

具有一般密度制约的食饵-捕食者扩散系统的行波解

李慧茹, 肖海滨*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 论文主要研究一类具有非线性密度制约函数的食饵-捕食者扩散系统的行波解. 利用拓扑打靶的方法, 借助构造似 Wazewski 集和 Lyapunov 函数, 证明了系统连结边界平衡点和共存平衡点的非负行波解的存在. 本文的结果意味着由 Huang 所建立的行波解在捕食者具有非线性密度制约的情形下是可以保持的.

关键词: 行波解; 连结轨道; 食饵-捕食者扩散系统; 密度制约; 最小波速

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2017) 06-0078-07

食饵-捕食者扩散系统一直是理论和实验生态学家及数学家广泛关注的重要课题. 目前国内外已有大量相关的研究成果^[1-18]. 正如文献[13]所述, 一方面, 基于理论和现实的角度分析, 空间以及与空间相关的特征因素已牢固建立在生态学的本质属性之中; 另一方面, 对生态学中空间因素角度的预先掌握所面临的数学挑战也是极其诱人的. 考虑到种群在空间上的扩散效应, 则一般的食饵-捕食者系统可以表示成 Kolmogorov 模型, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = d_1 \Delta u(x,t) + u(x,t)f(u(x,t), v(x,t)), \\ v(x,t), x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = d_2 \Delta v(x,t) + v(x,t)g(u(x,t), v(x,t)), \\ v(x,t), x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega \subset R^n$ 是栖息地, $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 分别表示在区域 $x \in \Omega$ 和时间 t 处食饵与捕食者的种群密度, $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2 / \partial x_i^2$ 是拉普拉斯算子, 正数 d_1 和 d_2 分别表示食饵与捕食者的扩散系数. 此外, $u(x,t) \times f(u(x,t), v(x,t))$ 和 $v(x,t)g(u(x,t), v(x,t))$ 分别表示食饵和捕食者在无扩散条件下的增长率. 并且鉴于生物学的意义, 一般假设 $f(u(x,t), v(x,t))$ 和 $g(u(x,t), v(x,t))$ 是 C^1 类函数且满足如下条件:

$$\frac{\partial f}{\partial v} < 0, \frac{\partial g}{\partial u} > 0.$$

众所周知, 有界行波解是描述空间平移过渡过程的不变解, 其典型地表现为连结一个平衡态到另一个平衡态. 行波解的存在性成为描述许多物理、化学和生物现象的抛物线方程的一个重要研究主题^[19-20]. Dunbar^[21-23]是潜心研究食饵-捕食者扩散系统行波解存在性的先驱. 文献[21-22]中, Dunbar 分别从 $d_1 = 0$ 和 $d_1 \neq 0$ 两种情况研究了 Lotka-Volterra 扩散系统, 证明了系统具有连结边界平衡点到共存平衡点的行波解. 在文献[23]中, Dunbar 进一步讨论了具有 Holling II 功能反应函数的 Lotka-Volterra 扩散系统, 研究了当 $d_1 = 0$ 时存在连结边界平衡点和一条共存周期轨道的行波解. 几乎同时, Gardner^[24]应用连结指标的方法研究了食饵-捕食者扩散系统的行波解. 详见细节可参考文献[25]. Mischaikow 等^[26]用 Conley 指标、连续性原理和连结矩阵的理论方法研究了不同种类的抽象食饵-捕食者扩散系统行波解的存在性. 2003 年, Huang 等研究了当 $d_1 \neq 0$ 时 Holling II 型食饵-捕食者系统存在连结两个平衡点的行波解以及小振幅的周期行波. Li 等^[27]考虑了当 $d_1 = 0$ 时 Holling III 型食饵-捕食者系统, 并给出了类似文献[28]的结

收稿日期: 2017-01-18.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 浙江省自然科学基金 (LY14A010004).

第一作者: 李慧茹 (1990-), 女, 河南商丘人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 微分方程. E-mail: 1203585545@qq.com

*通信作者: 肖海滨 (1973-), 男, 江西南康人, 博士, 主要研究方向: 微分方程与动力系统. E-mail: xiaohaibin@nbu.edu.cn

果. 文献[27-28]中应用的证明方法是 Dunbar^[21-22]中所应用的拓扑打靶法和 Hopf 分岔定理. 近年来, 许多学者仍在进一步研究食饵-捕食者系统的行波解, 如 Lin 等^[29]将文献[27]的结果推广到更一般的系统. 此外, Hsu 等^[30]和 Huang^[31]分别研究了更一般增长函数和功能反应函数的食饵-捕食者系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = d_1 \Delta u(x,t) - h(u(x,t))(g(v(x,t)) - p(u(x,t))), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = d_2 \Delta v(x,t) - l(v(x,t))q(u(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (2)$$

及

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = B(u(x,t)) - f(u(x,t))v(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = d \Delta v(x,t) + (\beta f(u(x,t)) - \mu)v(x,t), & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $p(u), g(v), h(u), l(v)$ 及 $q(u)$ 是光滑函数, 且满足一些单调条件的假设下, 文献[30]给出了系统(2)具有连结不同平衡点的行波解. 而 Huang^[31]在函数 $f(u)$ 和 $B(u)/f(u)$ 非单调的假设下, 证明了系统(3)连结不同平衡点行波解的存在. 而文献[30-31]的结论几乎涵盖了上述其他文献的相关结果. 例如, 它可以应用到 Ivlev 型的食饵-捕食者扩散系统, 这种扩散系统还从未被讨论过.

本文将重点研究如下一般非线性密度制约的食饵-捕食者扩散系统具有连结边界平衡点与共存平衡点的行波解,

$$\begin{cases} \frac{du(x,t)}{dt} = B(u(x,t)) - f(u(x,t))v(x,t), & x \in R, t > 0, \\ \frac{dv(x,t)}{dt} = d \Delta v(x,t) + \beta v(x,t)f(u(x,t)) - h(v(x,t)), & x \in R, t > 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中食饵的增长函数 $B(u)$ 和食饵-捕食者系统的功能反应函数 $f(u)$ 满足文献[31]中类似的条件; 正数 d 为捕食者的扩散系数. 捕食者的非线性增长函数 $h(v)$ 在下文中会给出具体假设, 函数 $h(v)$ 在大多数文献中, 往往被看作为特殊的且没有考虑密度制约的线性函数 $h(v) = \mu v$. 正如文献

[14-15, 32-34]中所述, 食物是捕食者的主要限制因素, 因此, 种间竞争往往存在于捕食者之间的假设不仅是合理的, 而且还是必要的. 因此, 研究捕食者具有某种密度制约的扩散系统(4)的动力学具有重要的生物学意义. 本文的研究动机是阐明在[31]中建立的行波解在捕食者具密度制约的情况下是否可以保持. 系统(4)相应反应方程组是下列常微分方程组

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = B(u) - f(u)v, & t > 0, \\ \frac{dv}{dt} = \beta f(u)v - h(v), & t > 0. \end{cases} \quad (5)$$

对系统(4)作如下假设, $B(u), f(u)$ 和 $h(v)$ 是 C^1 类函数且满足:

(A1) 存在一个常数 $K > 0$, 使 $B(0) = B(K) = 0$, $B'(K) < 0, B'(0) > 0$. 且当 $u \in (0, K)$ 时, $B(u) > 0$; 当 $u \in (K, \infty)$ 时, $B(u) < 0$;

(A2) $f(0) = 0$, 当 $u > 0$ 时, $f(u) > 0$. 系统(5)有唯一的共存平衡点 (u_*, v_*) , 且满足

$$v_* = \frac{B(u_*)}{f(u_*)}, f(u_*) = \frac{h(v_*)}{\beta v_*}. \quad (6)$$

此外, $f(u)$ 满足当 $u \in (0, u_*) \cup (u_*, K]$ 时, $(f(u) - f(u_*)) \times (u - u_*) > 0$;

(A3) $g(u) = \frac{B(u)}{f(u)}$ 满足 $u \in (0, u_*) \cup (u_*, K]$ 时,

$$(g(u) - g(u_*)) \times (u - u_*) < 0; \quad (8)$$

(A4) $h(0) = 0$, $h'(0) > 0$, 且函数 $\frac{h(v)}{v}$ 在 $(0, +\infty)$ 上非减函数, 此外, 存在常数 $\delta > 0$ 对任何的 $v > 0$, 均有

$$\frac{h(v)}{v} - h'(0) \geq \delta v. \quad (9)$$

在假设(A1)~(A4)下, 常微分系统(5)有 3 个非负平衡点: $E_0 = (0, 0)$, $E_1 = (K, 0)$ 及 $E_2 = (u_*, v_*)$. 本文的目的就是证明系统(4)存在连结平衡点 E_1 和 E_2 的非负行波解, 即系统(4)有如下形式的行波解:

$$u(x, t) = u(x + ct), v(x, t) = v(x + ct), \quad (10)$$

并满足边界条件:

$$(u(-\infty), v(-\infty)) = E_1, (u(+\infty), v(+\infty)) = E_2, \quad (11)$$

其中 $c > 0$ 为行波速度. 系统(4)满足条件(10)和(11)的行波解的存在性表明存在连结平衡点 E_1 和 E_2 的过渡区, 称为“波的侵入”. 更多生物学意义上的

行波可参考文献[21,25,31]. 本文主要结果如下:

定理 1 假设(A1)~(A4)成立, 则如下结论成立:

(1) 若 $0 < c < 2\sqrt{d(\beta f(K) - h'(0))}$, 则系统(4)不存在连结 E_1 和 E_2 的非负行波解;

(2) 若 $c \geq 2\sqrt{d(\beta f_M - h'(0))}$, 则系统(4)存在连结 E_1 和 E_2 的非负行波解, 其中 $f_M = \max\{f(u) : u \in [u_*, K]\}$.

尽管定理 1 的证明方法与文献[31]中的方法类似, 这里要强调的是从微分方程定理理论的角度来看, 定理 1 的结论不是文献[31]的直接推广. 首先, 我们考虑的系统更一般, 且研究的结果包含了文献[21-22,27,29,31]的所有相关结果. 其次, 在证明定理 1 的过程中, 有两个实质性困难需要克服: 其一是似 Wazewski 集 Σ 的构造. 对于系统(4)的向量场在以任何平面做成的上边界上 P_2 均不会指向 Σ 的外部, 为此, 我们以平面系统(13)在奇点(0,0)处的不稳定流形的正分支来建立 Σ 的上边界, 从而克服了这一困难; 其二是不变轨道的一致正有界性的证明, 与文献[31]不同的是没有直接的依据来证明不变轨道的一致正有界性. 故在此需要预先证明不变轨道的正向有界性以保证轨道会完全位于期望的楔形区域内, 再进一步借助 Lyapunov 函数来证明不变轨道的一致正有界性. 本节结束前再对定理 1 作如下注释.

注 1 对系统(5)具有唯一的共存平衡点 (u_*, v_*) 的假设是合理的. 例如, 当 $f'(u) > 0 (u > 0)$ 且 $h(v) = \mu v + \delta v^2$, 常数 $\mu > 0$, $\delta > 0$ 足够小时, 捕食者和食饵的等倾线在第一象限内交于一点. 事实上, 用 $u_0 \in (0, K)$ 表示使式子 $f(u_0) = \mu / \beta$ 成立的唯一的数且定义如下两个正数

$$M_0 = \max_{u \in [u_0, K]} g'(u), M_1 = \min_{u \in [u_0, K]} f'(u).$$

易得食饵的等倾线 $v = g(u) = B(u) / f(u)$ 和捕食者的等倾线 $v = l(u) = (\beta f(u) - \mu) / \delta$ 在第一象限内至少有 1 个交点, 且均位于 $u_0 \leq u \leq K$ 内. 此外, 当 $\delta < \beta M_1 / M_0$ 时, 有

$$l'(u) = \beta f'(u) / \delta \geq \beta M_1 / \delta > M_0 \geq g'(u),$$

$$u_0 \leq u \leq K,$$

故 2 条等倾线在 $u_0 \leq u \leq K$ 内有且仅有 1 个交点.

注 2 就相应的反应方程而言, 尽管系统(2)比系统(3)更一般化, 但系统(4)不是系统(2)的特例.

注 3 若 $f(K) = f_M$, 且 $f(u)$ 在 $[0, K]$ 上单调, 则 $c = 2\sqrt{d(\beta f_M - \mu)}$ 是系统(4)连结 E_1 和 E_2 行波解的最小波速. 若 $f(K) < f_M$ 且 $2\sqrt{d(\beta f(K) - \mu)} \leq c < 2\sqrt{d(\beta f_M - \mu)}$, 系统(4)是否存在一个连结 E_1 和 E_2 的行波解仍是一个开问题.

注 4 定理 1 表明: 文献[31]中建立的行波解在考虑捕食者具有一般非线性密度制约的情形下是可以保持的.

1 似 Wazewski 集 Σ 的构造和连接轨道

据文献[31]中相似的论证, 我们仅需考虑以下三维系统的解 $(u(t), v(t), w(t))$ 的存在:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f(u)(g(u) - v), \\ \frac{dv}{dt} = \frac{c^2}{d}(v - w), \\ \frac{dw}{dt} = \beta f(u) - h(v), \end{cases} \quad (12)$$

其中 $u(t) \geq 0$, $v(t) \geq 0$, 并满足边界条件:

$$(u(-\infty), v(-\infty), w(-\infty)) = (K, 0, 0),$$

$$(u(+\infty), v(+\infty), w(+\infty)) = (u_*, v_*, v_*).$$

在下文中, 我们仍分别用 E_1 和 E_2 重命名系统(12)的两个平衡点 $(K, 0, 0)$ 和 (u_*, v_*, v_*) .

首先, 我们考虑下面的平面常微分系统

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{c^2}{d}(v - w), \\ \frac{dw}{dt} = -h(v). \end{cases} \quad (13)$$

系统(13)在平衡点(0,0)处的雅可比矩阵是

$$\begin{pmatrix} c^2/d & -c^2/d \\ -h'(0) & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

特征值是

$$k_1 = \left(\frac{c^2}{d} + \sqrt{\frac{c^4}{d^2} + \frac{4c^2 h'(0)}{d}} \right) / 2 > 0,$$

$$k_2 = \left(\frac{c^2}{d} - \sqrt{\frac{c^4}{d^2} + \frac{4c^2 h'(0)}{d}} \right) / 2 < 0.$$

因此系统(13)在平衡点(0,0)处有一维全局不稳定流形 Γ 的正分支, 可用如下的解时间参数化

$$\begin{cases} v = \varphi(t), \\ w = \psi(t), \end{cases} \quad (15)$$

且满足初值 $(\varphi(0), \psi(0)) = (v_0, w_0)$, 全局流形 Γ 的

分支完全位于三角形区域 $\{v, w | w > v > 0\}$ 内, 并且可用下列函数表示其图像

$$w = G(v) = \psi(\varphi^{-1}(v)), \quad v > 0, \quad (16)$$

其中函数 $G(v)$ 满足常微分方程

$$c^2(v - G(v))G'(v) / d + h(v) = 0. \quad (17)$$

基于上述准备, 可定义一个无界区域 $\Sigma \in R^3$ 如下:

$$\Sigma = \{(u, v, w) | 0 \leq u \leq K, v \geq 0, v/2 \leq w \leq G(v)\}, \quad (18)$$

其中函数 $G(v)$ 是满足条件(16)和(17)的光滑函数.

其中 Σ 的边界由如下的 $P_i (i=1, 2, 3, 4)$ 4 部分

$$P_1 = \{(u, v, w) | 0 < u < K, v > 0, w = v/2\}, \quad (19)$$

$$P_2 = \{(u, v, w) | 0 < u < K, v > 0, w = G(v)\},$$

$$P_3 = \{(u, v, w) | u = 0, v > 0, v/2 \leq w \leq G(v)\},$$

$$P_4 = \{(u, v, w) | u = K, v > 0, v/2 \leq w \leq G(v)\},$$

和 1 条线段 $l = \{(u, v, w) | 0 \leq u \leq K, v = w = 0\}$ 构成.

令 $\Phi_t(p)$ 是系统(12)定义的流, 即 $(u(t), v(t), w(t)) = \Phi_t(p)$ 是系统(12)满足初值 $\Phi_0(p) = p$ 的一个解. 通过一些简单的计算可以得到当 $c \geq 2\sqrt{d(\beta f_M - h'(0))}$ 时, $\Phi_t(p)$ 在任何正的时间都不会从 Σ 中 $P_3 \cup P_4 \cup \zeta$ 的边界离开 Σ 及系统(12)的向量场均指向 Σ 外部. 同时, 也可得到如下引理.

引理 1 对任何的点 $p \in P_2$, 系统(12)的向量场均指向 Σ 的外部.

证明 仅需证明在任何点 $p(u, v, w) \in P_2$, 系统(12)轨迹的切向量与 Σ 的外法向量 $(0, -G'(v), 1)$ 的点积非负即可. 事实上, 由(17)可得

$$(u, v, w) \cdot (0, -G'(v), 1) = \beta f(u)v - c^2(v - w) \times G'(v) / d - h(v) = \beta f(u)v > 0.$$

证毕.

下面将继续研究系统(12)在平衡点 E_1 处的不稳定流形. 系统(12)在平衡点 E_1 处的线性化系统

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = B'(K)u - f(K)v, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{c^2}{d}(v - w), \\ \frac{dw}{dt} = (\beta f(K) - h'(0))v. \end{cases} \quad (20)$$

其系统矩阵有 2 个正的特征值

$$\begin{cases} \lambda_1 = (c^2 + \sqrt{c^4 - c^2 d \sqrt{\beta f(K) - h'(0)}}) / (2d), \\ \lambda_2 = (c^2 - \sqrt{c^4 - c^2 d \sqrt{\beta f(K) - h'(0)}}) / (2d), \end{cases}$$

和 1 个负的特征值 $\lambda_3 = B'(K)$. 3 个特征值所对应的特征向量分别是

$$\begin{cases} h_1 = \left[\frac{f(K)}{B'(K) - \lambda_1}, 1, \frac{d\lambda_2}{c^2} \right]^T, \\ h_2 = \left[\frac{f(K)}{B'(K) - \lambda_2}, 1, \frac{d\lambda_1}{c^2} \right]^T, \end{cases}$$

和 $h_3 = [1, 0, 0]^T$. 故系统(12)在平衡点 E_1 处有 1 个二维的不稳定流形 ε_K^u 和一维的稳定流形.

根据文献[31]中引理 3 的相似分析可得: 当 $c \geq 2\sqrt{d(\beta f_M - h'(0))}$ 时, 存在连接 $p_1^* \in P_1$ 和 $p_2^* \in P_2$ 的 1 条曲线 $\gamma \in \varepsilon_K^u$, 使 $\gamma \setminus \{p_1^*, p_2^*\} \in \Sigma$. 同时, 由文献[31]中的命题 3.1 的相似方法, 可得当 $c \geq 2\sqrt{d(\beta f_M - h'(0))}$ 时, 系统(12)存在不变轨道

$$\gamma_0 = \{(u(t), v(t), w(t)) | t \in R\} \subset \Sigma, \quad (21)$$

且满足条件

$$(u(t), v(t), w(t)) \rightarrow (K, 0, 0), \quad t \rightarrow -\infty. \quad (22)$$

下面继续研究轨道 γ_0 当 $t \rightarrow +\infty$ 时的极限状态, 首先给出以下引理.

引理 2 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 轨道 $\gamma_0 = \{(u(t), v(t), w(t)) | t \in R\}$ 是有界的, 即 γ_0 是正向有界的.

证明 固定正数 $r_0 \geq \sqrt{5}c^2 / (d\delta)$. 考虑 $P_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 所围成的有界区域 Σ' , 其中 P_5 是圆柱的一部分:

$$P_5 = \{(u, v, w) | v^2 + w^2 = r_0^2, 0 \leq u \leq K, 0 \leq v/2 \leq w\}, \quad (23)$$

且在 P_5 上的外法向量为 $(0, 2v, 2w)$. 假设轨迹 γ_0 在时刻 t_0 首次经过 P_5 上的某点 p_0 , 则轨道的切向量和点 p_0 处法向量的内积是非负的, 即

$$(u(t_0), v(t_0), w(t_0)) \cdot (0, 2v(t_0), 2w(t_0)) \geq 0. \quad (24)$$

然而, 另一方面,

$$\begin{aligned} (u(t_0), v(t_0), w(t_0)) \cdot (0, 2v(t_0), 2w(t_0)) &= \\ 2c^2(v(t_0) - w(t_0))v(t_0) / d + \\ 2w(t_0)(\beta f(u(t_0))v(t_0) - h(v(t_0))) &= \\ 2\left(\frac{c^2}{d} - \frac{h(v(t_0)) - h'(0)v(t_0)}{v^2(t_0)}\right)w(t_0)v^2(t_0) + \\ 2((\beta f(u(t_0)) - h'(0)) - c^2 / d)v(t_0)w(t_0) &\leq \\ 2(c^2 / d - \delta w(t_0))v^2(t_0) + 2((\beta f(u(t_0)) - \\ h'(0)) - c^2 / d)v(t_0)w(t_0). \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \text{由 } c \geq 2\sqrt{d(\beta f_M - h'(0))}, \text{ 可得} \\ & (\beta f(u(t_0)) - h'(0)) - c^2/d < \\ & -3(\beta f_M - h'(0)) < 0. \end{aligned} \quad (26)$$

而且, 由轨迹 γ_0 在 Σ' 内的不变性质,

$$v^2(t_0) + w^2(t_0) = r_0^2 \geq \frac{5c^4}{d^2\delta^2}, \quad \frac{w(t_0)}{v(t_0)} \geq \frac{1}{2}, \quad (27)$$

它隐含

$$c^2/d - \delta w(t_0) < 0. \quad (28)$$

事实上, 若(28)不成立, 则可得如下矛盾:

$$v^2(t_0) + w^2(t_0) = r_0^2 < 4w^2(t_0) + w^2(t_0) \leq \frac{5c^4}{d^2\delta^2}.$$

故由(25), (26)和(28)可得:

$$(u(t_0), v(t_0), w(t_0)) \cdot (0, 2v(t_0), 2w(t_0)) < 0, \quad (29)$$

与(24)相矛盾. 因此, 轨道 γ_0 会一直处于有界区域 Σ' 的内部. 证毕.

由引理 2 即可得下列引理.

引理 3 对轨道 $\gamma_0 = \{(u(t), v(t), w(t)) | t \in R\}$, 均存在一个正数 δ , 使

$$\frac{1}{2} \leq \frac{w(t)}{v(t)} \leq \sigma, \quad t \in R. \quad (30)$$

证明 只须证明右边不等式, 记 l' 是 P_2 和 P_5 的相交曲线, 其中 P_2 和 P_5 分别由(19)和(23)定义, l' 的集合可用如下公式表示

$$\{(u, H^{-1}(r_0^2), G(H^{-1}(r_0^2))) | 0 < u < K\}, \quad (31)$$

其中函数 $H(v) = G^2(v) + v^2$, $G(v)$ 由(16)定义. 给定时间 $t_0 > 0$,

$$(H^{-1}(r_0^2), G(H^{-1}(r_0^2))) = (\varphi(t_0), \psi(t_0)),$$

其中 $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ 为方程(13)在时刻 t_0 经过点 $(H^{-1}(r_0^2), G(H^{-1}(r_0^2)))$ 的解, 则函数

$$k(t) = \psi(t) / \varphi(t), \quad t \in (-\infty, t_0], \quad (32)$$

当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $k(t) \rightarrow k_1$, 则函数 $k(t)$ 存在上确界 $\sigma < +\infty$. 故定义如下无界楔形区域 Σ''

$$\begin{aligned} \Sigma'' = \{ & (u, v, w) | 0 \leq u \leq K, v \geq 0, \\ & v/2 \leq w \leq \sigma v \}, \end{aligned} \quad (33)$$

且可得

$$\gamma_0 \subset (\Sigma' \cap \Sigma''), \quad (34)$$

故不等式(30)成立. 证毕.

下面将进一步研究轨道 γ_0 的一致正有界性, 这对研究 $t \rightarrow +\infty$ 的极限动态是至关重要的. 利用引理 3 和构造的 Lyapunov 函数, 可得引理 4.

引理 4 轨道 $\gamma_0 = \{(u(t), v(t), w(t)) | t \in R\}$ 中分量 $v(t), w(t)$ 是一致正有界的, 即存在两个正数 $M_i (i=1, 2)$, 对任何的 $t \in R$, 使

$$M_1 \leq v(t), \quad w(t) \leq M_2. \quad (35)$$

证明 对轨道 $\gamma_0 = \{(u(t), v(t), w(t)) | t \in R\}$ 定义 $[0, \infty) \rightarrow R$ 上的函数 L :

$$\begin{aligned} L(t) = & \int_{u_*}^{u(t)} \frac{f(s) - f(u_*)}{f(s)} ds + \\ & \frac{1}{\beta} (w(t) - g(u_*) \frac{w(t)}{v(t)} - g(u_*) \ln v(t)). \end{aligned} \quad (36)$$

其中 u_* 在假设条件(A2)中被定义. 利用(6)和系统(12), 计算 $L(t)$ 的导数如下:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} = & (f(u(t)) - f(u_*))(g(u(t)) - v(t)) + \\ & f(u(t))v(t) - h(v(t)) / \beta - \\ & \frac{g(u_*)(\beta f(u(t))v(t) - h(v(t)))v(t)}{\beta v(t)^2} + \\ & \frac{g(u_*)c^2(v(t) - w(t))w(t)}{d\beta v(t)^2} - \\ & \frac{g(u_*)c^2(v(t) - w(t))}{d\beta v(t)} = f(u(t))g(u(t)) - \\ & f(u(t))v(t) - f(u_*)g(u(t)) + f(u_*)v(t) + \\ & f(u(t))v(t) - \frac{h(v(t))}{\beta} - g(u_*)f(u(t)) + \\ & \frac{g(u_*)h(v(t))}{\beta v(t)} - \frac{c^2 g(u_*)}{d\beta v(t)^2} (v(t) - w(t))^2 = \\ & f(u(t))g(u(t)) - f(u_*)g(u(t)) - \\ & g(u_*)f(u(t)) + g(u_*)f(u_*) - g(u_*)f(u_*) + \\ & f(u_*)v(t) - \frac{h(v(t))}{\beta} + \frac{g(u_*)h(v(t))}{\beta v(t)} - \\ & \frac{c^2 g(u_*)}{d\beta v(t)^2} (v(t) - w(t))^2 = \\ & (g(u(t)) - g(u_*))(f(u(t)) - f(u_*)) - \\ & \frac{h(v_*)}{\beta} + \frac{h(v_*)v(t)}{\beta v_*} - \frac{h(v(t))}{\beta} + \\ & \frac{v_* h(v(t))}{\beta v(t)} - \frac{c^2 g(u_*)}{d\beta v(t)^2} (v(t) - w(t))^2 = \\ & (g(u(t)) - g(u_*))(f(u(t)) - f(u_*)) + \\ & (\frac{h(v_*)}{\beta v_*} - \frac{h(v(t))}{\beta v(t)})(v(t) - v_*) - \\ & \frac{c^2 g(u_*)}{d\beta v(t)^2} (v(t) - w(t))^2. \end{aligned} \quad (37)$$

由假设条件(A2)~(A4)可得, 当 $t \geq 0$ 时, $\frac{dL}{dt} \leq 0$. 利用(30)和文献[31]中命题 3.1 类似证明, 可推断出(35). 证毕.

利用上述引理 4 和文献[31]中的证明方法, 可得下述引理 5, 从而完成期待的连结 E_1 和 E_2 的轨道的建立.

引理 5 若 $c \geq 2\sqrt{d(\beta f_M - h'(0))}$, 则 $\gamma_0 = \{(u(t), v(t), w(t)) | t \in R\}$ 是连结平衡点 E_1 和 E_2 的非负轨道.

2 定理 1 的证明

因系统(12)和文献[31]中的系统(2.3)在平衡点 $(K, 0, 0)$ 处有相同的线性系统(20), 且文献[31]对定理 1 中(a)部分的证明与定理 1 中(1)部分的证明完全相同. 而引理 5 正是定理 1 中的(2)部分, 证毕.

参考文献:

- [1] FREEDMAN H I. Deterministic mathematical models in population ecology[J]. *Biometrics*, 1980, 22(7):219-236.
- [2] SUGIE J. Two-parameter bifurcation in a predator-prey system of Ivlev type[J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 1998, 217(2):349-371.
- [3] ARDITO A, RICCIARDI P. Lyapunov functions for a generalized Gause-type model[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1995, 33(8):816-828.
- [4] HASSELL M P. The Dynamics of Arthropod Predator-Prey Systems[M]. Princeton: Princeton University Press, 1978:1-65.
- [5] HWANG T W. Uniqueness of limit cycle for Gause-type predator-prey systems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1999, 238(1):179-195.
- [6] HWANG T W. Global analysis of the predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response[J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2003, 281(1):395-401.
- [7] HSU S B, HWANG T W, KUANG Y. Global analysis of the Michaelis-Menten-type ratio-dependent predator-prey system[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2001, 42(6):489-506.
- [8] KOT M. Elements of Mathematical Ecology[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001:50-80.
- [9] KUANG Y, FREEDMAN H I. Uniqueness of limit cycles in Gause-type predator-prey systems[J]. *Mathematical Biosciences*, 1988, 88(1):67-84.
- [10] KOOLIJ R E, ZEGELING A. A predator-prey model with Ivlev's functional response[J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 1996, 198(2):473-489.
- [11] LI H, TAKEUCHI Y. Dynamics of the density dependent predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response[J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2011, 374(2):644-654.
- [12] XIAO D M, ZHANG Z F. On the uniqueness and non-existence of limit cycles for predator-prey systems[J]. *Nonlinearity*, 2003, 16(3):1185-1201.
- [13] CANTRELL S, COSNER C, RUAN S. Spatial Ecology[M]. New York: CRC Press, 2009.
- [14] QIU X X, XIAO H B. Qualitative analysis of Holling type II predator-prey systems with prey refuges and predator restricts[J]. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, 2013, 14(4):1896-1906.
- [15] VOLPERT A I, VOLPERT V A. Traveling wave solutions of parabolic systems[J]. *Nonlinear Analysis*, 2002, 49(1):113-139.
- [16] LEWIS M A, LI B, WEINBERGER H F. Spreading speed and linear determinacy for two-species competition models[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2002, 45(3):219-233.
- [17] LEWIS M A, LI B. Spreading speed, traveling waves, and minimal domain size in impulsive reaction-diffusion models[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2012, 74(10):2383-2402.
- [18] HUANG W, HAN M. Non-linear determinacy of minimum wave speed for a Lotka-Volterra competition model[J]. *Journal of Differential Equations*, 2011, 251(6):1549-1561.
- [19] XIN J. Front propagation in heterogeneous media[J]. *SIAM Review*, 2000, 42(2):161-230.
- [20] CHOW P L, TAM W C. Periodic and traveling wave solutions to Volterra-Lotka equations with diffusion[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1976, 38(6):643-658.
- [21] DUNBAR S R. Traveling wave solutions of diffusive Lotka-Volterra equations[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1983, 17(1):11-32.
- [22] DUNBAR S R. Traveling wave solutions of diffusive Lotka-Volterra equations: A heteroclinic connection in R^4 [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1984, 286(2):557-594.
- [23] DUNBAR S R. Traveling wave in diffusive predator-prey equations: Periodic orbits and point-to-periodic heteroclinic orbits[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1986, 46(6):1057-1078.

- [24] GARDNER R A. Existence of traveling wave solutions of predator-prey systems via the connection index[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1984, 44(1):56-79.
- [25] MURRAY J D. Mathematical Biology[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [26] MISCHAIKOW K, REINECK J F. Traveling waves in predator-prey systems[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1993, 24(5):1179-1214.
- [27] LI W T, WU S L. Traveling waves in a diffusive predator-prey model with holling type-III functional response[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 37(2):476-486.
- [28] HUANG J, LU G, RUAN S. Existence of traveling wave solutions in a diffusive predator-prey model[J]. Journal of Mathematical Biology, 2003, 46(2):132-152.
- [29] LIN X, WENG P, WU C. Traveling wave solutions for a predator-prey system with sigmoidal response function[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2011, 23(4):903-921.
- [30] HSU C H, YANG C R, YANG T H, et al. Existence of traveling wave solutions for diffusive predator-prey type systems[J]. Journal of Differential Equations, 2012, 252(4): 3040-3075.
- [31] HUANG W. Traveling wave solutions for a class of predator-prey systems[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2012, 24(3):633-644.
- [32] DEANGELIS D L, GOLDSTEIN R A, O'NEILL R V. A model for tropic interaction[J]. Ecology, 1975, 56(4):881-892.
- [33] HAIRSTON N G. Community structure, population control, and competition[J]. The American Naturalist, 1960, 94 (879):421-425.
- [34] LEVIN S A. A more functional response to predator-prey stability[J]. The American Naturalist, 1977, 111(978):381-383.

Traveling wave solutions for diffusive predator-prey type systems with general density dependence

LI Hui-ru, XIAO Hai-bin^{*}

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, a traveling wave solution for a class of diffusive predator-prey system with nonlinear density dependence is considered. Using methods of topological shooting, we show the existence of a non-negative traveling wave solution, which connects a boundary equilibrium to the co-existence equilibrium facilitated by a Wazewski-like set combined with a Lyapunov function. These mean Huang's results are generalized for prospective applications.

Key words: traveling wave solutions; connecting orbits; diffusive predator-prey systems; density dependence; minimum wave speed

(责任编辑 韩 超)