

基于量子编码的两量子比特丢失纠错

韩超^{1,2}

(1.宁波大学 学报编辑部, 浙江 宁波 315211; 2.宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 提出一种利用 6 位物理比特编码为 1 位逻辑比特的量子编码与纠错方案. 当通信过程中出现 2 比特丢失时, 利用量子编码引入的冗余信息, 通过补充处于基态的量子比特, 并执行特定的逻辑操作和投影测量, 便可实现纠错. 结果表明, 以吸收系数为 $0.03 \text{ dB} \cdot \text{km}^{-1}$ 的光纤为传输通道, 当通信距离大于 61.25 km 时, 本方案通信效率优于以往方案.

关键词: 量子编码; 量子纠错; 比特丢失; 量子通信

中图分类号: O413

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2018) 01-0059-03

量子干涉效应很容易受到环境不可控的相互作用影响, 导致在极端敏感的量子信息处理过程中产生错误. 为了充分发挥量子信息的优势, 这些错误必须被有效地纠正. 在量子信息处理的发展过程中, 人们很早就意识到了这个问题, 因此建立了相应的量子纠错理论^[1-2]. 通过引入冗余, 量子纠错能在由环境引起的退相干中保护脆弱的量子信息. 一些实验已经进行了演示的实现^[3-6].

事实上, 量子信息过程中最难被纠正的错误是量子比特的丢失. 以光子作为量子比特的载体, 光纤作为通信的信道为例, 随着光纤的长度增长, 其对光子的吸收呈指数式增长. 所以要成功传输一个光子, 传输次数将随信道长度指数增长. 近年来, 一些基于量子编码的量子比特丢失纠错方案陆续被提出^[7-12]. 然而这些方案都是针对单个量子比特丢失的纠错. 在通信距离较长的情况下, 在编码的多位物理比特中若发生 2 比特丢失情况, 则上述方案无法完成纠错.

本文针对同时有 2 个光子丢失的情况, 设计一种基于量子编码的纠错方案, 利用量子非破坏性测量(QND)装置探测光子丢失的位置, 通过单光子枪制备处于特定初始态的光子来代替丢失的光子, 将比特丢失的错误转化成标准的量子比特错误后, 再利用 Calderbank-Shor-Steane 码^[13-14]的标准量子

纠错方案进行纠错.

1 编码方式

采用如下方式, 将 6 位物理比特编码成 1 位逻辑比特:

$$\begin{aligned} |0\rangle_L &= (|000000\rangle + |111111\rangle) / \sqrt{2}, \\ |1\rangle_L &= (|000111\rangle + |111000\rangle) / \sqrt{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

该编码可以采用图 1 所示的量子电路来实现.

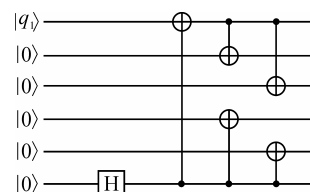


图 1 量子编码电路

第 1 位比特的态即为单比特逻辑态, 第 2~6 位量子比特处于态 $|0\rangle$. 第 6 比特经 Hadamard(H)门操作后演化为 $(|0\rangle + |1\rangle) / \sqrt{2}$. 再以第 6 位比特为控制位, 分别对第 1, 4, 5 位执行受控非(CNOT)门操作, 以第 1 位为控制位, 分别对第 2, 3 位执行 CNOT 门操作, 即可完成(1)式所示的编码.

2 纠错过程

单量子比特态可表示为 $|\psi\rangle = c_1|0\rangle_L + c_2|1\rangle_L$, 其中 $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. 利用图 2 所示的量子电路可以

实现对 2 位量子比特丢失的错误进行纠正.

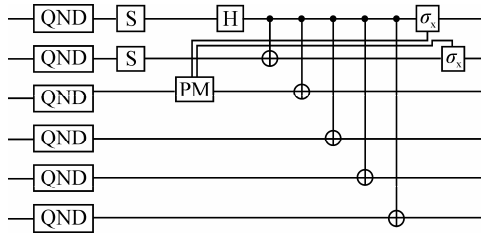


图 2 两比特丢失的量子纠错电路

以第 1, 2 位量子比特发生丢失的情况为例. 利用 QND 检测丢失比特的位置, 并触发出错位相应的光子源(S), S 制备处于 $|0\rangle$ 态的光子. 随后对第 3 位比特做投影测量(PM), 使得该 6 比特系统由混合态坍缩到某个纯态, 随后的 H 门和 CNOT 门以及 σ_x 操作可使得正确的量子态得以重现.

对于混合态, 需用密度矩阵形式表示. 本文用纯态概率分布的形式来表示系统的状态^[7], 以使描述简洁且易于理解, 即 $\rho = \sum_k p_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k| = \{(c_1, p_1), \dots, (c_m, p_m)\}$, 其中 $\sum_k p_k = 1$. 则系统初始态可写为:

$$\rho_0 = \{(c_1(|000000\rangle + |111111\rangle) + c_2(|000111\rangle + |111000\rangle)) / \sqrt{2}, 1\}. \quad (2)$$

现考虑前 2 个光子丢失, 此时剩余粒子处于混合态. 通过 QND 装置探测到前 2 位出错后, 相应的单光子枪各制备 1 个处于 $|0\rangle$ 态的光子来替代丢失了的光子, 系统态变为:

$$\rho_1 = \{(c_1|000000\rangle + c_2|000111\rangle, 1/2), (c_1|001111\rangle + c_2|001000\rangle, 1/2)\}, \quad (3)$$

式中的第 3 位比特投影到不同态时, 系统将由混合态坍塌到某一纯态. 因此对该比特做测量, 若测量结果是“0”, 那么 ρ_1 坍缩为:

$$\rho_2 = \{c_1|000000\rangle + c_2|000111\rangle, 1\}. \quad (4)$$

对第 1 位比特执行 H 门操作, 则可得叠加态:

$$\rho_3 = \{(c_1(|000000\rangle + |100000\rangle) + c_2(|000111\rangle + |100111\rangle)) / \sqrt{2}, 1\}. \quad (5)$$

然后以第 1 位比特作为控制位, 其他各位比特作为目标位, 分别执行 CNOT 门操作, 则系统态演化为:

$$\rho_4 = \{(c_1(|000000\rangle + |111111\rangle) + c_2(|000111\rangle + |111000\rangle)) / \sqrt{2}, 1\}. \quad (6)$$

由(6)式和(2)式可看出 $\rho_4 = \rho_0$, 也就是说完成了对 2 比特丢失的纠错.

如果对第 3 位比特的投影测量结果为“1”, 那么 ρ_1 就坍缩为:

$$\rho'_2 = \{c_1|001111\rangle + c_2|001000\rangle, 1\}. \quad (7)$$

同样对第 1 位比特执行 H 门操作, 随后以第 1 位比特作为控制位, 其他各位比特分别作为目标位, 各自执行 CNOT 操作, ρ'_2 将演化成:

$$\rho'_3 = \{(c_1(|001111\rangle + |110000\rangle) + c_2(|001000\rangle + |110111\rangle)) / \sqrt{2}, 1\}. \quad (8)$$

最后再对前 2 位量子比特作 σ_x 操作, 即比特翻转操作, 系统态演化为:

$$\rho'_4 = \{(c_1(|000000\rangle + |111111\rangle) + c_2(|000111\rangle + |111000\rangle)) / \sqrt{2}, 1\}. \quad (9)$$

同样不难发现 $\rho'_4 = \rho_0$, 即对前 2 比特丢失的纠错成功.

如果是第 1 和第 3 位比特丢失, 则需对第 2 位比特做投影测量; 如果是第 2 和第 3 位比特丢失, 那么需对第 1 位比特做投影测量, 其他逻辑操作做相应调整即可. 第 4~6 位上发生 2 比特丢失也可以用类似的方式进行纠错.

3 效率分析

假设光子在光纤中传输, 光纤吸收系数为 α , 长度为 L , 光子传输的成功概率为 p .

假设编码及各逻辑操作都是完美的. 出现 2 个光子丢失情况时, 通过前述编码和纠错方案可恢复逻辑比特态. 当传输距离为 L 时, 丢失光子数 ≤ 2 的总概率为 $p_s = p^6 + 6p^5(1-p) + 15p^4(1-p)^2$.

文献[12]中使用 6 位物理比特编码 2 位逻辑比特, 对单比特丢失的错误进行了纠正, 其相应的成功概率可记为 $p'_s = p^6 + 6p^5(1-p)$. 该方案编码了 2 比特信息, 而本文方案只编码了 1 比特信息, 因此需用 p_s 和 $2p'_s$ 做比较. 定义函数:

$$f(p) \equiv \frac{p_s}{2p'_s} = \frac{10p^2 - 24p + 15}{-10p^2 + 12p}.$$

当 $p < 0.655$ 时, $f(p) > 1$, 传输效率得以提高. 以 $\alpha = 0.03 \text{ dB} \cdot \text{km}^{-1}$ 的光纤为例, 当 $L > 61.25 \text{ km}$ 时, 本方案通信效率比之前方案要高.

4 结论

通过量子编码将少数位逻辑比特编码到多位物理比特, 利用信息冗余可对比特丢失进行纠错.

本文提出了1位到6位的量子编码, 以及针对2比特丢失的纠错方案, 纠错装置包括光探测器、量子逻辑操作门和 QND 装置. 通过对量子纠错过程和系统量子态的演化过程进行演示, 证明了该方案的有效性. 并以光子在光纤中传输为例分析了方案成功的概率. 对于吸收系数为 $0.03 \text{ dB} \cdot \text{km}^{-1}$ 的光纤, 当信息传输距离达到 61.25 km 时, 与之前的方案相比, 本方案通信效率更高, 且相对效率随着距离增大而升高.

参考文献:

- [1] Knill E, Laflamme R. Theory of quantum error-correcting codes[J]. *Physical Review A*, 1997, 55(2):900-911.
- [2] Gottesman D. Theory of fault-tolerant quantum computation[J]. *Physical Review A*, 1998, 57(1):127-137.
- [3] Cory D G, Price M D, Maas W, et al. Experimental quantum error correction[J]. *Physical Review Letters*, 1998, 81(10):2152-2155.
- [4] Chiaverini J, Leibfried D, Schaetz T, et al. Realization of quantum error correction[J]. *Nature*, 2004, 432(7017):602-605.
- [5] Pittman T B, Jacobs B C, Franson J D. Demonstration of quantum error correction using linear optics[EB/OL]. [2016-10-12]. <https://journals.aps.org/prabstract/10.1103/PhysRevA.71.052332>.
- [6] Aoki T, Takahashi G, Kajiya T, et al. Quantum error correction beyond qubits[J]. *Nature Physics*, 2009, 5(8):541-546.
- [7] Gingrich R M, Kok P, Lee H, et al. All linear optical quantum memory based on quantum error correction[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 91(21):217901-217908.
- [8] Vala J, Whaley K B, Weiss D S. Quantum error correction of a qubit loss in an addressable atomic system[EB/OL]. [2016-10-12]. <https://journals.aps.org/prabstract/10.1103/PhysRevA.72.052318>.
- [9] Wasilewski W, Banaszek K. Protecting an optical qubit against photon loss[EB/OL]. [2016-10-12]. <https://journals.aps.org/prabstract/10.1103/PhysRevA.75.042316>.
- [10] Lassen M, Sabuncu M, Huck A, et al. Quantum optical coherence can survive photon losses using a continuous-variable quantum erasure-correcting code[J]. *Nature Photonics*, 2010, 4(10):700-705.
- [11] Han C. Quantum error correction of photon loss with quantum encoding[J]. *Journal of the Korean Physical Society*, 2013, 62(5):721-724.
- [12] 韩超. 基于二到六位比特编码的单量子比特丢失纠错[J]. *宁波大学学报(理工版)*, 2013, 26(1):110-112.
- [13] Calderbank A R, Shor P W. Good quantum error-correcting codes exist[J]. *Physical Review A*, 1996, 54(2):1098-1105.
- [14] Steane A. Multiple-particle interference and quantum error correction[J]. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical and Physical Sciences*, 1996, 452(1954):2551-2577.

Error correction of two-qubit loss based on quantum encoding

HAN Chao^{1,2}

(1.Editorial Department of Journal of Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2.Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: A one-to-six qubit encoding and error correction scheme is presented. By inserting qubits in the ground states, performing specific logic operations and projection measurement, the state of system can be reconstructed due to the redundant information introduced by quantum encoding when two qubits are lost. Taking the optical fiber with absorption coefficient of $0.03 \text{ dB} \cdot \text{km}^{-1}$ as the transmission channel, the results show that the communication efficiency of this scheme is higher than that of the previous schemes when the communication distance is more than 61.25 km.

Key words: quantum encoding; quantum error correction; qubit loss; quantum communication

(责任编辑 章践立)