

双分数布朗运动环境下脆弱期权定价

王 瑶, 薛 红*

(西安工程大学 理学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 与分数布朗运动相比, 双分数布朗运动是一个更一般的高斯过程. 因此, 在双分数运动随机分析理论基础上, 假定股票价格、公司价值和公司负债均服从双分数布朗运动驱动的随机微分方程, 运用保险精算方法推导出脆弱期权在双分数布朗运动环境下的定价公式.

关键词: 双分数布朗运动; 保险精算; 脆弱期权

中图分类号: F830; O211

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2017) 05-0104-04

脆弱期权是一种在场外市场交易时具有信用风险的期权, 由于存在信用风险, 导致双方进入期权交易时都存在违约的可能性, 从而使期权无法执行. Merton^[1]首先提出了具有信用风险的结构化模型, 用以公司债券的定价; 在此基础上 Johnson等^[2]讨论了具有违约风险的期权定价问题, 并将具有违约风险的期权定义为脆弱期权. 随后, Hull等^[3]在违约风险存在的情况下, 提出了对衍生证券进行估值的模型, 该模型中违约概率和恢复比例大小均是随机的, 通过对交易对手的债券数据进行分析, 得到了模型参数的相关信息, 并给出了脆弱期权的定价公式. Klein^[4]假设标的资产和交易对方的信用风险存在相关性, 提出了一种可以用来改进具有违约风险的 Black-Scholes 期权定价的方法, 得到脆弱期权的定价公式. 黄玲君等^[5]在公司负债为常数的情况下, 应用风险中性原理, 推导出分数 Brown 运动环境下脆弱期权的解析解. 李萍等^[6]通过保险精算方法, 得到了当利率和公司负债都为常数时分数 Brown 运动下的脆弱期权定价公式. 近年来, 部分学者提出了双分数布朗运动^[7-8], 它是分数布朗运动的一种推广, 更具一般的高斯过程, 可以描述分数布朗运动不能描述的资产收益率变化的非平稳情形. 文献[9-11]假设标的资产服从双分数 Brown 运动驱动的随机微分方程, 利用双分数布朗运动随机分析理论, 通过保险精算方法分别

得到了双分数布朗运动环境下的重置期权定价公式、再装期权定价公式和篮子期权定价公式. 当前, 关于期权定价的方法有很多种, 比如保险精算方法、数值模拟方法、风险中性定价方法等, 其中保险精算方法适用范围更广泛^[12-14].

本研究是在文献[5]的基础上, 将股票价格服从的随机微分方程从分数布朗运动下推广到双分数布朗运动环境下, 通过保险精算方法研究了脆弱期权在双分数布朗运动环境下的定价问题, 并给出了相应的定价公式.

1 模型假设与模型建立

假设股票价格为 $S(t)$, 公司价值为 $V(t)$, 公司负债为 $D(t)$. 设 $X(T)$ 为公司在 T 时刻承诺支付给债权人的金额, 若公司始终具有偿还能力, 则公司的债权人在 T 时刻取得的偿付额为 $X(T)$. 若在 T 时刻 $V(T) < D(T)$, 则发生违约, 此时公司的债权人取得的偿付额为:

$$X^d(T) = X(T)V(T) / D(T),$$

即在 T 时刻, 公司的实际支付额可表示为^[14]:

$$X^d(T) = X(T)I_{\{V(T) \geq D(T)\}} + \frac{X(T)V(T)}{D(T)}I_{\{V(T) < D(T)\}}. \quad (1)$$

假定股票价格 $S(t)$, 公司价值 $V(t)$ 和公司负债 $D(t)$ 均服从双分数布朗运动, 即

收稿日期: 2017-01-18.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11601410); 陕西省自然科学基金基础研究计划(2016JM1031).

第一作者: 王瑶(1992-), 女, 陕西宝鸡人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: 517087793@qq.com

*通信作者: 薛红(1964-), 男, 山西运城人, 博士/教授, 主要研究方向: 随机分析及金融工程. E-mail: xuehonghong@sohu.com

$$dS(t) = S(t)[(\mu_s dt + \sigma_s dB_s^{H,K}(t))], \quad (2)$$

$$dV(t) = V(t)[(\mu_v dt + \sigma_v dB_v^{H,K}(t))], \quad (3)$$

$$dD(t) = D(t)[(\mu_D dt + \sigma_D dB_D^{H,K}(t))], \quad (4)$$

其中: $\{B_s^{H,K}(t), t \geq 0\}$, $\{B_v^{H,K}(t), t \geq 0\}$, $\{B_D^{H,K}(t), t \geq 0\}$ 表示完备概率空间 (Ω, F, P) 内的双分数 Brown 运动; $\mu_s, \sigma_s > 0$ 分别表示股票价格的期望收益率和波动率; 且 $B_s^{H,K}(t)$ 与 $B_v^{H,K}(t)$, $B_s^{H,K}(t)$ 与 $B_D^{H,K}(t)$, $B_v^{H,K}(t)$ 与 $B_D^{H,K}(t)$ 的相关系数分别为 $\rho_{SV}, \rho_{SD}, \rho_{VD}$.

引理 1^[8] 随机微分方程(2)~(4)的解分别为:

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \mu_s t - \frac{1}{2} \sigma_s^2 t^{2HK} + \sigma_s B_s^{H,K}(t) \right\},$$

$$V(t) = V(0) \exp \left\{ \mu_v t - \frac{1}{2} \sigma_v^2 t^{2HK} + \sigma_v B_v^{H,K}(t) \right\},$$

$$D(t) = D(0) \exp \left\{ \mu_D t - \frac{1}{2} \sigma_D^2 t^{2HK} + \sigma_D B_D^{H,K}(t) \right\}.$$

定义 1^[8] 股票价格过程 $\{S(t), t \geq 0\}$ 在 $[t, T]$ 上的期望收益率 $\beta_s(\mu)$, $\mu \in [t, T]$ 定义为:

$$\exp \left\{ \int_t^T \beta_s(\mu) d\mu \right\} = E[S(T)] / S(t).$$

引理 2^[14] 随机过程 $\{S(t), t \geq 0\}$ 在 $[t, T]$ 上的期望收益率满足 $\beta_s(u) = \mu_s$, 公司价值 $\{V(t), t \geq 0\}$ 和公司负债 $\{D(t), t \geq 0\}$ 在 $[t, T]$ 上的期望收益率 $\beta_v(u), \beta_D(u)$ 分别满足 $\beta_v(u) = \mu_v$, $\beta_D(u) = \mu_D$.

定义 2^[12] 在到期日 T 时刻, 承诺支付额为 $X(T) = (S(T) - K)^+$, 而出现违约或破产时的实际支付额 $X(T) = (V(T) / D(T))(S(T) - K)^+$ 的脆弱看涨期权的保险精算价格定义为:

$$C_0^d = E \left[\left(\exp \left\{ - \int_0^T \beta_s(\mu) d\mu \right\} S(T) - e^{-rT} K \right) + \frac{I_{\left\{ \exp \left\{ - \int_0^T \beta_v(u) du \right\} V(T) \geq \exp \left\{ - \int_0^T \beta_D(u) du \right\} D(T) \right\}}}{\exp \left\{ - \int_0^T \beta_v(u) du \right\} V(T)} \cdot \frac{\exp \left\{ - \int_0^T \beta_D(u) du \right\} D(T)}{\exp \left\{ - \int_0^T \beta_s(u) du \right\} S(T) - e^{-rT} K} \right) \right].$$

其中: 股票价格 $S(T)$ 用期望收益率 $\beta_s(\mu)$ 贴现; 公司价值 $V(T)$ 以及公司负债 $D(T)$ 分别用期望收益率 $\beta_v(u), \beta_D(u)$ 贴现, 执行价格 K 用无风险利率 r 贴现.

2 脆弱期权的定价

定理 1 在到期日 T 时刻, 承诺支付额为 $X(T) = (S(T) - K)^+$, 而出现违约或破产时的实际支付额为 $X(T) = (V(T) / D(T))(S(T) - K)^+$ 的脆弱看涨期权的保险精算价格 C_0^d 为:

$$C_0^d = S(0) N_2(a_1, a_2, \rho) - K e^{-rT} N_2(b_1, b_2, \rho) + S(0) \frac{V(0)}{D(0)} \exp \{ \sigma_D^2 T^{2HK} + \rho_{SV} \sigma_s \sigma_v T^{2HK} - \rho_{SD} \sigma_s \sigma_D T^{2HK} - \rho_{VD} \sigma_v \sigma_D T^{2HK} \} \cdot N_2(c_1, c_2, -\rho) - K e^{-rT} \frac{V(0)}{D(0)} \exp \{ \sigma_D^2 T^{2HK} - \rho_{VD} \sigma_v \sigma_D T^{2HK} \} N_2(d_1, d_2, -\rho).$$

其中:

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(n \frac{S(0)}{K} + rT + \frac{1}{2} \sigma_s^2 T^{2HK} \right) / (\sigma_s \sqrt{T^{2HK}}), \\ a_2 &= \left(\ln \frac{V(0)}{D(0)} + \frac{1}{2} \sigma_D^2 T^{2HK} - \frac{1}{2} \sigma_v^2 T^{2HK} + \rho_{SV} \sigma_s \sigma_v T^{2HK} - \rho_{SD} \sigma_s \sigma_D T^{2HK} \right) / (\sigma_s \sqrt{T^{2HK}}), \\ b_1 &= a_1 - \sigma_s \sqrt{T^{2HK}}, \quad b_2 = a_2 - \rho \sigma_s \sqrt{T^{2HK}}, \\ c_1 &= a_1 + \rho \sigma_s \sqrt{T^{2HK}}, \quad c_2 = -a_2 - \sigma_s \sqrt{T^{2HK}}, \\ d_1 &= a_1 - \sigma_s \sqrt{T^{2HK}} + \rho \sigma_s \sqrt{T^{2HK}}, \\ d_2 &= a_2 - \rho \sigma_s \sqrt{T^{2HK}} + \sigma_s \sqrt{T^{2HK}}, \\ \rho &= (\rho_{SV} \sigma_v - \rho_{SD} \sigma_D) / \sigma_\delta, \\ \sigma_\delta^2 &= \sigma_v^2 + \sigma_D^2 - 2 \rho_{VD} \sigma_v \sigma_D, \\ N_2(x, y, \rho) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(x, y, \rho) dx dy, \\ \varphi(x, y, \rho) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho}} \exp \left\{ -\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)} \right\}. \end{aligned}$$

证明 令

$$A_1 = \{ \exp \{ - \int_0^T \beta_s(u) du \} S(T) \geq e^{-rT} K \},$$

$$A_2 = \{ \exp \{ - \int_0^T \beta_v(u) du \} V(T) \geq \exp \{ - \int_0^T \beta_D(u) du \} D(T) \},$$

记 $Z_1 = B_s^{H,K}(T) / \sqrt{T^{2HK}}$, 则 $A_1 = \{Z_1 \geq -b_1\}$,

记 $Z_2 = (\sigma_v B_v^{H,K}(T) - \sigma_D B_D^{H,K}(T)) / (\sigma_\delta \sqrt{T^{2HK}})$, 则

$$A_2 = \{Z_2 \geq -b_2\},$$

从而

$$\begin{aligned} C_0^d &= E[\exp\{-\int_0^T \beta_S(u)du\}S(T)I_{\{Z_1 \geq -b_1, Z_2 \geq -b_2\}}] - \\ &E[Ke^{-rT}I_{\{Z_1 \geq -b_1, Z_2 \geq -b_2\}}] + \\ &E[\frac{\exp\{-\int_0^T \beta_V(u)du\}V(T)}{\exp\{-\int_0^T \beta_D(u)du\}D(T)} \cdot \\ &\exp\{-\int_0^T \beta_S(u)du\}S(T)I_{\{Z_1 \geq -b_1, Z_2 < -b_2\}}] - \\ &E[\frac{\exp\{-\int_0^T \beta_V(u)du\}V(T)}{\exp\{-\int_0^T \beta_D(u)du\}D(T)} \cdot \\ &Ke^{-rT}I_{\{Z_1 \geq -b_1, Z_2 < -b_2\}}] = \\ &E_1 - E_2 + E_3 - E_4. \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} E_1 &= E[\exp\{-\int_0^T \beta_S(u)du\}S(T)I_{\{Z_1 \geq -b_1, Z_2 \geq -b_2\}}] = \\ &E[S(0)\exp\{-(1/2)\sigma_S^2 T^{2HK} + \\ &\sigma_S \sqrt{T^{2HK}} Z_1\}I_{\{Z_1 \geq -b_1, Z_2 \geq -b_2\}}] = \\ &S(0) \int_{-b_1}^{+\infty} \int_{-b_2}^{+\infty} \exp\{-(1/2)\sigma_S^2 T^{2HK} + \sigma_S \sqrt{T^{2HK}} z_1\} \cdot \\ &\varphi(z_1, z_2, \rho) dz_1 dz_2 = \\ &S(0) \int_{-b_1}^{+\infty} \int_{-b_2}^{+\infty} \varphi(z_1 - \sigma_S \sqrt{T^{2HK}}, z_2 - \rho \sigma_S \sqrt{T^{2HK}}, \\ &\rho) dz_1 dz_2 = S(0) \int_{-a_1}^{+\infty} \int_{-a_2}^{+\infty} \varphi(x, y, \rho) dx dy = \\ &S(0) N_2(a_1, a_2, \rho), \\ E_2 &= E[Ke^{-rT}I_{\{Z_1 \geq -b_1, Z_2 \geq -b_2\}}] = \\ &Ke^{-rT} \int_{-b_1}^{+\infty} \int_{-b_2}^{+\infty} \varphi(z_1, z_2, \rho) dz_1 dz_2 = \\ &Ke^{-rT} \int_{-\infty}^{b_1} \int_{-\infty}^{b_2} \varphi(x, y, \rho) dx dy = \\ &Ke^{-rT} N_2(b_1, b_2, \rho), \\ E_3 &= E[\frac{\exp\{-\int_0^T \beta_V(u)du\}V(T)}{\exp\{-\int_0^T \beta_D(u)du\}D(T)} \cdot \\ &\exp\{-\int_0^T \beta_S(u)du\}S(T)I_{\{Z_1 \geq -b_1, Z_2 < -b_2\}}] = \\ &S(0) \frac{V(0)}{D(0)} \int_{-b_1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-b_2} \exp\{-\frac{1}{2}\sigma_S^2 T^{2HK} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sigma_V^2 T^{2HK} + \frac{1}{2}\sigma_D^2 T^{2HK} + \sigma_S \sqrt{T^{2HK}} z_1 + \\ &\sigma_S \sqrt{T^{2HK}} z_2\} \varphi(z_1, z_2, \rho) dz_1 dz_2 = \\ &S(0) \frac{V(0)}{D(0)} \exp\{\sigma_D^2 T^{2HK} + \rho_{SV} \sigma_S \sigma_V T^{2HK} - \\ &\rho_{SD} \sigma_S \sigma_D T^{2HK} - \rho_{VD} \sigma_V \sigma_D T^{2HK}\} \cdot \\ &\int_{-b_1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-b_2} \varphi(z_1 - \sigma_S \sqrt{T^{2HK}} - \rho \sigma_S \sqrt{T^{2HK}}, \\ &z_2 - \sigma_S \sqrt{T^{2HK}} - \rho \sigma_S \sqrt{T^{2HK}}, \rho) dz_1 dz_2 = \\ &S(0) \frac{V(0)}{D(0)} \exp\{\sigma_D^2 T^{2HK} + \rho_{SV} \sigma_S \sigma_V T^{2HK} - \\ &\rho_{SD} \sigma_S \sigma_D T^{2HK} - \rho_{VD} \sigma_V \sigma_D T^{2HK}\} \cdot \\ &\int_{-c_1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-c_2} \varphi(x, y, -\rho) dx dy = \\ &S(0) \frac{V(0)}{D(0)} \exp\{\sigma_D^2 T^{2HK} + \rho_{SV} \sigma_S \sigma_V T^{2HK} - \\ &\rho_{SD} \sigma_S \sigma_D T^{2HK} - \rho_{VD} \sigma_V \sigma_D T^{2HK}\} \cdot \\ &N_2(c_1, c_2, -\rho), \\ E_4 &= E[\frac{\exp\{-\int_0^T \beta_V(u)du\}V(T)}{\exp\{-\int_0^T \beta_D(u)du\}D(T)} \cdot \\ &Ke^{-rT}I_{\{Z_1 \geq -b_1, Z_2 < -b_2\}}] = Ke^{-rT} \frac{V(0)}{D(0)} \cdot \\ &\int_{-b_1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-b_2} \exp\{\frac{1}{2}\sigma_D^2 T^{2HK} - \frac{1}{2}\sigma_V^2 T^{2HK} + \\ &\sigma_S \sqrt{T^{2HK}} z_2\} \varphi(z_1, z_2, \rho) dz_1 dz_2 = \\ &Ke^{-rT} \frac{V(0)}{D(0)} \exp\{\sigma_D^2 T^{2HK} - \rho_{VD} \sigma_V \sigma_D T^{2HK}\} \cdot \\ &\int_{-b_1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-b_2} \varphi(z_1 - \rho \sigma_S \sqrt{T^{2HK}}, \\ &z_2 - \sigma_S \sqrt{T^{2HK}}, \rho) dz_1 dz_2 = \\ &Ke^{-rT} \frac{V(0)}{D(0)} \exp\{\sigma_D^2 T^{2HK} - \rho_{VD} \sigma_V \sigma_D T^{2HK}\} \cdot \\ &\int_{-d_1}^{\infty} \int_{-\infty}^{d_2} \varphi(x, y, -\rho) dx dy = Ke^{-rT} \frac{V(0)}{D(0)} \cdot \\ &\exp\{\sigma_D^2 T^{2HK} - \rho_{VD} \sigma_V \sigma_D T^{2HK}\} N_2(d_1, d_2, -\rho). \end{aligned}$$

推论 1 当 $K=1$, 且 $\sigma_D \rightarrow 0$ 时, 可得分数布朗运动下的脆弱期权定价公式(参见文献[8]).

推论 2 当 $K=1, H=1/2$, 且 $\sigma_D \rightarrow 0$ 时, 可简化为文献[2]中的结果.

推论 3 当 $K=1, H=1/2$ 时, 可简化为文献[4]中的结果.

3 结语

利用双分数 Brown 运动下随机分析理论, 建立了双分数环境下的金融市场模型, 在收益率和波动率都为常数的情况下, 通过保险精算方法得到了双分数 Brown 运动过程下脆弱期权的解析解. 该公式是对分数 Brown 运动环境中脆弱期权定价问题的推广, 有关双分数—跳扩散环境下脆弱期权定价问题还有待进一步探讨.

参考文献:

- [1] MERTON R. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates[J]. Journal of Finance, 1974, 29(2):449-470.
- [2] JOHNSON H, STYLZ R. The pricing of options under default risk[J]. Journal of Finance, 1987, 42(2):267-280.
- [3] HULL J M, WHITE A. The impact of default risk on the prices of options and other derivative securities[J]. Journal of Banking & Finance, 1995, 19(2):299-323.
- [4] KLEIN P. Pricing Black-Scholes options with correlated credit risk[J]. Journal of Banking and Finance, 1996, 20(7):1121-1129.
- [5] 黄玲君, 周圣武. 股价服从分数布朗运动的脆弱欧式期权定价[J]. 云南大学学报(自然科学版), 2010, 32(2): 109-112.
- [6] 李萍, 薛红, 李琛炜. 分数布朗运动下具有违约风险未定权益定价[J]. 纺织高校基础科学学报, 2012, 25(4): 462-467.
- [7] RUSSO F, TUDOR C. On the bifractional Brownian motion[J]. Stochastic Processes and Applications, 2006, 116(5):830-856.
- [8] 肖炜麟, 张卫国, 徐卫东. 双分式布朗运动下股本权证定价[J]. 系统工程学报, 2013, 28(3):348-354.
- [9] 淡静怡, 薛红. 双分数布朗运动环境下的篮子期权定价[J]. 纺织高校基础科学学报, 2016, 29(4):460-466.
- [10] 薛红, 吴江增. 双分数布朗运动下再装期权定价模型[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2015, 31(6): 765-769.
- [11] 董莹莹, 薛红. 双分数布朗运动环境下重置期权定价[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2016, 32(2): 242-246.
- [12] 衡晓, 薛红. 次分数布朗运动环境下脆弱期权定价[J]. 纺织高校基础科学学报, 2015, 28(4):447-453.
- [13] XUE H, WU J. Pricing European option under bi-fractional jump-diffusion process[EB/OL]. [2016-11-12]. [http://xueshu.baidu.com/s?wd=paperuri:\(f8648551bdb917a35c3aebdd5a0af5b8\)&filter=sc_long_sign&sc_ks_para=q%3DPricing+European+Option+under+Bi-fractional+Jump-Diffusion+Process&tn=SE_baiduxueshu_c1gjeupa&ie=utf-8&sc_us=1739724268387610348](http://xueshu.baidu.com/s?wd=paperuri:(f8648551bdb917a35c3aebdd5a0af5b8)&filter=sc_long_sign&sc_ks_para=q%3DPricing+European+Option+under+Bi-fractional+Jump-Diffusion+Process&tn=SE_baiduxueshu_c1gjeupa&ie=utf-8&sc_us=1739724268387610348).
- [14] 许艳红, 薛红, 王晓东. 分数跳—扩散环境下脆弱期权定价[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2013, 29(6):725-731.

Vulnerable option pricing models in bi-fractional environment

WANG Yao, XUE Hong*

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract: For the fractional Brownian motion, the bi-fractional Brownian motion is a more general Gaussian process. Based on the theory of stochastic analysis of bi-fractional Brownian motion, it assumes that the stock price, the firm value and the corporate liability all satisfy the stochastic differential equation driven by bi-fractional Brownian motion. Using the actuarial approach, the pricing formula of vulnerable option in bi-fractional Brownian motion environment is obtained.

Key words: bi-fractional Brownian motion; actuarial mathematics; vulnerable option

(责任编辑 史小丽)