

控制边长成等比的一类三次空间 Bézier 曲线的挠率分析

姚 燕, 王亚丽, 徐晨东*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 本文针对控制边长成等比、相邻控制边的夹角相等的三次空间 Bézier 曲线, 根据仿射不变性建立空间直角坐标系, 得到曲线挠率的表达式. 然后通过换元简化计算, 得到挠率导数的表达式. 再结合控制多边形的边角几何特征, 利用 Descartes 符号法则分析挠率导数为零时根的分布情况. 从而给出了这类三次空间 Bézier 曲线挠率单调递增和有极小值的参数域刻画. 最后给出了几个典型数值实例.

关键词: 三次空间 Bézier 曲线; 挠率; Descartes 符号法则

中图分类号: O183.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2018) 01-0069-07

通过在一点处的渐进展开, 曲线在该点邻近处的近似形状完全由该点处的曲率和挠率决定, 因此曲率和挠率是曲线的 2 个重要几何特征. 曲线的曲率是计算机辅助几何设计(CAGD)与图形学(CG)中的重要内容, 其单调性与曲线的光顺性也有着很大的关系. 对曲线曲率单调性的研究, 可以让我们对曲线的性质有进一步的认识, 同时也可以为“分段曲率单调”光顺方法^[1]奠定理论基础. 空间曲线的基本描述因素是曲率与挠率, 给定曲线的曲率与挠率后, 空间曲线的形状也就基本确定了. 例如数控加工技术中刀具的加工路线设计, 高架道路的设计, 游乐场过山车的轨道设计等都需要对路线的曲率和挠率进行限制. 很多几何造型设计中, 往往需要曲线满足几何光滑和具有一定的美感, 而要保证这 2 点, 一般需要构造光顺的曲线. 为了得到这些光顺曲线, 设计者可以根据它们曲率的性质, 将它们进行连续拼接. 当然, 对于两段空间曲线段进行连续拼接时, 需要保证其曲率和挠率都具有连续性^[2].

众所周知, Bézier 曲线是 CAGD 和 CG 领域中自由曲线表示方面的重要研究内容^[3]. 近年来, 对其几何特征与性质的研究已经有很多学者给出了比较深入的研究结果, 尤其是曲率特征的分析. 如

1992 年 Sapidis 等^[4]给出了二次 Bézier 曲线段曲率单调的一个简单的几何条件; 1998 年 Ahn 等^[5]找到了二次有理 Bézier 曲线曲率单调的充要条件, 并且其曲率有且仅有一个极小值和极大值; 1999 年 Suenaga 等^[6]通过对曲率导数的分析, 再结合 Descartes 符号法则, 得到了二次有理 Bézier 曲线曲率有极值或单调的充要条件; 2000 年王玉林等^[7]通过分析二次有理 Bézier 曲线的相邻控制边的夹角大小, 得到了其曲率单调的充要条件, 给出了曲率单调的区域图, 并将其与二次 Bézier 曲线相比, 得到的二次有理 Bézier 曲线曲率单调条件具有更大的自由度; 2003 年李重等^[8]研究了二次有理 B 样条曲线, 通过建立斜坐标系, 简化计算过程, 给出了其曲率单调区域, 同时将其与二次有理 Bézier 曲线曲率单调条件进行比较, 得到它们单调的充要条件相类似, 但条件有所不同.

曲线的挠率刻画了曲线发生扭曲的程度, 是曲线的内蕴性质. 目前关于曲线挠率的单调性还没有规律性的结论. 由于 Bézier 曲线在几何造型中的重要性, 研究者首先对这类曲线的挠率分布特征展开研究. 2001 年陈锦辉等^[9]研究了 G^3 连续的有理三次 Bézier 样条曲线造型, 同时证明了空间曲线间的 G^3 连续的本质就是其挠率连续; 根据

收稿日期: 2017-05-18.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11101230; 11371209).

第一作者: 姚燕(1991-), 女, 安徽铜陵人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 计算几何. E-mail: 1511071419@nbu.edu.cn

*通信作者: 徐晨东(1977-), 男, 浙江慈溪人, 副教授, 主要研究方向: 计算机辅助几何设计、计算几何. E-mail: xuchendong@nbu.edu.cn

Bézier 曲线的导矢表达式, 2006 年 Farin^[10]结合控制边与控制顶点之间的关系, 得到了其导数的矩阵形式的表达式, 进而提出了 Class A Bézier 曲线的概念, 结果表明该类曲线满足细分条件, 并且其曲率、挠率都满足单调变化; 2008 年曹娟等^[11]在 Farin 的基础上修改了 Class A 矩阵的条件, 用细分方法证明了其曲率和挠率单调; 2016 年王秋霞等^[12]对两类特殊的三次空间 Bézier 曲线的挠率特征进行了分析, 给出了其挠率有极小值存在或单调递增的充分条件. 由于挠率计算涉及的导数阶数比较高, 因此通常挠率的计算和分析比较复杂. 本文选择了控制边长成等比数列, 且相邻控制边的夹角相等的一类三次空间 Bézier 曲线, 通过计算分析给出了其挠率单调递增和极小值存在的充分条件.

1 预备知识

1.1 Bézier 曲线定义

定义 1 n 次 Bézier 曲线段 $B(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)P_i$, $0 \leq t \leq 1$, 其中 $B_i^n(t) = C_i^n(1-t)^{n-i}t^i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ 为 Bernstein 基函数, P_i 为控制顶点.

1.2 Descartes 符号法则

Descartes 符号法则是由 Descartes 提出的, 它给出了求方程的正根数与负根数的方法, 对于研究方程根的性质有着极其重要的学术价值. 其内容为: 设 $f(x) = 0$ 是一个实系数按降幂方式排列的有理整式方程, 并且没有零根, 那么: (i) 方程 $f(x) = 0$ 的正根的个数要么恰好等于 $f(x)$ 系数的变号个数, 要么比这个变号个数小 2 的倍数; (ii) 方程 $f(x) = 0$ 的负根的个数要么恰好等于 $f(-x)$ 系数的变号个数, 要么比这变号个数小 2 的倍数.

2 控制边长成等比的三次空间 Bézier 曲线的挠率

2.1 控制边长成等比的三次空间 Bézier 曲线

由 Bézier 曲线 $B(t)$ 的表达式可知, 其性状完全由 P_i 和 $B_i^n(t)$ 确定, 与坐标系的选取无关. 不失一般性, 以下选取特定的空间直角坐标系来分析控制边长成等比的三次空间 Bézier 曲线的挠率特征.

三次空间 Bézier 曲线

$$B(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \sum_{i=0}^3 B_i^3(t)P_i,$$

以控制边 P_0P_1 所在直线为 y 轴, 其两条中垂线所在

的直线分别为 x 轴和 z 轴, 建立如图 1 所示的空间直角坐标系, 其中 P'_0 为 P_0 在 xOy 面的投影. 为方便计算, 可假设 P_0 和 P_3 在空间中呈现一定的对称性, 即分别假设 P_0 和 P_3 位于空间直角坐标系的第八和第一卦限. 假设曲线的控制边长成等比、相邻控制边的夹角相等, 可将其各控制边长 P_0P_1 , P_1P_2 , P_2P_3 分别设为 $l, 1, 1/l$. 由对称性, 可假设 $0 < l < 1$, 面 P_2P_3M 和 xOy 所成二面角 $\varphi \in (0, \pi/2)$, 相邻控制边 P_0P_1 与 P_1P_2 , P_1P_2 与 P_2P_3 的夹角 $\theta \in (0, \pi)$.

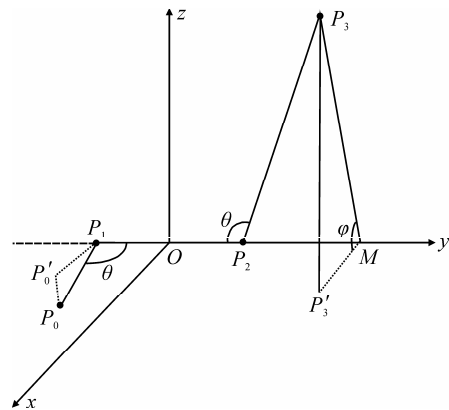


图 1 控制边长成等比的三次空间 Bézier 曲线

根据图 1, 易得各控制顶点:

$$P_0 = (l \sin \theta \cos \varphi, l \cos \theta - 1/2, -l \sin \theta \sin \varphi),$$

$$P_1 = (0, -1/2, 0),$$

$$P_2 = (0, 1/2, 0),$$

$$P_3 = (\sin \theta \cos \varphi / l, 1/2 - \cos \theta / l, \sin \theta \sin \varphi / l).$$

则曲线 $B(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 的三个分量分别为

$$x(t) = (1-t)^3 l \sin \theta \cos \varphi + t^3 \sin \theta \cos \varphi / l,$$

$$y(t) = (1-t)^3 (l \cos \theta - 1/2) - 3t(1-t)^2 / 2 +$$

$$3t^2(1-t) / 2 + t^3(1/2 - \cos \theta / l),$$

$$z(t) = -(1-t)^3 l \sin \theta \sin \varphi + t^3 \sin \theta \sin \varphi / l,$$

其中 $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, 计算出 $B'(t)$, $B''(t)$, $B'''(t)$, 然后代入挠率 $\tau(t)$ 的计算公式得

$$\tau(t) = \frac{(B'(t), B''(t), B'''(t))}{(B'(t) \times B''(t))^2} = -\frac{\sin(2\varphi)}{3h(t)},$$

其中

$$h(t) = (l(t-1)^2 + t^2 / l + 2(t-1)t \cos \theta)^2 \cos^2 \varphi + (l(t-1)^2 - t^2 / l)^2 \sin^2 \varphi + (t-1)^2 t^2 \sin^2 \theta \sin^2(2\varphi).$$

可得

$$\tau'(t) = \sin(2\varphi)h'(t) / (3h^2(t)), \quad (1)$$

其中

$$h'(t) = (8l^4(t-1)^3 + 8t^3 + 5l^2(t-1)t(2t-1) + 8l \cdot (t^2(4t-3) + l^2(t-1)^2(4t-1))\cos\theta\cos^2\varphi + l^2(t-1)t(2t-1)(3\cos(2\theta) + 4(3+\cos(2\theta)) \cdot \cos(2\varphi) - 2\cos(4\varphi)\sin^2\theta)) / (2l^2).$$

由(1)式可知, $\tau'(t)$ 的符号取决于 $h'(t)$ 的正负. 为方便判断 $h'(t)$ 的正负, 此处令 $t = 1/(s+1)$, $0 \leq s < \infty$, 可求出 $h'(t) = \frac{f(s)}{2l^2(1+s)^3}$, 这里

$$f(s) = f_3s^3 + f_2s^2 + f_1s + f_0,$$

其中

$$\begin{aligned} f_0 &= 8(1+l\cos\theta\cos^2\varphi), \\ f_1 &= -l(4l(1+\cos(2\varphi))^2\cos^2\theta + 12(1+\cos(2\varphi)) \cdot \cos\theta + 8l\cos(2\varphi) - 4l\cos^2(2\varphi) + 4l), \\ f_2 &= l^2(4(1+\cos(2\varphi))^2\cos^2\theta + 12l(1+\cos(2\varphi)) \cdot \cos\theta + 8\cos(2\varphi) - 4\cos^2(2\varphi) + 4), \\ f_3 &= -8l^3(1+\cos\theta\cos^2\varphi). \end{aligned}$$

根据控制边的边角取值范围可知: $f_0 > 0$ 恒成立. 为方便表达与计算, 令 $\alpha = \cos\theta \in (-1, 1)$, $\beta = \cos(2\varphi) \in (-1, 1)$, 则

$$\begin{aligned} f_1 &= -l(4l(1+\beta)^2\alpha^2 + 12(1+\beta)\alpha + 8l\beta - 4l\beta^2 + 4l), \\ f_2 &= l^2(4(1+\beta)^2\alpha^2 + 12l(1+\beta)\alpha + 8\beta - 4\beta^2 + 4), \\ f_3 &= -8l^3(1+\alpha(1+\beta)/2). \end{aligned}$$

下面结合 α, β, l 的取值范围判断它们的正负.

引理 1 当 $(\alpha, \beta, l) \in V_1 = \{-1 < \alpha < 0, 0 \leq \beta < 1, 0 < l < -\alpha(1+\beta)/2\}$ 时, $f_1 > 0, f_2 > 0, f_3 > 0$.

证明 由于 $(\alpha, \beta, l) \in U = \{-1 < \alpha < 1, -1 < \beta < 1, 0 < l < 1\}$, 下面先将其分为以下几种情况讨论:

(a) 当 $(\alpha, \beta, l) \in \{-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0, 0 \leq \beta < 1, 0 < l < 1\}$,

假设 $f_1 > 0$, 记 $U_{i,j}^+$ 为 $f_i > 0$ 的第 j 个区间, 故有

$$\begin{aligned} U_{1,1}^+ &= \{-1/2 \leq \alpha < (\sqrt{5}-3)/2, 0 \leq \beta \leq \frac{-2-3\alpha-2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2(\alpha^2-1)}, 0 < l < 1\}, \\ U_{1,2}^+ &= \{-1/2 \leq \alpha < (\sqrt{5}-3)/2, \frac{-2-3\alpha-2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2(\alpha^2-1)} < \beta < 1, \end{aligned}$$

$$0 < l < -\frac{3\alpha+3\alpha\beta}{1+\alpha^2+2\beta+2\alpha^2\beta-\beta^2+\alpha^2\beta^2}\},$$

$$U_{1,3}^+ = \{\alpha = (\sqrt{5}-3)/2, \beta = 0, 0 < l < 1\},$$

$$U_{1,4}^+ = \{\alpha = (\sqrt{5}-3)/2, 0 < \beta < 1,$$

$$0 < l < -\frac{3(1+\beta)}{3+6\beta-\sqrt{5}\beta^2}\},$$

$$U_{1,5}^+ = \{(\sqrt{5}-3)/2 < \alpha < 0, 0 \leq \beta < 1,$$

$$0 < l < -\frac{3\alpha+3\alpha\beta}{1+\alpha^2+2\beta+2\alpha^2\beta-\beta^2+\alpha^2\beta^2}\}.$$

同理可得:

$$U_{2,1}^+ = \{\alpha = -1/2, 0 \leq \beta \leq 1/3,$$

$$0 < l < \frac{5+10\beta-3\beta^2}{6+6\beta}\},$$

$$U_{2,2}^+ = \{\alpha = -1/2, 1/3 < \beta < 1, 0 < l < 1\},$$

$$U_{2,3}^+ = \{-1/2 < \alpha < (\sqrt{5}-3)/2,$$

$$0 \leq \beta < \frac{-2-3\alpha-2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2(\alpha^2-1)},$$

$$0 < l < -\frac{1+\alpha^2+2\beta+2\alpha^2\beta+\beta^2-\alpha^2\beta^2}{3\alpha+3\alpha\beta}\},$$

$$U_{2,4}^+ = \{-1/2 < \alpha < (\sqrt{5}-3)/2,$$

$$\frac{-2-3\alpha-2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2(\alpha^2-1)} \leq \beta < 1,$$

$$0 < l < 1\},$$

$$U_{2,5}^+ = \{(\sqrt{5}-3)/2 \leq \alpha < 0, 0 \leq \beta < 1, 0 < l < 1\},$$

$$U_{3,1}^+ = \{-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0, 0 \leq \beta < 1, 0 < l < -\frac{\alpha(1+\beta)}{2}\}.$$

则有

$$U_{1,1}^+ \cap U_{2,1}^+ \cap U_{3,1}^+ = \{\alpha = -1/2, 0 \leq \beta < 1/3,$$

$$0 < l < -\alpha(1+\beta)/2\},$$

$$U_{1,1}^+ \cap U_{2,3}^+ \cap U_{3,1}^+ = \{-1/2 < \alpha < (\sqrt{5}-3)/2,$$

$$0 \leq \beta < \frac{-2-3\alpha-2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2(\alpha^2-1)},$$

$$0 < l < -\alpha(1+\beta)/2\},$$

$$U_{1,1}^+ \cap U_{2,4}^+ \cap U_{3,1}^+ = \{-1/2 < \alpha < (\sqrt{5}-3)/2,$$

$$\beta = \frac{-2-3\alpha-2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2(\alpha^2-1)},$$

$$0 < l < -\alpha(1+\beta)/2\},$$

$$U_{1,2}^+ \cap U_{2,3}^+ \cap U_{3,1}^+ = \{\alpha = -1/2, 1/3 < \beta < 1,$$

$$0 < l < -\alpha(1+\beta)/2\},$$

$$\begin{aligned}
U_{1,2}^+ \cap U_{2,4}^+ \cap U_{3,1}^+ &= \{-1/2 < \alpha < (\sqrt{5}-3)/2, \\
&\frac{-2-3\alpha-2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2(\alpha^2-1)} < \beta < 1, \\
&0 < l < -\alpha(1+\beta)/2\}, \\
U_{1,3}^+ \cap U_{2,5}^+ \cap U_{3,1}^+ &= \{\alpha = -(\sqrt{5}-3)/2, \beta = 0, \\
&0 < l < -\alpha(1+\beta)/2\}, \\
U_{1,4}^+ \cap U_{2,5}^+ \cap U_{3,1}^+ &= \{\alpha = (\sqrt{5}-3)/2, 0 < \beta < 1, \\
&0 < l < -\alpha(1+\beta)/2\}, \\
U_{1,5}^+ \cap U_{2,5}^+ \cap U_{3,1}^+ &= \{(\sqrt{5}-3)/2 < \alpha < 0, 0 \leq \\
&\beta < 1, 0 < l < -\alpha(1+\beta)/2\}.
\end{aligned}$$

综上可得: 当 $(\alpha, \beta, l) \in \{-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0, 0 \leq \beta < 1, 0 < l < -\frac{\alpha(1+\beta)}{2}\}$ 时, $f_1 > 0, f_2 > 0, f_3 > 0$;

(b) 当 $(\alpha, \beta, l) \in \{-1 < \alpha \leq -\frac{1}{2}, 0 \leq \beta < 1, 0 < l < -\frac{\alpha(1+\beta)}{2}\}$ 时, 同理可得 $f_1 > 0, f_2 > 0, f_3 > 0$.

综上可知, 当 $(\alpha, \beta, l) \in V_1 = \{-1 < \alpha < 0, 0 \leq \beta < 1, 0 < l < -\frac{\alpha(1+\beta)}{2}\}$ 时, $f_1 > 0, f_2 > 0, f_3 > 0$.

同理可得以下引理:

引理 2 当 $(\alpha, \beta, l) \in V_2 = \{-1 < \alpha < 0, -1 < \beta < 0, 0 < l < -\alpha(1+\beta)/2\}$ 时, $f_1 > 0, f_3 > 0$.

引理 3 (1) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_1 = \{-1 < \alpha \leq \frac{2\sqrt{2}}{17} - \frac{12}{17}, 0 \leq \beta < 1, -\frac{\alpha(1+\beta)}{2} < l < 1\}$ 时, $f_1 > 0, f_3 < 0$;

(2) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_2 = \{\frac{2(\sqrt{2}-6)}{17} < \alpha \leq -\frac{1}{2}, 0 \leq \beta \leq \frac{2+3\alpha+2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2(1-\alpha^2)}, -\frac{\alpha(1+\beta)}{2} < l < 1\}$ 时, $f_1 > 0, f_3 < 0$;

(3) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_3 = \{\frac{2(\sqrt{2}-6)}{17} < \alpha \leq -\frac{1}{2}, \frac{2+3\alpha+2\alpha^2+\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2(1-\alpha^2)} \leq \beta < 1, -\frac{\alpha(1+\beta)}{2} < l < 1\}$ 时, $f_1 > 0, f_3 < 0$;

(4) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_4 = \{-\frac{1}{2} \leq \alpha < \frac{\sqrt{5}-3}{2}, 0 \leq \beta \leq \frac{2+3\alpha+2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2(1-\alpha^2)}, -\frac{\alpha(1+\beta)}{2} < l < 1\}$ 时, $f_1 > 0, f_3 < 0$;

1} 时, $f_1 > 0, f_3 < 0$;

(5) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_5 = \{\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leq \alpha < 0, -1 < \beta \leq \frac{2+3\alpha+2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2(1-\alpha^2)}, -\frac{\alpha(1+\beta)}{2} < l < 1\}$ 时, $f_1 > 0, f_3 < 0$;

(6) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_6 = \{-1 \leq \alpha \leq (\sqrt{5}-3)/2, -1 < \beta \leq 0, -\alpha(1+\beta)/2 < l < 1\}$ 时, $f_1 > 0, f_3 < 0$.

引理 4 (1) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_7 = \{\frac{2(\sqrt{2}-6)}{17} < \alpha \leq -\frac{1}{2}, \frac{2+3\alpha+2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2(1-\alpha^2)} \leq \beta \leq \frac{1}{2(1-\alpha^2)}, (2+3\alpha+2\alpha^2+\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}), -\frac{\alpha(1+\beta)}{2} < l < 1\}$ 时, $f_2 > 0, f_3 < 0$;

(2) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_8 = \{-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{5}-3}{2}, \frac{1}{1-\alpha^2} \leq \frac{2+3\alpha+2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2} \leq \beta < 1, -\frac{\alpha(1+\beta)}{2} < l < 1\}$ 时, $f_2 > 0, f_3 < 0$;

(3) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_9 = \{\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leq \alpha < 0, 0 \leq \beta < 1, -\alpha(1+\beta)/2 < l < 1\}$ 时, $f_2 > 0, f_3 < 0$;

(4) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_{10} = \{\frac{\sqrt{5}-3}{2} \leq \alpha < 0, \frac{1}{1-\alpha^2} \leq \frac{2+3\alpha+2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2} \leq \beta < 1, -\frac{\alpha(1+\beta)}{2} < l < 1\}$ 时, $f_2 > 0, f_3 < 0$.

引理 5 (1) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_{11} = \{0 < \alpha < 1, \frac{1}{1-\alpha^2} \leq \frac{2+3\alpha+2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{1-\alpha^2} \cdot (1+\alpha^2-\sqrt{2(1+\alpha^2)}), 0 < l < 1\}$ 时, $f_1 < 0, f_3 < 0$;

(2) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_{12} = \{0 < \alpha < 1, -1 < \beta < \frac{1}{1-\alpha^2}, \frac{2+3\alpha+2\alpha^2-\sqrt{17\alpha^2+24\alpha+8}}{2}, 0 < l < 1\}$ 时, $f_2 < 0, f_3 < 0$;

(3) 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_{13} = \{0 < \alpha < 1, \frac{1}{1-\alpha^2} (1+\alpha^2-\sqrt{2(1+\alpha^2)}) \leq \beta < 1, 0 < l < 1\}$ 时, $f_1 < 0, f_2 > 0$,

$$f_3 < 0.$$

2.2 挠率有极小值和单调递增的区域

从上面的引理对各系数正负的分析, 结合 Descartes 符号法则, 可以得到 τ 有极小值和单调递增的区域.

定理 1 当 $(\theta, \varphi, l) \in V_1 = \{\frac{\pi}{2} < \theta < \pi, 0 < \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 < l < -\frac{\cos \theta(1 + \cos(2\varphi))}{2}\}$ 时, τ 单调递增.

证明 由引理 1 可知, 当 $(\alpha, \beta, l) \in U_1 = \{-1 < \alpha < 0, 0 \leq \beta < 1, 0 < l < -\alpha(1 + \beta)/2\}$ 时, $f_1 > 0$, $f_2 > 0$, $f_3 > 0$; 又 $f_0 > 0$, 即 $s^n (n=0,1,2,3)$ 相应的系数符号分别为 $(+, +, +, +)$. 由 Descartes 符号法则知 $f(s) = 0$ 没有正根. 又 $s > 0$, 故 $f(s) > 0$ 恒成立. 因此 τ 在 $[0, 1]$ 上单调递增.

定理 2 当 $(\theta, \varphi, l) \in V_2 = \{\frac{\pi}{2} < \theta < \pi, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < l < -\frac{\cos \theta(1 + \cos(2\varphi))}{2}\}$ 时, τ 单调递增或有极小值.

证明 由引理 2 可知, 当 $(\alpha, \beta, l) \in V_2 = \{-1 < \alpha < 0, -1 < \beta < 0, 0 < l < -\alpha(1 + \beta)/2\}$ 时, $f_1 > 0$, $f_3 > 0$; 又 $f_0 > 0$, 即有 $s^n (n=0,1,2,3)$ 相应的系数符号分别为 $(+, +, ?, +)$ (其中“?”表示符号正负不确定), 由 Descartes 符号法则知 $f(s) = 0$ 有 2 个正根或没有正根. 又 $f(0) = f_0 > 0$, $f(1) = 8(1 - l^2)(1 + l^2 - l(1 + \beta)\alpha) > 0$, $f(\infty) < 0$, 从而 $f(s) = 0$ 有 2 个正根或没有正根. 因此 τ 在 $[0, 1]$ 上单调递增或有极小值.

定理 3 当 $(\theta, \varphi, l) \in V_3 = \{\frac{\pi}{2} < \theta < \pi, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, -\frac{\cos \theta(1 + \cos(2\varphi))}{2} < l < 1\}$, $(\theta, \varphi, l) \in V_4 = \{0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < l < 1\}$ 时, τ 有极小值;

证明 下面分两个部分证明:

(a) 由引理 3 可知 $f_1 > 0$, $f_3 < 0$, 又 $f_0 > 0$, 即 $s^n (n=0,1,2,3)$ 相应的系数符号分别为 $(+, +, ?, -)$, 根据 Descartes 符号法则知 $f(s) = 0$ 有 1 个正根, 又 $f(0) = f_0 > 0$, $f(1) = 8(1 - l^2)(1 + l^2 - l(1 + \beta)\alpha) > 0$, $f(\infty) < 0$, 从而 $f(s) = 0$ 只有 1 个正根. 因此 τ 在 $[0, 1]$ 上只有 1 个极小值;

(b) 由引理 4 可知 $f_2 > 0$, $f_3 < 0$, 又 $f_0 > 0$, 即有 $s^n (n=0,1,2,3)$ 相应的系数符号分别为 $(+, ?, +, -)$, 根据 Descartes 符号法则知 $f(s) = 0$ 有 1 个或 3 个正根, 然而 $f(0) = f_0 > 0$, $f(1) = 8(1 - l^2)(1 + l^2 - l(1 + \beta)\alpha) > 0$, $f(\infty) < 0$, 从而 $f(s) = 0$ 有 1 个或 3 个正根. 因此 τ 在 $[0, 1]$ 至少有 1 个极小值.

综合(a)和(b)可知, 当 $(\theta, \varphi, l) \in V_3 = \{\frac{\pi}{2} < \theta < \pi, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, -\frac{\cos \theta(1 + \cos(2\varphi))}{2} < l < 1\}$ 时, τ 至少有 1 个极小值.

由引理 5 同理可得, 当 $(\theta, \varphi, l) \in V_4 = \{0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < l < 1\}$ 时, τ 至少有 1 个极小值.

3 计算实例

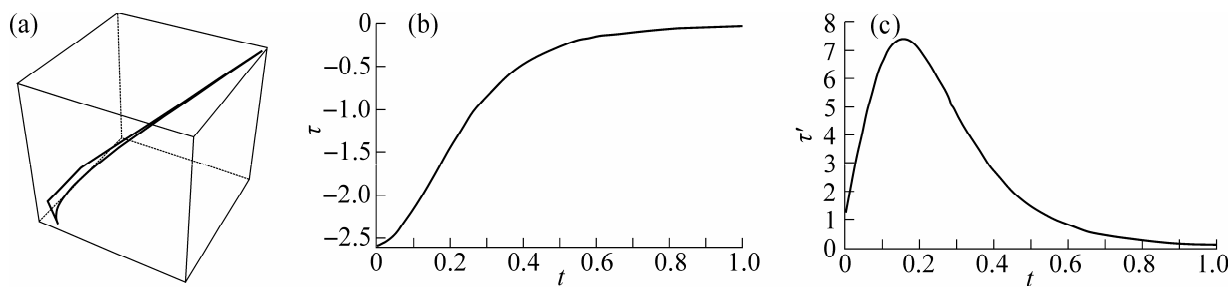
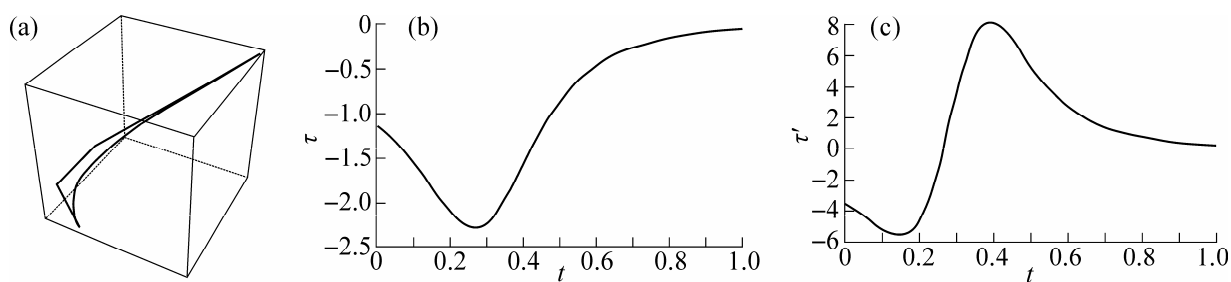
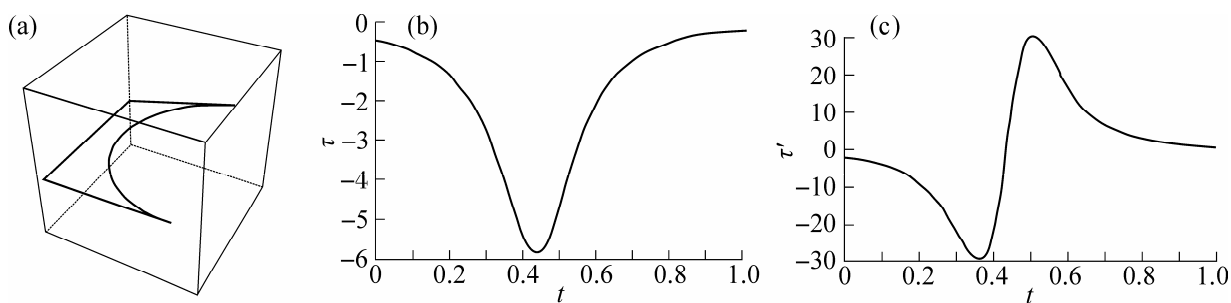
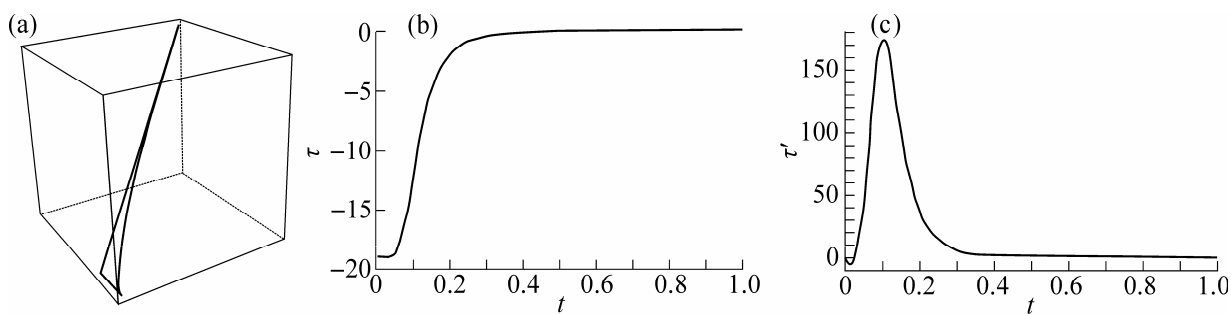
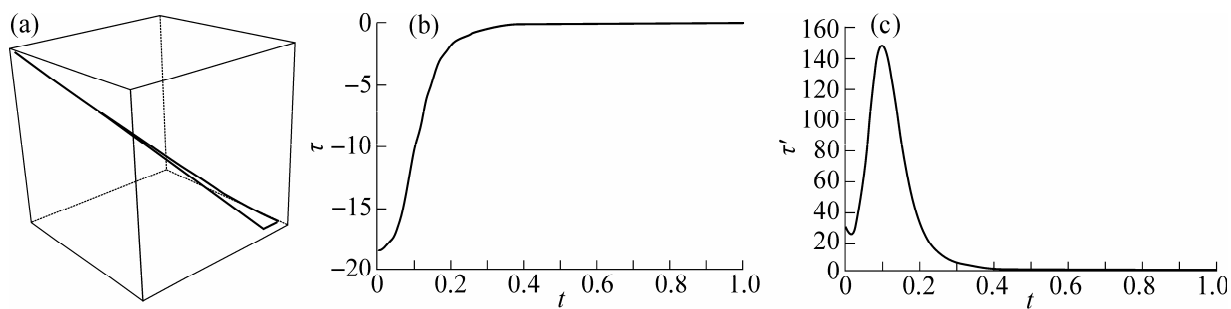
根据以上所得定理, 这里给出一些具体的计算实例. 从图像上可以直观地看出 $\tau(t)$ 单调变化和 $\tau'(t)$ 的正负情况.

- (1) 当 $l = \frac{1}{3}, \theta = \frac{2\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{6}$, τ 单调递增, 见图 2;
- (2) 当 $l = \frac{1}{2}, \theta = \frac{2\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{3}$, τ 有极小值, 见图 3;
- (3) 当 $l = \frac{4}{5}, \theta = \frac{\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{3}$, τ 有极小值, 见图 4;
- (4) 当 $l = \frac{10}{81}, \theta = \frac{2\pi}{3}, \varphi = \frac{\pi}{3}$, τ 有极小值, 见图 5;
- (5) 当 $l = \frac{1}{8}, \theta = \frac{3\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{3}$, τ 单调递增, 见图 6.

4 总结

本文研究了控制边长成等比、相邻控制边夹角相等的三次空间 Bézier 曲线的挠率特征分布规律, 得到了挠率 τ 单调递增和极小值存在的充分条件. 这些条件具体可表示为参数空间中的如下区域(见图 7):

- (1) 当 $V_1 = \{\pi/2 < \theta < \pi, 0 < \varphi \leq \pi/4, 0 < l < -\cos \theta(1 + \cos(2\varphi))/2\}$ 时, τ 单调递增;
- (2) 当 $V_2 = \{\pi/2 < \theta < \pi, \pi/4 < \varphi < \pi/2, 0 < l < -\cos \theta(1 + \cos(2\varphi))/2\}$ 时, τ 单调递增或有极小值;
- (3) 当 $V_3 = \{\pi/2 \leq \theta < \pi, 0 < \varphi < \pi/2, -\cos \theta/2 \cdot (1 + \cos(2\varphi)) < l < 1\}$ 时, τ 有极小值;

图2 $l=1/3, \theta=2\pi/3, \varphi=\pi/6$ 时的图像图3 $l=1/2, \theta=2\pi/3, \varphi=\pi/3$ 时的图像图4 $l=4/5, \theta=\pi/3, \varphi=\pi/3$ 时的图像图5 $l=10/81, \theta=2\pi/3, \varphi=\pi/3$ 时的图像图6 $l=1/8, \theta=3\pi/4, \varphi=\pi/3$ 时的图像

(4) 当 $V_4 = \{0 < \theta \leq \pi/2, 0 < \varphi < \pi/2, 0 < l < 1\}$ 时, τ 有极小值.

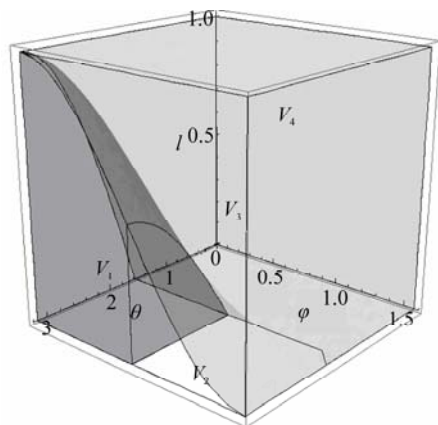


图7 挠率特征分布参数空间不同区域

参考文献:

- [1] Farin G, Sapidis N. Curvature and the fairness and surface [J]. IEEE Computer Graphics & Application, 1989, 9(2): 52-57.
- [2] 于存光, 王宏久. 有理 Bézier 曲线段的几何连续拼接 [J]. 价值工程, 2001, 3(1):205.
- [3] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001:21-27.
- [4] Sapidis N S, Freyw H. Controlling the curvature of a quadratic Bézier curve[J]. Computer Aided Geometric Design, 1992, 9(2):85-91.
- [5] Ahn Y J, Kim H O. Curvatures of the quadratic rational Bézier curves[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1998, 36(9):71-83.
- [6] Suenaga K, Sakai M. On curvatures of rational quadratic Bézier segments[J]. Reports of the Faculty of Science, Kagoshima University, 1999, 32:15-20.
- [7] 王玉林, 汪叔淳, 李迪, 等. 二次有理 Bézier 曲线曲率单调条件的研究[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(7):507-511.
- [8] 李重, 韩丹夫. 二次有理 B 样条曲线曲率单调条件[J]. 浙江大学学报(理学版), 2003, 30(1):23-36.
- [9] 陈锦辉, 张三元, 鲍虎军, 等. G^3 连续的有理三次 Bézier 样条曲线造型[J]. 自然科学进展, 2001, 11(7): 747-753.
- [10] Farin G. Class A Bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2006, 23(7):573-581.
- [11] Cao J, Wang G. A note on class A Bézier curves[J]. Computer Aided Geometric Design, 2008, 25(7):523-528.
- [12] 王秋霞, 朱如媛, 徐晨东. 两类特殊三次空间 Bézier 曲线的挠率特征分析[J]. 宁波大学学报(理工版), 2016, 29(3):14-18.

Analysis on the torsion of a kind of cubic-spatial Bézier curves with geometric proportion control polygon sides

YAO Yan, WANG Ya-li, XU Chen-dong*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: This paper focuses on a kind of cubic spatial Bézier curves with geometric proportion control polygon sides and equal angles between adjacent control polygons. And a rectangular space coordinate system is established according to the affine invariance to obtain the expression of curve deflection rate. In order to simplify calculation, the corresponding expression for the derivative of this torsion is derived by changing variables. Based on geometric features of the control polygon, the distribution of roots where torsion derivative equals zero is analyzed by using the Descartes sign rule. Thus the parametric domains, where the torsion of the corresponding Bézier curve is monotonic increasing or reaches its minimum value, are described. Finally, several typical numerical examples are given.

Key words: cubic spatial Bézier curve; torsion; Descartes sign rule

(责任编辑 韩 超)