_t) +$$

$$(1 - \lambda_1\Delta t - \lambda_2\Delta t)c_{3, z=0}(t, 0, \bar{m}_t). \quad (6)$$

### (2) 库存备件 $x > 0$

1) 有新设备发生故障时, 如果是高级别故障, 应提供即时维修, 即  $y_1(t, x, m_2) = 1$ . 有

$$c_{i, y_i=1}(t, x, m_2) = \omega + m_2b_2\Delta t + (x-1)h\Delta t + C(t-1, x-1, m_2), \quad (7)$$

$$c_{2, y_2=0}(t, x, m_2) = (m_2 + 1)b_2\Delta t + xh\Delta t + C(t-1, x, m_2 + 1). \quad (8)$$

2) 没有设备发生故障时, 考虑最多维修一台等待维修的设备, 则

$$c_{3, z=1}(t, x, m_2) = \omega + (m_2 - 1)b_2\Delta t + (x-1)h\Delta t + C(t-1, x-1, m_2 - 1), \quad (9)$$

$$c_{3, z=0}(t, x, m_2) = m_2b_2\Delta t + xh\Delta t + C(t-1, x, m_2). \quad (10)$$

令  $c_i(y_i|t, x, m_2)$  为状态  $(t, x, m_2)$  下处理新发生故障设备  $i$  的期望维修费用,  $c_3(z|t, x, m_2)$  为处理等待维修设备后的期望维修费用. 则

$$c_i(y_i|t, x, m_2) = y_i c_{i, y_i=1}(t, x, m_2) + (1 - y_i) c_{i, y_i=0}(t, x, m_2), \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

$$c_3(z|t, x, m_2) = z c_{3, z=1}(t, x, m_2) + (1 - z) c_{3, z=0}(t, x, m_2). \quad (12)$$

结合(11)(12)可得状态  $(t, x, m_2)$  下期望维修费用为

$$c(y_1, y_2, z|t, x, m_2) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Delta t c_i(y_i|t, x, m_2) + (1 - \lambda_1\Delta t - \lambda_2\Delta t)c_3(z|t, x, m_2). \quad (13)$$

显然, 只有  $x > 0$  时, 才能维修故障设备. 综合 1) 和 2), 以期望维修费用最小化为目标函数构造动态规划模型, 确定最佳的 RRS 设备维修策略  $Y^* = \{y^* : y^* = (y_1^*(t, x, m_2), y_2^*(t, x, m_2)), t \in [1, n]\}$  和等待维修故障的再维修策略  $Z^* = \{z^* : z^* = z^*(t, x, m_2), t \in [1, n]\}$ . 模型如下:

$$C(t, x, m_2) = \min_{y_1, y_2, z} c(y_1, y_2, z|t, x, m_2) \\ y_i = 0 \text{ 或 } 1, i = 1, 2; z = 0 \text{ 或 } 1; x > 0; \\ \text{s.t. } C(t, 0, m_2) := C(t, 0, \{0, m_2\}); \quad (14)$$

$$C(t, 0, \vec{m}_t) = \sum_{i=0}^2 \lambda_i \Delta t c_{i, y_i=0}(t, 0, \vec{m}_t) +$$

$$(1 - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Delta t) c_{3, z=0}(t, 0, \vec{m}_t).$$

在期初, 需要决定最优期初备件水平和最优

订货量, 使得总期望维修费用最小

$$C(T, X^*, 0) = \min_x C(T, x, 0), \text{ s.t. } x > 0. \quad (15)$$

## 2 主要定理和研究结果

由于对设备提供维修只能在  $x > 0$  情形下进行, 此时  $m_1 = 0$ .

记  $\Delta_Y C_i(t, x, m_2)$  和  $\Delta_Z C_3(t, x, m_2)$  分别为  $x > 0$  下对新发生故障的设备  $i$  和等待维修的设备由延期维修改为即时维修所产生的边际维修费用, 即

$$\begin{aligned} \Delta_Y C_1(t, x, m_2) &= c_{1, y_1=1}(t, x, m_2) - c_{1, y_1=0}(t, x, m_2) = \\ &\omega - (b_1 + h)\Delta t + C(t-1, x-1, m_2) - \\ &C(t-1, x, (1, m_2)), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta_Y C_2(t, x, m_2) &= c_{2, y_2=1}(t, x, m_2) - c_{2, y_2=0}(t, x, m_2) = \\ &\omega - (b_2 + h)\Delta t + C(t-1, x-1, m_2) - \\ &C(t-1, x, m_2 + 1), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Delta_Z C_3(t, x, m_2) &= c_{3, z=1}(t, x, m_2) - c_{3, z=0}(t, x, m_2) = \\ &\omega - (b_2 + h)\Delta t + C(t-1, x-1, m_2 - 1) - \\ &C(t-1, x, m_2). \end{aligned} \quad (18)$$

记  $\Delta_X C(t, x, m_2) = C(t, x+1, m_2) - C(t, x, m_2)$  和  $\Delta_M C(t, x, m_2) = C(t, x, m_2+1) - C(t, x, m_2)$  分别为增加一个库存备件和一个等待维修的低级别故障所产生的边际维修费用. 有以下 RRS 维修策略定理.

**定理 1**  $1 \leq t \leq n$  时存在最优备件库存控制点

$$\begin{aligned} x_1^*(t, m_2) &= 1; \\ x_2^*(t, m_2) &= \min\{x \in N^*: \omega - (b_2 + h)\Delta t + C(t-1, \\ &x-1, m_2) - C(t-1, x, m_2+1) \leq 0\}; \\ x_3^*(t, m_2) &= \min\{x \in N^*: \omega - (b_2 + h)\Delta t + C(t-1, \\ &x-1, m_2-1) - C(t-1, x, m_2) \leq 0\}, m_2 > 0; \\ x_3^*(t, m_2) &= +\infty, m_2 = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

使得  $(t, x, m_2)$  状态下 RRS 最优维修策略  $(y_1^*(t, x, m_2), y_2^*(t, x, m_2))$  和再维修策略  $z^*(t, x, m_2)$  如下:

当  $x \geq x_1^*(t, m_2)$  时,  $y_1^*(t, x, m_2) = 1$ ; 否则,  $y_1^*(t, x, m_2) = 0$ ;

当  $x \geq x_3^*(t, m_2)$  时,  $z^*(t, x, m_2) = 1$ ; 否则,  $z^*(t, x, m_2) = 0$ .

**注 1** 特别地, 在  $t=1$  时,  $x_1^*(1, m_2) \equiv 1$  (当  $m_2 = 0$  时,  $x_3^*(1, m_2)$  除外).

**定理 2** RRS 最优维修策略、库存控制点满足以下结构:

$$1 = x_1^*(t, m_2) \leq x_2^*(t, m_2) = x_3^*(t, m_2) \text{ (当 } m_2 = 0 \text{ 时,}$$

$x_3^*(1, m_2)$  除外), 且与  $m_2$  无关; (20)

$$y_1^*(t, x, m_2) \geq y_2^*(t, x, m_2) \geq z^*(t, x, m_2). \quad (21)$$

**注 2** 由定理 2, 以下简记  $x_2^*(t, m_2), x_3^*(t, m_2)$  为  $x_{2t}^*, x_{3t}^*$ .

在定理 1 的最优维修策略和再维修策略下, 还有以下主要定理:

**定理 3** (1)  $\Delta_X C(t, x, m_2)$  是  $x$  的非减函数, 是  $m_2$  的非增函数; (2)  $\Delta_X C(t, x, m_2) \leq \Delta_X C(t, x+1, m_2+1)$ ; (3) 在最优 RRS 策略下, 每个时刻  $t$  均存在一个最优的库存备件水平  $X^*(t, m_2) = \min\{x: \Delta_X C(t, x, m_2) \geq 0\}$ , 使期望维修费用  $C(t, x, m_2)$  最小.

**定理 4** (1)  $\Delta_M C(t, x, m_2)$  是  $x$  的非增函数, 是  $m_2$  的非减函数; (2) 当  $0 \leq x < x_{2t}^*$  时,  $\Delta_M C(t, x, m_2) = \Delta_M C(t, x+1, m_2+1)$ ; (3) 当  $x \geq x_{2t}^*$  时,  $\Delta_M C(t, x, m_2) \leq \Delta_M C(t, x+1, m_2+1)$ ; (4)  $\Delta_M C(t, 0, m_2) = C(t, 0, (m_1, m_2+1)) - C(t, 0, (m_1, m_2)) = \omega + tb_2\Delta t$ ; 当  $x = x_{2t}^*$  时,  $C(t, x+1, m_2+1) - C(t, x, m_2) \geq \omega$ .

**定理 5** RRS 维修策略存在唯一的最优期初库存水平  $X^*$ , 满足  $X^* = \min\{x: \Delta_X C(T, x, 0) \geq 0\}$  及最优备件订货量  $Q = X^* + M_0$ , 其中  $M_0$  为上一周末等待维修的故障设备总数.

## 3 定理的证明

### 3.1 初始边界条件

初始边界为  $t=0$ , 维修期结束, 不再有新故障发生. 若  $x > 0$ , 将增加不必要的库存持有成本, 故零库存策略为最优库存策略. 此时未维修完的故障设备可用下一周期新进备件维修,  $C(0, 0, \bar{m}_0) = (m_1 + m_2)\omega$ .

### 3.2 定理的简要证明

采用数学归纳法证明定理 1 至定理 4 成立.

(1) 证明期末  $t=1$  时定理 1~4 成立.

由初始边界条件及(17)(18)式易证定理 1、注 1、定理 2 成立. 下面证明定理 3 成立.

1)  $x=0$  时, 由(3)~(14)式及初始边界条件, 得

$$\begin{aligned} \Delta_X C(1, 0, m_2) &= C(1, 1, m_2) - C(1, 0, m_2) = \\ &\begin{cases} -(1 - \lambda_1 \Delta t)b_2 \Delta t - \lambda_1 \Delta t b_1 \Delta t, m_2 > 0; \\ -\lambda_1 \Delta t b_1 \Delta t - \lambda_2 \Delta t b_2 \Delta t + [1 - \lambda_1 \Delta t - \\ \lambda_2 \Delta t]h \Delta t, m_2 = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

2) 当  $x > 0$  时, 在最优维修策略下, 新增加一

个库存备件不会对维修策略产生影响, 从而  $\Delta_X C(1, x, m_2) = h\Delta t$ .

综上,  $\Delta_X C(1, x, m_2)$  关于  $x$  单调非减, 关于  $m_2$  单调非增, 且  $\Delta_X C(1, x, m_2) \leq \Delta_X C(1, x+1, m_2+1)$ . 此时存在最优库存水平  $X^*(1, m_2)$ . 定理3成立.

当  $x=0$  时, 由(3)~(6)式及初始边界条件可得

$$\Delta_M C(1, 0, m_2) = \omega + b_2 \Delta t, \quad C(1, 0, (m_1, m_2 + 1)) - C(1, 0, (m_1, m_2)) = \omega + b_2 \Delta t. \quad (23)$$

当  $x > 0$  时, 由(7)~(14)式及初始边界条件可得

$$\Delta_M C(1, x, m_2) = \begin{cases} \omega + b_2 \Delta t - (1 - \lambda_1 \Delta t - \lambda_2 \Delta t)(b_2 + h)\Delta t, & \text{当 } m_2 = 0 \text{ 时}, \\ \omega + b_2 \Delta t, & \text{当 } m_2 > 0 \text{ 时}. \end{cases} \quad (24)$$

$$C(1, 2, m_2 + 1) - C(1, 1, m_2) =$$

$$\begin{cases} \omega + (\lambda_1 \Delta t + \lambda_2 \Delta t)(b_2 + h)\Delta t, & \text{当 } m_2 = 0 \text{ 时}, \\ \omega + b_2 \Delta t, & \text{当 } m_2 > 0 \text{ 时}. \end{cases} \quad (25)$$

由(23)~(25)式, 易得定理4(1)(3)(4)成立.

最后由(23)和(24)式得  $\Delta_M C(1, 0, m_2) = \Delta_M C(1, 1, m_2 + 1) = \omega + b_2 \Delta t$ , 定理4(2)成立.

(2)证明  $1 < t \leq n$  时定理1~4成立.

设  $t-1$  时定理1~4成立, 现证  $t$  时结论仍成立.

证明定理1: 当  $x=0$  时, 有  $\Delta_Y C_2(t, 0, m_2) > 0$ ,  $\Delta_Z C_3(t, 0, m_2) > 0$ . 只需考虑  $x > 0$  情形.

$x > 0$  时, 有  $x_{it}^* = 1$ . 在  $t$  时, 若  $x = t$ , 因每次最多维修一个, 对新发生的低级别设备故障及等待维修设备均应提供维修, 故  $\Delta_Y C_2(t, t, m_2) \leq 0$ ,  $\Delta_Z C_3(t, t, m_2) \leq 0$ . 根据  $t-1$  时的假设和(17)式, 有

$$\Delta_Y C_2(t, x, m_2) - \Delta_Y C_2(t, x-1, m_2) = \Delta_X C(t-1, x-2, m_2) - \Delta_X C(t-1, x-1, m_2+1) \leq 0. \quad (26)$$

所以必然存在  $x_{2t}^* = \min\{x \in N^*: \Delta_Y C_2(t, x, m_2) \leq 0\}$ , 满足当  $x \geq x_{2t}^*$  时,  $\Delta_Y C_2(t, x, m_2) \leq 0$ ; 当  $x < x_{2t}^*$  时,  $\Delta_Y C_2(t, x, m_2) > 0$ . 故状态  $(t, x, m_2)$  的最优维修策略为:  $x \geq x_{2t}^*$  时  $y_i^*(t, x, m_2) = 1$ ; 否则  $y_i^*(t, x, m_2) = 0$ .

其次, 当  $m_2 > 0$  时, 根据假设条件和(18)式, 类似可证存在  $x_{3t}^* = \min\{x \in N^*: \Delta_Z C_3(t, x, m_2) \leq 0\}$  满足定理1的再维修策略.

证明定理2: 由定理1可知,  $1 = x_1^*(t, m_2) \leq x_2^*(t, m_2)$ , 当  $m_2 = 0$  时  $x_3^*(t, m_2) = \infty$ . 故只需证明当  $m_2 > 0$  时,  $x_2^*(t, m_2) = x_3^*(t, m_2)$  且与  $m_2$  无关.

由  $t-1$  时定理4(2)成立, 当  $0 < x \leq x_{2,t-1}^*$  时,  $\Delta_M C(t-1, x-1, m_2-1) = \Delta_M C(t-1, x, m_2)$ . 再由(17)

和(18)式,  $\Delta_Y C_2(t, x, m_2) = \Delta_Z C_3(t, x, m_2)$ . 若存在  $x$  使得  $\Delta_Y C_2(t, x, m_2) = \Delta_Z C_3(t, x, m_2) \leq 0$ , 则必有  $x_2^*(t, m_2) = x_3^*(t, m_2)$ . 否则考虑  $x = x_{2,t-1}^* + 1$ . 当  $x = x_{2,t-1}^* + 1$  时, 由  $t-1$  时定理4(4)成立,  $C(t-1, x, m_2) - C(t-1, x-1, m_2-1) \geq \omega$ . 故  $\Delta_Z C_3(t, x, m_2) = \omega - (b_2 + h)\Delta t + C(t-1, x-1, m_2-1) - C(t-1, x, m_2) \leq 0$ , 由(19)式,  $x_3^*(t, m_2) = x_{2,t-1}^* + 1$ .

又由于  $\Delta_Y C_2(t, x, m_2) - \Delta_Z C_3(t, x, m_2) = \Delta_M \times C(t-1, x-1, m_2-1) - \Delta_M C(t-1, x, m_2) \leq 0$ , 有  $\Delta_Y \times C_2(t, x, m_2) \leq 0$ . 故  $x_2^*(t, m_2) = x_{2,t-1}^* + 1$ . 从而  $x_2^*(t, m_2) = x_3^*(t, m_2)$ .

由  $\Delta_Y C_2(t, x, m_2) = \Delta_Z C_3(t, x, m_2 + 1)$ , 可得  $x_3^*(t, m_2 + 1) = x_2^*(t, m_2) = x_3^*(t, m_2)$ , 控制点均与  $m_2$  无关.

证明定理3: 分别证明  $x_{1t}^* = x_{2t}^* = 1$ 、 $x_{1t}^* = 1$ ,  $x_{2t}^* = 2$  和  $x_{1t}^* = 1$ ,  $x_{2t}^* \geq 3$  三种情形下,  $\Delta_X C(t, x, m_2)$  关于  $x$  和  $m_2$  的单调性. 在此仅对最一般情形  $x_{1t}^* = 1$ ,  $x_{2t}^* \geq 3$  进行证明. 其他情形类似可证.

以下简记  $V(t, x, m_2) := h\Delta t + \Delta_X C(t-1, x, m_2)$ . 由上文分析, 计算可得

$$\Delta_X C(t, x, m_2) = \begin{cases} \lambda_1 \Delta t (\omega - b_1 \Delta t + C(t-1, 0, m_2) - C(t-1, 0, (1, m_2))) + \lambda_2 \Delta t V(t, 0, m_2 + 1) + (1 - \lambda_1 \Delta t - \lambda_2 \Delta t) V(t, 0, m_2), & x = 0; \\ \lambda_1 \Delta t V(t, x-1, m_2) + \lambda_2 \Delta t V(t, x, m_2 + 1) + (1 - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Delta t) V(t, x, m_2), & 0 < x < x_{2t}^* - 1; \\ \lambda_1 \Delta t V(t, x-1, m_2) + \lambda_2 \Delta t (\omega - b_2 \Delta t + C(t-1, x, m_2) - C(t-1, x, m_2 + 1)) + (1 - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Delta t) \times (\omega - b_2 \Delta t + C(t-1, x, m_2 - 1) - C(t-1, x, m_2)), & x = x_{2t}^* - 1, m_2 > 0; \\ \lambda_1 \Delta t V(t, x-1, m_2) + \lambda_2 \Delta t (\omega - b_2 \Delta t + C(t-1, x, m_2) - C(t-1, x, m_2 + 1)) + (1 - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Delta t) V(t, x, m_2), & x = x_{2t}^* - 1, m_2 = 0; \\ \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Delta t V(t, x-1, m_2) + (1 - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Delta t) V(t, x-1, m_2-1), & x \geq x_{2t}^*, m_2 > 0; \\ \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Delta t V(t, x-1, m_2) + (1 - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Delta t) V(t, x, m_2), & x \geq x_{2t}^*, m_2 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

1)由 $t-1$ 时定理3和定理4的结论及 $x_{2t}^*$ 、 $x_{3t}^*$ 的定义,观察以上各式,易得① $\Delta_X C(t, x, m_2)$ 是 $m_2$ 的非增函数;②当 $0 < x < x_{2t}^* - 1$ 或 $x \geq x_{2t}^*$ 时, $\Delta_X C(t, x, m_2)$ 是 $x$ 的非减函数。

2)可证明 $\Delta_X C(t, 1, m_2) \geq \Delta_X C(t, 0, m_2)$ ,  $\Delta_X C(t, x_{2t}^* - 1, m_2) \geq \Delta_X C(t, x_{2t}^* - 2, m_2)$ 以及 $\Delta_X C(t, x_{2t}^*, m_2) \geq \Delta_X C(t, x_{2t}^* - 1, m_2)$ 成立。

由(27)式,可得

$$\begin{aligned} \Delta_X C(t, 1, m_2) - \Delta_X C(t, 0, m_2) &= \lambda_1 \Delta t (\Delta_X C(t-1, 0, m_2) - \Delta_X C(t-1, 0, m_2 + 1) - \Delta_Y C_1(t, 1, (1, m_2))) + \lambda_1 \Delta t (\Delta_X C(t-1, 0, m_2 + 1) - \Delta_X C(t-1, 0, (1, m_2))) + \lambda_2 \Delta t (\Delta_X C(t-1, 1, m_2 + 1) - \Delta_X C(t-1, 0, m_2 + 1)) + (1 - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Delta t) (\Delta_X C(t-1, 1, m_2) - \Delta_X C(t-1, 0, m_2)). \end{aligned} \quad (28)$$

当 $x=1$ 时,为新发生故障的高级别设备提供维修的期望维修费用小于不维修的费用,故 $\Delta_Y C_1(t, 1, (1, m_2)) \leq 0$ .再由 $\Delta_X C(t-1, 0, m_2 + 1) \geq \Delta_X C(t-1, 0, (1, m_2))$ 及 $\Delta_X C(t-1, x, m_2)$ 的单调性,有 $\Delta_X C(t, 1, m_2) \geq \Delta_X C(t, 0, m_2)$ 。

类似可证明其他情形均成立.故 $\Delta_X C(t, x, m_2)$ 是 $x$ 的非减函数.从而在 $t$ 时刻存在一个最优的库存水平 $X^*(t, m_2) = \min\{x: \Delta_X C(t, x, m_2) \geq 0\}$ ,使期望维修费用 $C(t, x, m_2)$ 最小。

3)下面证明 $\Delta_X C(t, x, m_2) \leq \Delta_X C(t, x+1, m_2+1)$ .由假设 $\Delta_X C(t-1, x, m_2) \leq \Delta_X C(t-1, x+1, m_2+1)$ 可知,当 $0 < x < x_{2t}^* - 2$ 和 $x \geq x_{2t}^*$ 时, $\Delta_X C(t, x, m_2) \leq \Delta_X C(t, x+1, m_2+1)$ 成立.还需在 $x=0$ 、 $x=x_{2t}^* - 2$ 和 $x=x_{2t}^* - 1$ 三种情形下证明结论也成立。

当 $x=x_{2t}^* - 1$ 且 $m_2 > 0$ 时,由(27)式,

$$\begin{aligned} \Delta_X C(t, x_{2t}^*, m_2 + 1) - \Delta_X C(t, x_{2t}^* - 1, m_2) &= \lambda_1 \Delta t (\Delta_X C(t-1, x_{2t}^* - 1, m_2 + 1) - \Delta_X C(t-1, x_{2t}^* - 2, m_2)) - \lambda_2 \Delta t \Delta_Y C_2(t, x_{2t}^*, m_2) - (1 - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \Delta t) \Delta_Z C_3(t, x_{2t}^*, m_2). \end{aligned} \quad (29)$$

再由假设条件及 $x_{2t}^*$ 、 $x_{3t}^*$ 定义, $\Delta_X C(t, x_{2t}^*, m_2 + 1) \geq \Delta_X C(t, x_{2t}^* - 1, m_2)$ .其他情形用类似方法可证,在此省略。

证明定理4:方法与定理3类似,省略。

由定理1,期初最优维修策略存在.再由定理3,易证定理5成立。

#### 4 算例分析和总结

利用定理1~5和(14)式,通过算例将RRS与RO维修策略和对故障设备不加区分的维修策略(First Come First Service, FCFS)进行比较,分析在不同参数下对期望维修成本及设备保障率的影响(RO维修策略结果采用文献[8]给出的模型计算)。

图1为 $T=3, \omega=2, h=2, b_1=120, b_2=3, \lambda_1=1, \lambda_2=2$ 时RRS维修策略为低级别故障设备提供即时维修和为等待维修的故障设备提供再维修的最优库存控制点.除 $m_2=0$ 时 $x_{3t}^*=+\infty$ 外均有 $x_{3t}^*=x_{2t}^*$ . $t$ 时刻,当现有库存备件水平 $x \geq x_{2t}^*=x_{3t}^*$ 时,应为故障设备提供维修;否则拒绝提供即时维修。

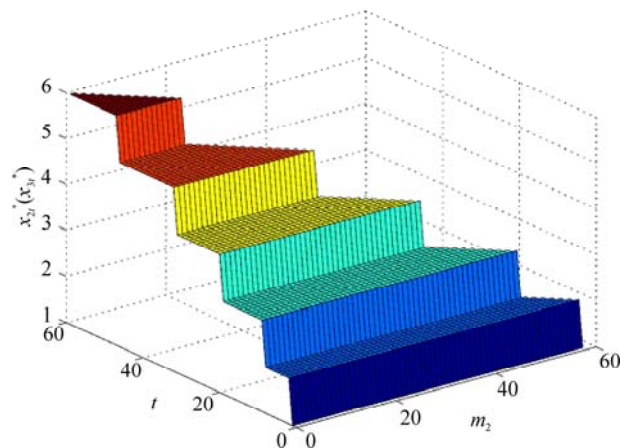


图1 最优库存控制点

表1为 $T=3, \omega=2, h=2, \lambda_1=1, \lambda_2=2$ 和两组不同的设备停工成本情况下,三种维修策略的设备期望维修成本、备件订货量和设备保障率.相比RO、FCFS策略,RRS维修策略具有三方面优势.(1)进一步降低维修成本.由于RRS在对故障设备进行分类的基础上,将有限的备件库存在高低级别设备之间进行有效的分配,提高高级别设备的保障率,从而降低了维护成本.如在 $b=(120,3)$ 情况下,相比RO和FCFS分别提高了1.04%和16.19%.同时,当设备之间的停工成本 $b_1$ 与 $b_2$ 差距增加时,改善率进一步提高至1.21%和20.41%.(2)降低期初订货量,降低库存持有成本.与FCFS策略相比,期初订货量降低了27.27%.(3)提高低级别设备保障率.与RO相比,在库存水平较高时为等待维修的故障设备提供维修服务,有效提高了低级别设备的保障率,进而提高了设备总保障率.相比RO,

低级别设备保障率分别提高了 12.19%和 20.44%, 总保障率分别提高了 6.31%和 10.06%.

表1 最优库存策略、期望维修成本及设备保障率

| 维修策略与<br>相对改善率        | 维修<br>成本 | 期初<br>库存 | 高级别<br>设备保<br>障率/% | 低级别<br>设备保<br>障率/% | 总保障<br>率/% |
|-----------------------|----------|----------|--------------------|--------------------|------------|
| RRS <sup>1)</sup>     | 53.26    | 8        | 95.82              | 59.17              | 72.09      |
| RO <sup>1)</sup>      | 53.82    | 8        | 96.16              | 52.74              | 67.81      |
| 相对改善率 <sup>1)/%</sup> | 1.04     | 0        | -0.35              | 12.19              | 6.31       |
| FCFS <sup>1)</sup>    | 63.55    | 11       | 93.89              | 93.72              | 93.82      |
| 相对改善率 <sup>1)/%</sup> | 16.19    | 27.27    | 2.06               | -36.87             | -23.16     |
| RRS <sup>2)</sup>     | 52.18    | 8        | 97.78              | 58.92              | 72.62      |
| RO <sup>2)</sup>      | 52.82    | 8        | 97.48              | 48.92              | 65.98      |
| 相对改善率 <sup>2)/%</sup> | 1.21     | 0        | 0.31               | 20.44              | 10.06      |
| FCFS <sup>2)</sup>    | 65.56    | 11       | 93.78              | 93.83              | 93.81      |
| 相对改善率 <sup>2)/%</sup> | 20.41    | 27.27    | 4.27               | -37.21             | -22.59     |

注: 1)条件为  $b_1=120$ 、 $b_2=3$ ; 2)条件为  $b_1=160$ 、 $b_2=2$ .

#### 参考文献:

- [1] GU J Y, ZHANG G Q, LI K W. Efficient aircraft spare parts inventory management under demand uncertainty[J]. Journal of Air Transport Management, 2015, 42:101-109.
- [2] FALKNER C H. Jointly optimal inventory and maintenance policies for stochastically failing equipment[J]. Operations Research, 1968, 16(3):587-601.
- [3] KOÇAĞA Y L, ŞEN A. Spare parts inventory management with demand lead times and rationing[J]. IIE Transactions, 2007, 39(9):879-898.
- [4] CHANG P L, CHOU Y C, HUANG M G. A  $(r, r, Q)$  inventory model for spare parts involving equipment criticality[J]. International Journal of Production Economics, 2005, 97(1):66-74.
- [5] KENNEDY W J, WAYNE P J, FREDENDALL L D. An overview of recent literature on spare parts inventories[J]. International Journal of Production Economics, 2002, 76(2): 201-215.
- [6] CAVALIERI S, GARETTI M, MACCHI M, et al. A decision-making framework for managing maintenance spare parts[J]. Production Planning & Control, 2008, 19(4): 379-396.
- [7] VAN H A, BURÉ J, CATTRYSSE D, et al. Joint maintenance and inventory optimization systems: A review[J]. International Journal of Production Economics, 2013, 143 (2):499-508.
- [8] 郑长征, 刘志学, 刘丹. 考虑备件随机折损的备件订货与设备维修策略研究[J]. 计算机集成制造系统, 2010, 16(10):2129-2138.

## Spare parts inventory control and equipment maintenance policies given equipment waiting for re-service

ZHENG Li-jun<sup>1</sup>, ZHENG Chang-zheng<sup>2</sup>, XU Si-yan<sup>1\*</sup>

( 1.Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2.China Center for Information Industry Development, Beijing 100846, China )

**Abstract:** To tackle the problem that protection rate of the lower level equipment is low for rationing only maintenance policy, a spare parts inventory control policy and an equipment maintenance integration policy are presented. The waiting equipment may be re-serviced when the spare parts inventory is higher than a critical-level control point. A dynamic programming model is developed. The optimal policies for spare parts ordering, equipment maintenance and the critical-level control point for the faulty equipment are made. An example is presented to show that compared with rationing only and FCFS policy, the policy developed can reduce the cost for the equipment maintenance, and improve both the low-level equipment and overall guarantee rate.

**Key words:** stochastic failure; equipment maintenance policy; spare parts inventory management; re-service

(责任编辑 韩 超)