

非局部边界条件的半正定三阶边界值问题

贾明娜, 计 婷, 曲树华, 胡良根*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 运用 Green 函数的性质、不动点指数定理和变量替换, 研究具有非局部边界条件的半正定三阶边界问题正解的存在性.

关键词: 半正定; 三阶边界值问题; 正解; 存在性

中图分类号: O177.91; O175.8 文献标志码: A 文章编号: 1001-5132 (2017) 04-0088-04

文中主要研究具有非局部边界条件的半正定三阶边界值问题

$$\begin{cases} u''(t) = g(t)f(t, u(t)), t \in [0, 1], \\ u(0) = 0, u'(p) = 0, u''(1) = \lambda[u''], \end{cases} \quad (1)$$

其中 $p \in (\frac{1}{2}, 1]$, $\lambda[v] = \int_0^1 v(t)d\Lambda(t)$ 由 Riemann-Stieltjes 积分得到, 是定义在 $[0, 1]$ 上的一个连续线性函数, Λ 为有界变差函数且 $\lambda[1] < 1$. $g: (0, 1) \rightarrow [0, +\infty)$ 为连续函数且当 $t=0$ 或 $t=1$ 时可能有奇异性, $f: [0, 1] \times [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ 是连续的.

奇异边界值问题主要出现在研究化学催化剂动力学、电子传导材料的热传导理论以及非牛顿流时所对应的数学模型中^[1-10]. 近年来, 非局部三阶边界值问题的研究得到国内外许多专家的关注并获得许多有意义的研究成果. 尤其是 Webb 和其合作者^[3-7]处理了一类具有任意许可非局部边界条件的非线性微分方程的多重正解的存在性, 并给出了一种统一的新方法.

2009 年 Graef 和 Webb^[7]研究了三阶边界值问题

$$\begin{cases} u'''(t) = g(t)f(t, u(t)), 0 < t < 1, \\ u(0) = 0, u'(p) = 0, u''(1) = \lambda[u''], \end{cases}$$

多个正解的存在性. 其中 $p \geq 1/2$ 是常数; $\lambda[v] = \int_0^1 v(t)d\Lambda(t)$ 是由 Riemann-Stieltjes 积分得到的且为 $[0, 1]$ 上的一个连续线性函数, 其中 Λ 为有界变差函数且 $\lambda[1] < 1$.

2011 年, 胡良根和周先锋^[8]考虑了奇异 $2n$ 阶微分方程本征值问题

$$\begin{cases} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = \mu g(t)f(t, u(t)), t \in [a, b] \cap T, \\ y^{\Delta^{2i}}(a) - \beta_{i+1} y^{\Delta^{2i+1}}(a) = \alpha_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta), \\ \gamma_{i+1} y^{\Delta^{2i}}(\eta) = y^{\Delta^{2i}}(b), 0 \leq i \leq n-1, \end{cases}$$

他们证明了正解的存在性和非线性项与特征值之间的关系. 其后, 他们继续研究了半正定问题, 即非线性项 f 可能取负值^[9].

可以发现, 很多作者要求非线性项 f 为正, 即 $f(t, u(t)) \geq 0$. 然而, 很多实际问题转化的数学模型中, 非线性项 f 可以取负值. 这为寻找有意义的正解增加了研究难度, 因而引起广泛关注. 文中主要研究了具有非局部边界条件的半正定三阶边界问题, 通过运用 Green 函数的性质、不动点指数定理和变量替换, 证明了正解的存在性, 并巧妙地应用变量替换处理了非线性项 f 取负值的情况.

1 预备知识

设 $G(t, s)$ 表示非局部边界值问题的 Green 函数

$$\begin{cases} u'''(t) = 0, t \in [0, 1], \\ u(0) = 0, u'(p) = 0, u''(1) = \lambda[u'']. \end{cases}$$

由文献[7]可得, 对任意的 $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$, Green 函数为

$$G(t, s) = (ts - \frac{t^2}{2})(1 + \frac{\Lambda(s)}{1 - \lambda[1]}) - t(p-s)H(p-s) +$$

$$\frac{(t-s)^2}{2}H(t-s),$$

其中 H 是 Heaviside 函数 $H(t) := \begin{cases} 1, t \geq 0, \\ 0, t < 0. \end{cases}$

引理 1^[10] 假设对 $s \leq p$, 有 $\Lambda(s) \geq 0$; 对 $s > p$, 有 $\frac{\Lambda(s)}{1-\lambda[1]} \geq -\frac{s-p}{1-p}$. 则当 $0 \leq t, s \leq 1$ 时, Green 函数 $G(t, s)$ 具有以下性质

$$G(t, s) \leq \Phi(s) := \begin{cases} \frac{p^2}{2} + \frac{p^2}{2} \frac{\Lambda(s)}{1-\lambda[1]}, & t > s, \\ \frac{s^2}{2} + \frac{p^2}{2} \frac{\Lambda(s)}{1-\lambda[1]}, & p > s > t, \\ \frac{p^2}{2} + \frac{p^2}{2} \frac{\Lambda(s)}{1-\lambda[1]}, & p < t < s \text{ 或 } t < p < s, \end{cases} \quad (2)$$

且

$$G(t, s) \geq d(t)\Phi(s), \quad (3)$$

其中 $d(t) = (2tp - t^2) / p^2$.

设 Banach 空间 $E = C[0, 1]$, 定义锥

$$P = \{u \in E : u(t) \geq 0, t \in [0, 1]\}.$$

假设

(A₁) $g\Phi \in L^1(0, 1)$, $g \geq 0$ a.e 且对于常数 $0 < c < d < 1$, 有

$$\int_c^d \Phi(s)g(s)ds > 0, \int_0^1 \Phi(s)g(s)ds < +\infty.$$

(A₂) 非线性函数 $f : [0, 1] \times (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ 是连续的, 且存在常数 N 使得对所有 $u \geq 0$, 有 $f(t, u) \geq -N$.

引理 2^[11] 设 P 为 Banach 空间上的一个锥, Ω 是属于 E 的一个有界集, 且 $S : \partial\Omega \cap P \rightarrow P$ 是可测的. 如果存在算子 $B : \partial\Omega \cap P \rightarrow P$, 使得 $\inf_{u \in \partial\Omega \cap P} \|Bu\| > 0$ 且对所有的 $\lambda \geq 0$, 有 $u \neq Tu + \lambda Bu$, 则 $i(S, \Omega \cap P, P) = 0$.

2 主要结论

延伸 f 的定义, 即 $\forall t \in [0, 1]$ 和 $u < 0$, 有 $f(t, u(t)) := f(t, 0)$; 对任意的 $t \in [0, 1]$ 和 $u \geq 0$, 定义函数 $q(t, u(t)) = f(t, u(t) - N\varphi(t)) + N$, 其中 $\varphi(t) = \int_0^1 G(t, s)g(s)ds$.

为寻找问题(1)的正解, 可将其转化为非线性积分算子的不动点问题, 其非线性积分算子为

$$Su(t) := \int_0^1 G(t, s)g(s)q(s, u(s))ds, 0 \leq t \leq 1, \quad (4)$$

对应的线性积分算子

$$Lu(t) := \int_0^1 G(t, s)g(s)u(s)ds, 0 \leq t \leq 1. \quad (5)$$

引理 3^[10] 设 $u \in C([0, 1], [0, +\infty))$ 且条件(A₁)成立, 则由(5)给出的算子 $L : P \rightarrow P$ 是全连续的且 $L(P) \subset P$, 谱半径 $r(L) \neq 0$ 以及 L 有对应于第一特征值 $\mu_1 = (r(L))^{-1}$ 正特征函数 ψ , 其中 $\psi = \mu_1 L\psi$.

定理 1 假设条件(A₁)成立. 设 u 为积分算子 S 的解且 $\varphi(t) = \int_0^1 G(t, s)g(s)ds$. 则下列不等式成立:

$$u(t) \geq \zeta_1 \|u\| \varphi(t),$$

$$\text{其中 } \zeta_1 := \frac{d(t)}{\|\Phi(s)\| \max_{t \in [0, 1]} g(t)}.$$

证明 因为 u 是积分算子 S 的解, 则对任意的 $t \in [0, 1]$, 有

$$\|u(t)\| = \sup_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 G(\cdot, s)g(s)q(s, u(s))ds \right| \leq \int_0^1 \Phi(s)g(s)q(s, u(s))ds. \quad (6)$$

即

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)g(s)q(s, u(s))ds \geq$$

$$\int_0^1 \frac{\int_0^1 G(t, s)q(s)q(s, u(s))ds}{\|\Phi(s)\| \max_{t \in [0, 1]} g(t)}.$$

$$d(t)\Phi(s)g(s)q(s, u(s))ds \geq \zeta_1 \|u\| \varphi(t),$$

其中 $\zeta_1 = \frac{d(t)}{\|\Phi(s)\| \max_{t \in [0, 1]} g(t)}$, 从而结论成立.

定理 2 假设条件(A₁)成立. 设 $\varphi(t) = \int_0^1 G(t, s)g(s)ds$ 且存在常数 Q 使得 $\forall t \in [0, 1]$, 有 $\varphi(t) \leq Qd(t)$. 设 u 为积分算子 S 的解, 则有 $u(t) \geq \zeta_2 \|u\| \varphi(t)$, 其中 $\zeta_2 = 1/Q$.

证明 由(6)可得, 对任意的 $t \in [0, 1]$, 有

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)g(s)q(s, u(s))ds \geq$$

$$\int_0^1 d(t)\Phi(s)g(s)q(s, u(s))ds =$$

$$\frac{1}{Q} \int_0^1 G(t, s)g(s)ds \int_0^1 \Phi(s)g(s)q(s, u(s))ds \geq$$

$$\zeta_2 \|u\| \varphi(t),$$

其中 $\zeta_2 = 1/Q$, 证毕.

定义

$$f_0 := \liminf_{u \rightarrow 0} \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u},$$

$$f_\infty := \liminf_{u \rightarrow \infty} \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u},$$

$$f^0 := \limsup_{u \rightarrow 0} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u},$$

$$f^\infty := \limsup_{u \rightarrow \infty} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t,u)}{u}.$$

引理 4^[10] 设条件(A₁), (A₂)成立且函数 $f: [0, 1] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 是连续的, 且有 $f^0 < \mu_1$ 和 $f_\infty > \mu_1$, 则方程(1)至少存在一个正解, 其中 μ_1 是由(5)定义的线性算子 L 的第一正特征值.

定理 3 设条件(A₁), (A₂)成立且函数 f 满足:

(H₁) 存在 $r > N / \zeta_1$, 使得对 $0 \leq u \leq r$, 有 $f(t, u) \leq \mu_1 u - N$.

(H₂) 存在 $R > r$ 和 $\varepsilon > 0$, 使得对 $0 \leq t \leq 1$ 和 $u \geq R$, 有 $f(t, u) > (\mu_1 + \varepsilon)u - N$.

则方程(1)至少存在一个正解 $u \in P$.

证明 由全连续算子的延拓定理, f 可定义为对 $t \in [0, 1]$ 和 $u < 0$, 有 $f(t, u) = f(t, 0)$, 且定义函数 $q(t, u(t)) = f(t, u(t) - N\varphi(t)) + N$, 其中 $u(t) = u(t) - N\varphi(t)$, 则由条件(H₁)可得

$$0 \leq u(t) \leq N\varphi(t) \Rightarrow \\ -N\varphi(t) \leq u = u - N\varphi(t) \leq 0,$$

从而

$$q(t, u(t)) = f(t, u(t) - N\varphi(t)) + N = \\ f(t, 0) + N \leq \mu_1 u(t).$$

又由于

$$N\varphi(t) \leq u(t) \leq r \Rightarrow 0 \leq u(t) = \\ u(t) - N\varphi(t) \leq r - N\varphi(t) \leq r,$$

从而对任意的 $t \in [0, 1]$ 以及 $0 \leq u \leq r$, 有

$$q(t, u) \leq \mu_1 u. \quad (7)$$

另一方面, 由于 $\varphi(t)$ 是有界的, 可取 $R > r$ (充分大), 使得对 $u(t) - N\varphi(t) \geq R$, 有

$$\frac{(\mu_1 + \varepsilon)N\varphi(t)}{u(t)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

成立. 因此, 由条件(H₂)可得

$$q(t, u(t)) = f(t, u(t) - N\varphi(t)) + N \geq \\ (\mu_1 + \varepsilon)(u(t) - N\varphi(t)) = \\ (\mu_1 + \frac{2\varepsilon}{3})u(t) + u(t)(\frac{\varepsilon}{3} - \frac{(\mu_1 + \varepsilon)N\varphi(t)}{u(t)}) \geq$$

$$(\mu_1 + \frac{2\varepsilon}{3})u(t),$$

从而, 存在着 $R > r$ 以及 $\varepsilon > 0$, 使得对所有的 $u \geq R + N\varphi(t)$, 有

$$q(t, u) > (\mu_1 + \frac{2\varepsilon}{3})u, \quad (8)$$

联合(7), (8)和引理 2 可得, 存在积分算子 S 的不动点 u 且满足 $\|u\| \geq r$, 由定理 1.1 可得 $u = u - N\varphi$ 是方程(1)的一个正解.

引理 5^[10] 设条件(A₁), (A₂)成立且函数 $f: [0, 1] \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 是连续的, 假设 $f^\infty < \mu_1$, 则 $i(S, P_R, P) = 1$, 其中 μ_1 是由(5)定义的线性积分算子 L 的第一正特征值.

定理 4 设条件(A₁), (A₂)成立且函数 f 满足:

(H₃) 存在 $r > N / \zeta_1$, 对 $t \in [m, n]$ 以及 $u \leq r$, 有 $f(t, u) > Lr - N$;

(H₄) 存在 $R > r$, 对 $t \in [0, 1]$ 以及 $u \geq R$, 有 $f(t, u) \leq \mu_1 u - N$.

则方程(1)至少存在一个正解 $u \in P$, 其中

$$L > \left(\inf_{t \in [m, n]} \int_m^n G(t, s)g(s)ds \right)^{-1}.$$

证明 采用定理 3 类似的方法, 由条件(H₃)可得

$$q(t, u) > Lr, \quad (9)$$

其中 $t \in [m, n]$, $0 \leq u \leq r$.

假设对任意的 $t \in [0, 1]$, 有 $Bu(t) = 1$, 则对所有的 $\lambda \geq 0$ 以及 $u \in \partial P_r$, 可得 $u \neq Su + \lambda Bu$. 事实上, 如果以上的结论不成立, 则存在 $u \in \partial P_r$ 且 $\lambda \geq 0$ 满足 $u(t) = Su(t) + \lambda Bu(t), t \in [0, 1]$.

因此, 由(9)可知, 对于 $t \in [m, n]$ 有

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)g(s)q(s, u(s))ds + \lambda Bu(t) \geq \\ \int_m^n G(t, s)g(s)Lrds + \lambda > r + \lambda \geq \|u\|,$$

矛盾. 故由引理 4 可得

$$i(S, P_r, P) = 0, \quad (10)$$

其中 $\partial P_r = \{u \in P : \|u\| = r\}$.

另一方面, 由条件(H₄)知, 若取 $u(t) \geq R + N\varphi(t)$, 则对于 $t \in [0, 1]$ 以及 $u(t) \geq R$, 有

$$q(t, u(t)) = f(t, u(t) - N\varphi(t)) + N \leq \\ \mu_1(u(t) - N\varphi(t)) \leq \mu_1 u(t),$$

从而对任意的 $t \in [0, 1]$ 以及 $u \geq R$, 有 $q(t, u) \leq \mu_1 u$.

由引理 5 可得

$$i(S, P_R, P) = 1. \quad (11)$$

联合(10)和(11)以及不动点指数定理可得积分算子 S 有不动点 u^* 且满足 $\|u^*\| > r$. 再应用定理 1 可得 $u = u^* - N\varphi$ 是方程(1)的一个正解.

下面再考虑 g 在 $t=0$ 或 $t=1$ 可能有奇异性的情况.

定理 5 假设条件 (A_1) 和 (A_2) 均成立且存在常数 Q 使得 $\varphi(t) = \int_0^1 G(t, s)g(s)ds \leq Qd(t)$, 函数 f 满足定理 3 的条件 (H_1) , (H_2) 或者满足定理 4 的条件 (H_3) , (H_4) , 则方程(1)至少存在一个正解 $u \in P$, 其中条件 (H_1) , (H_2) 中的 ζ_1 可以由定理 2 中的 ζ_2 代替.

证明 应用定理 3 和定理 4 类似的方法, 可得 u 是积分算子 S 的一个不动点且满足 $\|u\| \geq r$. 因此, 根据定理 2 得 $u = u - N\varphi(t)$ 是方程(1)的一个正解.

参考文献:

- [1] TALIAFERRO S D. A nonlinear singular boundary value problem[J]. *Nonlinear Analysis*, 1979, 3:897-904.
- [2] LAZER A C, MCKENNA P J. On a singular nonlinear elliptic boundary value problem[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1991, 111:721-730.
- [3] WEBB J R L, LAN K Q. Eigenvalue criteria for existence of multiple positive solutions of nonlinear boundary value problems of local and nonlocal type[J]. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 2006, 27:91-115.
- [4] WEBB J R L, INFANTE G. Positive solutions of nonlinear boundary value problems: A unified approach[J]. *Journal of the London Mathematical Society*, 2006, 74:673-693.
- [5] WEBB J R L, INFANTE G. Non-local boundary value problems of arbitrary order[J]. *Journal of the London Mathematical Society*, 2009, 79:238-258.
- [6] WEBB J R L, INFANTE G. Positive solutions of nonlocal boundary value problems involving integral conditions[J]. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, 2008, 15:45-67.
- [7] GRAEF J R, WEBB J R L. Third order boundary value problems with nonlocal boundary conditions[J]. *Nonlinear Analysis*, 2009, 71:1542-1551.
- [8] HU L G, ZHOU X F. Positive solutions of the singular eigenvalue problem for a higher-order differential equation on time scales[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, 53:667-677.
- [9] HU L G, ZHOU X F. Positive solutions of semipositone higher-order differential equation on time scales[J]. *Nonlinear Analysis*, 2011, 74:3033-3045.
- [10] 计婷, 曲树华, 孙琛, 等. 含非局部边界的奇异特征值问题的正解[J]. *应用泛函分析学报*, 2016, 18:593-604.
- [11] 郭大钧, 孙经先. 非线性积分方程[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1987.

Positive solutions of semipositone for a third order boundary value problem with nonlocal boundary conditions

JIA Ming-na, JI Ting, QU Shu-hua, HU Liang-gen*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, using the property of Green's function, we investigate the existence of positive solutions of the semipositone problems for a semipositone third order boundary value problem with nonlocal boundary conditions. Also probed is the fixed point index theorem and variable transformation.

Key words: semipositone; third order boundary value problem; positive solution; existence

(责任编辑 韩 超)