

非均匀衰减 Radon 变换的反演问题

李 伟, 王金平*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 本文主要利用傅里叶变换, Riesz 位势, 积分变换和广义中心切片定理将 Natterer 的结果推广到了非均匀衰减的情形, 构建了衰减 Radon 变换的精确重建公式. 同时, 通过该公式研究了衰减 Radon 变换的值域, 从而将 Rigaud 和 Lakhal 的 Sobolev 估计结果推广到了 n 维空间.

关键词: 非均匀衰减; 衰减 Radon 变换; Riesz 位势; Sobolev 估计

中图分类号: Q819; O177

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2017) 06-0085-05

Radon 变换^[1]及均匀衰减 Radon 变换^[2]的反演公式早在几十年前就被广泛研究. 1986 年 Natterer 利用傅里叶变换研究了均匀衰减 Radon 变换的反演公式. 目前, 解析类算法在医学临床中运用非常广泛, 其中滤波反投影算法最为著名. 与迭代类算法相比, 解析类算法的优点是可操作性强且重建速度快; 缺点是不能对非均匀衰减的情形进行精确补偿, 而人体组织器官的非均匀衰减使得滤波反投影算法在实际应用时受到很大的限制. 2001 年 Natterer 引用了衰减 Radon 变换的概念^[3], 并且利用衰减 Radon 变换推导出原函数的反演公式. 2002 年, Novikov 推导出了衰减 X 射线逆公式^[4], 从而用解析算法对非均匀衰减的情形进行有效的补偿. 之后, 许多关于衰减 Radon 变换的研究^[5-8]不断涌现. 2015 年 Rigaud 和 Lakhal 利用 Novikov 的反演公式对二维衰减 Radon 变换进行了 Sobolev 估计^[9]. 然而对于 n 维衰减 Radon 变换的研究, 一直未取得实质性的突破, 本文在前人研究的基础上对 n 维衰减 Radon 变换的重建公式及其 Sobolev 估计进行探究.

1 预备知识

设 f 是 Schwartz 空间 $S(R^n)$ 上的函数, $w(\theta, x)$ 是 $S^{n-1} \times R^n$ 上的权函数, 则衰减 Radon 变换

可定义为:

$$P_w f(\theta, s) = \int_{R^n} w(\theta, x) f(x) \delta(s - x \cdot \theta) dx = \int_{\theta^\perp} w(\theta, s\theta + y) f(s\theta + y) dy. \quad (1)$$

设 $f \in L^1(R^n)$, 则它的傅里叶变换 $F(f)$ 和傅里叶逆变换 $F^{-1}(f)$ 为:

$$F(f)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} f(x) \exp(-ix\xi) dx, \quad (2)$$

$$F^{-1}(f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} f(\xi) \exp(ix\xi) d\xi. \quad (3)$$

特别地, 当函数有两个自变量时, 傅里叶变换及其逆变换均针对第二个自变量.

设 $\alpha \geq 0, g \in L^2(Z)$ 在 $Z = S^{n-1} \times R^1$ 上的 Sobolev 范数定义为:

$$\|g\|_{H^\alpha(Z)} = \left(\int_{S^{n-1}} \int_{R^1} (1 + \sigma^2)^\alpha \times |F(g)(\theta, \sigma)|^2 d\sigma d\theta \right)^{1/2}. \quad (4)$$

下面给出卷积形式的 Young 不等式.

设 $f \in L^\alpha(R^n), g \in L^\beta(R^n)$, $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \infty$ 且 $1/\alpha + 1/\beta - 1 = 1/\gamma$. 则卷积和 Young 不等式可分别定义为:

$$f * g(x) = \int_{R^n} f(y) g(x - y) dy, \quad (5)$$

$$\|f * g\|_\gamma \leq \|f\|_\alpha \|g\|_\beta. \quad (6)$$

另外, 我们给出一个线性算子 Riesz 位势的相关结果, 对于任意 $\alpha < n$,

收稿日期: 2017-04-19.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(61271398).

第一作者: 李伟(1989-), 男, 安徽淮南人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: liweivipedu@163.com

*通信作者: 王金平(1963-), 男, 湖北武汉人, 博士/教授, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: wangjinping@nbu.edu.cn

$$F(I^\alpha f)(x) = |x|^{-\alpha} F(f)(x), \quad (7)$$

其中 I^α 称为 Riesz 位势. 如果 I^α 作用在 Z 上的函数, 则它对函数的第二个变量起作用, Riesz 位势在公式的推导和 Sobolev 估计中起至关重要的作用. 关于 Riesz 位势的更多的介绍, 见参考文献[10-11].

2 主要结果

引理 1 设 $w(\theta, x)$ 是 $S^{n-1} \times R^n$ 上的权函数且任意的 $f \in S(R^n)$, 则有:

$$F(P_w f)(\theta, \rho) = (2\pi)^{(n-1)/2} F(w(\theta, \rho\theta)f(\rho\theta)), \quad \rho \in R^1. \quad (8)$$

证明 由傅里叶变换的定义知:

$$\begin{aligned} F(P_w f)(\theta, \rho) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{R^1} e^{-i\rho s} P_w f(\theta, s) ds = \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{R^1} e^{-i\rho s} \int_{\theta^\perp} w(\theta, s\theta + y) \times \\ &\quad f(s\theta + y) dy ds. \end{aligned} \quad (9)$$

令 $x = s\theta + y$, 则 $s = x \cdot \theta$, $dx = dy ds$,

$$\begin{aligned} F(P_w f)(\theta, \rho) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{R^n} e^{-i\rho x \cdot \theta} w(\theta, x) f(x) dx = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} F(w(\theta, \rho\theta)f(\rho\theta)). \end{aligned} \quad (10)$$

引理 2 设 $w(\theta, x)$ 是 $S^{n-1} \times R^n$ 上的权函数且任意的 $g \in S(Z)$, 则:

$$\begin{aligned} F\left(\int_{S^{n-1}} w(\theta, y) g(\theta, y \cdot \theta) d\theta\right) &= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \times \\ &\times F\left\{F^{-1}(|y|^{1-n} F(g)\left(\frac{y}{|y|}, |y|\right)) w\left(\frac{y}{|y|}, y\right) + \right. \\ &\left. F^{-1}(|y|^{1-n} F(g)\left(-\frac{y}{|y|}, -|y|\right)) \times \right. \\ &\left. w\left(-\frac{y}{|y|}, y\right)\right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

证明 对任意的 $f \in S(R^n)$, 由 P_w 的定义可知:

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta) w(\theta, x) F(f)(x) d\theta dx &= \\ \int_{S^{n-1}} \int_{R^1} g(\theta, r) P_w F(f)(\theta, r) dr d\theta. \end{aligned} \quad (12)$$

由参考文献^[1]中的 Parseval 公式可知:

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta) w(\theta, x) F(f)(x) d\theta dx &= \\ \int_{S^{n-1}} \int_{R^1} F(g)(\theta, \rho) F^{-1}(P_w F(f)) \times \\ &\quad (\theta, \rho) d\rho d\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

由引理 1 知:

$$F^{-1}(P_w F(f))(\theta, \rho) =$$

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} F^{-1}(w(\theta, \rho\theta)F(f)(\rho\theta)). \quad (14)$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta) w(\theta, x) F(f)(x) d\theta dx &= \\ (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_{S^{n-1}} \int_{R^1} F(g)(\theta, \rho) \times \\ &\quad F^{-1}(w(\theta, \rho\theta)F(f)(\rho\theta)) d\rho d\theta. \end{aligned} \quad (15)$$

令 $y = \rho\theta$, 可得:

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \int_{S^{n-1}} g(\theta, x \cdot \theta) w(\theta, x) F(f)(x) d\theta dx &= (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \\ \int_{R^n} |y|^{1-n} \{F(g)\left(\frac{y}{|y|}, |y|\right) F^{-1}\left(w\left(\frac{y}{|y|}, y\right) \times \right. \\ &\quad \left. F(f)(y)\right) + F(g)\left(-\frac{y}{|y|}, -|y|\right) F^{-1}\left(w\left(-\frac{y}{|y|}, y\right) \times \right. \\ &\quad \left. F(f)(y)\right)\} dy = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_{R^n} F\{F^{-1}(|y|^{1-n} \times \\ &\quad F(g)\left(\frac{y}{|y|}, |y|\right)) w\left(\frac{y}{|y|}, y\right) + F^{-1}(|y|^{1-n} \times \\ &\quad F(g)\left(-\frac{y}{|y|}, -|y|\right)) w\left(-\frac{y}{|y|}, y\right)\} f(y) dy. \end{aligned}$$

这意味着 $F\left(\int_{S^{n-1}} w(\theta, y) g(\theta, y \cdot \theta) d\theta\right)$ 可表示为如下形式:

$$\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} F\{F^{-1}(|y|^{1-n} F(g)\left(\frac{y}{|y|}, |y|\right)) w\left(\frac{y}{|y|}, y\right) + \\ F^{-1}(|y|^{1-n} F(g)\left(-\frac{y}{|y|}, -|y|\right)) \times \\ w\left(-\frac{y}{|y|}, y\right)\}. \end{aligned} \quad (16)$$

引理 3 设 $w(\theta, x)$, $u(\theta, x)$ 是 $S^{n-1} \times R^n$ 上的权函数, 对于任意的 $f \in S(R^n)$, 则:

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} u(\theta, x) I^{l+1-n} P_w f(\theta, x \cdot \theta) d\theta &= \\ (2\pi)^{n-1} \{I^l w\left(\frac{x}{|x|}, x\right) f(x) u\left(\frac{x}{|x|}, x\right) + \\ &\quad (I^l w\left(-\frac{x}{|x|}, x\right) f(x) u\left(-\frac{x}{|x|}, x\right)\}. \end{aligned} \quad (17)$$

证明 由引理 2 可知:

$$\begin{aligned} F\left[\int_{S^{n-1}} u(\theta, y) I^{l+1-n} P_w f(\theta, y \cdot \theta) d\theta\right] &= \\ (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} F\{F^{-1}(|y|^{1-n} F(I^{l+1-n} P_w f)\left(\frac{y}{|y|}, \right. \\ &\quad \left. |y|\right)) u\left(\frac{y}{|y|}, y\right) + F^{-1}(|y|^{1-n} F(I^{l+1-n} P_w f) \times \\ &\quad \left. |y|\right)) u\left(-\frac{y}{|y|}, y\right) + F^{-1}(|y|^{1-n} F(I^{l+1-n} P_w f) \times \\ &\quad \left. |y|\right)) u\left(-\frac{y}{|y|}, y\right)\}. \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{y}{|y|}, -|y|\right)u\left(-\frac{y}{|y|}, y\right)\}. \quad (18)$$

由引理 1 知:

$$\begin{aligned} F\left(\int_{S^{n-1}} u(\theta, y) I^{l+1-n} P_w f(\theta, y \cdot \theta) d\theta\right) = \\ (2\pi)^{n-1} F\left((I^l w\left(\frac{y}{|y|}, y\right) f(y)) u\left(-\frac{y}{|y|}, y\right) + \right. \\ \left. (I^l w\left(-\frac{y}{|y|}, y\right) f(y)) u\left(-\frac{y}{|y|}, y\right)\right). \end{aligned} \quad (19)$$

再对(19)式两边同时进行傅里叶逆变换即可得出结论.

定理 1 设 $w(\theta, x)$ 是 $S^{n-1} \times R^n$ 上的权函数, 以及任意的 $f \in S(R^n)$, 则:

$$f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}} \int_{S^{n-1}} w^{-1}(\theta, x) H(P_w f)^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta) d\theta, n \text{ 偶}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \int_{S^{n-1}} w^{-1}(\theta, x) (P_w f)^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta) d\theta, n \text{ 奇}. \end{cases} \quad (20)$$

证明 由引理 3 可得:

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} w^{-1}(\theta, x) I^{1-n} P_w f(\theta, x \cdot \theta) d\theta = \\ 2(2\pi)^{n-1} f(x), \end{aligned} \quad (21)$$

其中 I^{1-n} 是作用在 R^1 上的一个函数. 对于任意 $h \in S(R^1)$,

$$\begin{aligned} F(I^{1-n} h)(\sigma) = |\sigma|^{n-1} F(h)(\sigma) = \\ (\text{sgn}(\sigma))^{n-1} \sigma^{n-1} F(h)(\sigma). \end{aligned} \quad (22)$$

另外, 希尔伯特变换可写为:

$$F(Hh)(\sigma) = -i \text{sgn}(\sigma) F(h)(\sigma). \quad (23)$$

从而

$$\begin{aligned} F(H^{n-1} h^{(n-1)})(\sigma) = (-i \text{sgn}(\sigma))^{n-1} F(h^{(n-1)})(\sigma) = \\ (-i \text{sgn}(\sigma))^{n-1} (i\sigma)^{n-1} F(h)(\sigma). \end{aligned} \quad (24)$$

因此,

$$H^{n-1} h^{(n-1)} = I^{n-1} h, \quad (25)$$

更进一步, 由(21)式和(25)式, 得到:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} w^{-1}(\theta, x) \cdot \\ H^{n-1} (P_w f)^{(n-1)}(\theta, x \cdot \theta) d\theta, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $(P_w f)^{(n-1)}$ 表示对 $P_w f$ 的第二个变量求 $n-1$ 次导数. 再利用(26)式和

$$H^{n-1} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-2}{2}} H, n \text{ 偶}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, n \text{ 奇}, \end{cases} \quad (27)$$

即可得出结论.

引理 4 设开集 $\Omega \subseteq R^n$, $H^\alpha = \{h \in S'(R^n) : (1+|\xi|^2)^{\alpha/2} F(h) \in L^2(R^n)\}$, $H_0^\alpha(\Omega) = \{h \in H^\alpha(R^n) : \text{supp}(h) \in \overline{\Omega}\}$, 则存在常数 $\lambda(\alpha, n) \geq 0$ 使得:

$$\sup_{|\xi| \leq 1} |F(h)(\xi)| \leq \lambda(\alpha, n) \|h\|_{H_0^\alpha(\Omega)}. \quad (28)$$

证明 为了估计上确界, 选择一个在 Ω 上等于 1 的函数 $\phi \in C_0^\infty(R^n)$, 且令 $\phi_\xi(x) = e^{-ix \cdot \xi} \phi(x)$. 由 Parseval 公式知:

$$\begin{aligned} |F(h)(\xi)|^2 &= (2\pi)^{-n} \left| \int_{R^n} \phi_\xi(x) h(x) dx \right|^2 = \\ (2\pi)^{-n} \left| \int_{R^n} F^{-1}(\phi_\xi)(\eta) F(h)(\eta) d\eta \right|^2 &= (2\pi)^{-n} \cdot \\ \left| \int_{R^n} F^{-1}(\phi_\xi)(\eta) (1+|\eta|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} (1+|\eta|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \right. \\ F(h)(\eta) d\eta \left. \right|^2 &\leq (2\pi)^{-n} \int_{R^n} (1+|\eta|^2)^{-\alpha} \cdot \\ |F^{-1}(\phi_\xi)(\eta)|^2 d\eta \int_{R^n} (1+|\eta|^2)^\alpha |F(h)(\eta)|^2 \cdot \\ d\eta &= (2\pi)^{-n} \|\phi_\xi\|_{H^{-\alpha}(R^n)}^2 \|h\|_{H_0^\alpha(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (29)$$

再利用 ϕ_ξ 的 $H^{-\alpha}(R^n)$ 范数是关于 ξ 的一个连续函数, 故存在正常数 $\lambda_0(\alpha, n)$, 使得

$$\sup_{|\xi| \leq 1} \|\phi_\xi\|_{H^{-\alpha}(R^n)} \leq \lambda_0(\alpha, n). \quad (30)$$

定理 2 设任意的 $\theta \in S^{n-1}$ 都有 $F(w)(\theta, \xi) \in L^1(R^n)$, 则算子 $P_w : L^2(\Omega) \rightarrow H^{(n-1)/2}(Z)$ 连续且存在正常数 $\Lambda(n)$ 使得:

$$\|P_w\|_{L^2(\Omega) \rightarrow H^{(n-1)/2}(Z)} \leq \Lambda(n) \|W_w\|_{L^1(R^n)}, \quad (31)$$

其中 $W_w(\xi) = \sup_\theta |F(w)(\theta, \xi)|$.

证明 对 $P_w f$ 第二个变量进行傅里叶变换得:

$$\begin{aligned} F(P_w f)(\theta, \sigma) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{R^n} F(w)(\theta, \sigma\theta - \xi) \cdot \\ F(f)(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

令 $W_w(\xi) = \sup_\theta |F(w)(\theta, \xi)|$, 则

$$\begin{aligned} |F(P_w f)(\theta, \sigma)|^2 &\leq \\ (2\pi)^{-1} |(W_w * |F(f)|)(\sigma\theta)|^2. \end{aligned} \quad (32)$$

因此,

$$\begin{aligned} \|P_w f\|_{H^{(n-1)/2}(Z)} &= \left(\int_Z (1+\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}} |F(P_w f)(\theta, \sigma)|^2 \cdot \right. \\ d\sigma d\theta \left. \right)^{\frac{1}{2}} &\leq (2\pi)^{\frac{1}{2}} \left(\int_Z (1+\sigma^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \right. \\ |(W_w * |F(f)|)(\sigma\theta)|^2 d\sigma d\theta \left. \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (33)$$

令 $\xi = \sigma\theta$, 得

$$\|P_w f\|_{H^{(n-1)/2}(Z)} \leq (\pi)^{-\frac{1}{2}} \left(\int_{R^n} |\xi|^{1-n} (1+|\xi|^2)^{\frac{n-1}{2}} \times \right. \\ \left. |(W_w * |F(f)|)(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (34)$$

再将积分范围分成 $|\xi| \geq 1$ 和 $|\xi| \leq 1$ 两种情形来证.

情形 1: 对于 $|\xi| \geq 1$, 因为 $2|\xi|^2 \geq 1+|\xi|^2$, 所以

$$\int_{|\xi| \geq 1} |\xi|^{1-n} (1+|\xi|^2)^{\frac{n-1}{2}} |(W_w * |F(f)|)(\xi)|^2 d\xi \leq \\ 2^{\frac{n-1}{2}} \|W_w * |F(f)|\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ 2^{\frac{n-1}{2}} \|W_w\|_{L^1(\Omega)}^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

情形 2: 考虑 $|\xi| \leq 1$ 的情况.

$$\int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{1-n} (1+|\xi|^2)^{\frac{n-1}{2}} |(W_w * |F(f)|)(\xi)|^2 d\xi \leq \\ \int_{|\xi| \leq 1} |\xi|^{1-n} (1+|\xi|^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi \times \\ \sup_{|\xi| \leq 1} |(W_w * |F(f)|)(\xi)|^2 = \\ \lambda_1(n) \sup_{|\xi| \leq 1} |(W_w * |F(f)|)(\xi)|^2, \quad (35)$$

其中 $\lambda_1(n)$ 是一个正常数, 由引理 4 及 Young 不等式即可得出结论.

定理 3 设任意的 $\theta \in S^{n-1}$ 都有 $w(\theta, x) \in S(R^n)$, 则 $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ 和 $\|P_w\|_{H^{(n-1)/2}(Z)}$ 等价, 即存在常数 $c(n)$, $C(n) > 0$ 使得:

$$c(n)\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|P_w f\|_{H^{(n-1)/2}(Z)} \leq C(n)\|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (36)$$

证明 由定理 2 知不等式的右边成立. 对于不等式的左边, 首先利用 Parseval 公式可得:

$$\int_{S^{n-1}} w^{-1}(\theta, x) I^{1-n} P_w f(\theta, x \cdot \theta) d\theta = \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_Z w^{-1}(\theta, x) \exp(ix \cdot \sigma\theta) |\sigma|^{n-1} \cdot \\ F(P_w f)(\theta, \sigma) d\sigma d\theta.$$

由傅里叶变换的定义知:

$$F\left(\int_{S^{n-1}} w^{-1}(\theta, \xi) I^{1-n} P_w f(\theta, \xi \cdot \theta) d\theta\right) = \\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_Z F(w^{-1})(\theta, \xi - \sigma\theta) |\sigma|^{n-1} \cdot \\ F(P_w f)(\theta, \sigma) d\sigma d\theta. \quad (37)$$

因 $|F(w^{-1})(\theta, \xi)| \leq \sup_{\theta} |F(w^{-1})(\theta, \xi)| = W_{w^{-1}}(\xi)$, 故

$$\left| F\left(\int_{S^{n-1}} w^{-1}(\theta, \xi) I^{1-n} P_w f(\theta, \xi \cdot \theta) d\theta\right) \right| \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \left[\int_Z W_{w^{-1}}(\xi - \sigma\theta) |\sigma|^{n-1} \cdot \right. \\ \left. |F(P_w f)(\theta, \sigma)| d\sigma d\theta \right]^2. \quad (38)$$

引入变量 $\eta = \sigma\theta$, 可得:

$$\left| F\left(\int_{S^{n-1}} w^{-1}(\theta, \xi) I^{1-n} P_w f(\theta, \xi \cdot \theta) d\theta\right) \right|^2 \leq \\ \frac{1}{2\pi} \left(\int_{R^n} W_{w^{-1}}(\xi - \eta) |F(P_w f)\left(\frac{\eta}{|\eta|}, |\eta|\right)| + \right. \\ \left. |F(P_w f)\left(-\frac{\eta}{|\eta|}, -|\eta|\right)| d\eta \right)^2 = \\ \frac{1}{2\pi} \{ (|F(P_w f)\left(\frac{\eta}{|\eta|}, |\eta|\right)| + |F(P_w f) \times \\ (-\frac{\eta}{|\eta|}, -|\eta|)|) * W_{w^{-1}}(\eta) \}^2(\xi). \quad (39)$$

由定理 1 及 Young 不等式得:

$$\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{4} (2\pi)^{2(1-n)} \left\| \int_{S^{n-1}} w^{-1}(\theta, x) I^{1-n} \cdot \right. \\ \left. P_w f(\theta, x \cdot \theta) d\theta \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (2\pi)^{-2n} \pi \|W_{w^{-1}}\|_{L^1(\Omega)}^2 \cdot \\ \int_Z |F(P_w f)(\theta, \sigma)|^2 |\sigma|^{n-1} d\sigma d\theta \leq \\ (2\pi)^{-2n} \pi \|P_w f\|_{H^{(n-1)/2}(Z)}^2 \|W_{w^{-1}}\|_{L^1(\Omega)}^2. \quad (40)$$

3 总结

本文主要研究了衰减 Radon 变换的反演及其 Sobolev 估计. 利用傅里叶变换, Riesz 位势, 积分变换以及广义中心切片定理等得到了衰减 Radon 变换的反演公式. 衰减 Radon 变换的 Sobolev 范数的分析主要是基于卷积形式的 Young 不等式的范数的估计. 另外, 我们还证明了所得结果的稳定性, 即可以通过原函数和衰减函数的范数来估计衰减 Radon 变换的范数. 因此, 本文所做的研究, 为进一步的实验和理论研究奠定了基础.

参考文献:

- [1] NATTERER F. The Mathematics of Computerized Tomography[M]. New York: John Wiley & Sons, 1986:86-95.
- [2] TRETIKOV O, METZ C. The exponential Radon transform[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1980, 39(2):341-354.
- [3] NATTERER F. Inversion of the attenuated Radon transform[J]. Inverse Problems, 2001, 17:113-119.
- [4] NOVIKOV R G. An inversion formula for the attenuated X-ray transformation[J]. Arkiv för Matematik, 2002,

- 40(1):145-167.
- [5] BOMAN J, STRÖMBERG J O. Novikov's inversion formula for the attenuated Radon transform—A new approach[J]. *Journal of Geometric Analysis*, 2004, 14(2): 185-198.
- [6] MONARD F. Inversion of the attenuated geodesic X-ray transform over functions and vector fields on simple surfaces[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2016, 48(2):1155-1177.
- [7] WANG J P. Inversion and property characterization on generalized transforms of Radon type[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2011, 31(3):636-643.
- [8] SHEN Z J, WANG J P. The research of complex analytic method in SPECT image reconstruction[J]. *Applicable Analysis*, 2014, 93(11):2451-2461.
- [9] RIGAUD G, LAKHAL A. Approximate inverse and Sobolev estimates for the attenuated Radon transform[J]. *Inverse Problems*, 2015, 31(10):1-21.
- [10] RULLGÅRD H. Stability of the inverse problem for the attenuated Radon transform with 180° data[J]. *Inverse Problems*, 2004, 20(3):787-791.
- [11] LOUIS A K. Combining image reconstruction and image analysis with an application to two-dimensional tomography[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2008, 1(2): 188-208.
- [8] SHEN Z J, WANG J P. The research of complex analytic

Inversion of non-uniform attenuation Radon transform

LI Wei, WANG Jin-ping^{*}

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, the results of Natterer are generalized to non-uniform attenuation using Fourier transform, Riesz potential, integral transform and generalized central slice theorem, and the exact reconstruction formula of attenuated Radon transform is constructed. Meanwhile, through the stated formula, the range of attenuated Radon transform is studied, then the Sobolev estimation results of Rigaud and Lakhal are extended to n -dimensional space.

Key words: non-uniform attenuation; attenuated Radon transform; Riesz potential; Sobolev estimation

(责任编辑 韩 超)