

基于伪布尔可满足性的流水线工位优化设计

郑昌顺, 孙建国, 王先建, 蔡丽君, 夏银水*

(宁波大学 电路与系统研究所, 浙江 宁波 315211)

摘要: 鉴于保持流水线生产平衡的基本问题, 因此在给定流水线工序、工时以及工位的情况下, 通过建立相关数学模型, 给出有关的约束条件和目标函数, 提出了基于伪布尔可满足性的流水线优化工位设计算法, 实现了流水线工位的优化安排, 使流水线达到平衡生产。

关键词: 流水线; 工位安排; 生产节拍; 工位数; 算法

中图分类号: TS941.26

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2013) 01-0039-04

随着经济的发展, 越来越多的流水线生产被应用于实际生产。流水线生产中如何保持流水线平衡的基本问题是涉及到流水线的工位安排, 而流水线工位安排就是要提高操作工人的有效工时, 减少无效工时, 从而达到流水线生产平衡。解决流水线负荷平衡问题, 传统方法有杰克逊列举法、赫尔杰森和伯尼的位置加权法和分支界限法。文献[1]在分支界限法的基础上探讨了服装缝绉流水线优化设计的数学模型和利用微机实现最优设计方法; 文献[2-3]针对服装生产实际的不同要求、不同条件运用线性规划、整数规划、目标规划等数学模型, 建立了4个服装生产线优化模型。文献[4]在遗传算法GA(Genetic Algorithm)的基础上, 提出了组遗传算法GGA(Group Genetic Algorithm)。

由于流水线调度问题的NP特性, 传统方法有一定的局限性, 很难求得最优解。笔者采用伪布尔可满足性(Pseudo-Boolean Satisfiability, PBS)对流水线问题进行优化设计, 实验结果表明, 基于PBS法是能够合理地安排流水线工位。

1 数学模型

1.1 流水线模型的描述

设某条流水线生产产品的所有工序集合为 J , 在集合 J 中规定各元素的秩序为优先关系(即工序 i 的前道工序不能在工序 i 的后续工作中进行), 规

定了正实数 t_i (工序的工时), 以及流水线的工作总人数 N , 记工序为 $S_i, (i=1, 2, \dots, n)$, 上述关系可以用以下数学式表达^[1]:

$$S_1 \cup S_2 \dots S_n = J, \quad (1)$$

且

$$S_i \cap S_j = \varnothing, i \neq j, i, j=1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

其中, $\varnothing$ 为空集。上式表示每道工序与其他工序不相交。

1.1.1 流水线的平均节拍

流水线的平均节拍 $\bar{t}$ (average time):

$$T = \sum_{i=1}^n t_i, \quad (3)$$

$$\bar{t} = T / N, \quad (4)$$

其中, $\bar{t}$ 是理想的生产节拍, 但可作为流水线作业编排的约束条件, 引导各工位的作业量尽量向平均节拍靠拢, 让实际生产节拍向平均节拍靠拢是工位安排的最终目标, 即工序平衡^[5]。

1.1.2 节拍界限

流水线的实际生产节拍虽然以平均节拍为标准, 但一般不可能与平均节拍正好相等, 因此在工位安排时要确定一个适合实际操作的节拍界限^[4](节拍上限、节拍下限)来决定工位安排中工位的组合取舍, 即工时浮余 k 。

考虑到实际生产中对工位安排效率的要求, 以及生产人数必须取整数, 又因为真正影响流水

收稿日期: 2012-06-23. 宁波大学学报(理工版)网址: <http://nbdxlg.paperopen.com/>

基金项目: 宁波市重大(重点)科技攻关计划(2010B10026)。

第一作者: 郑昌顺(1988-), 男, 湖北黄冈人, 在读研究生, 主要研究方向: 流水线算法. E-mail: zhengchangshun928@126.com

*通信作者: 夏银水(1963-), 男, 浙江余姚人, 博导/教授, 主要研究方向: 低功耗集成电路. E-mail: xiayinshui@nbu.edu.cn

线生产节拍的是瓶颈节拍, 因此对于节拍上限必须严格要求, 而节拍下限可以放宽要求; 即允许流水线出现局部松弛, 但绝对不允许流水线局部紧张, 否则就会造成生产线停滞, 无法正常运行. 综合考虑, 取节拍上限浮余 $k_1 = 10\%$, 取节拍下限浮余 $k_2 = 10\%$, 即:

$$\text{节拍上限 } T_u \text{ (up time): } T_u = \bar{t} \times (1 + k_1). \quad (5)$$

$$\text{节拍下限 } T_l \text{ (low time): } T_l = \bar{t} \times (1 - k_1). \quad (6)$$

各工位的工作时间因尽量控制在节拍上下限范围之内, 即:

$$\bar{t} \times (1 - k_2) \sim \bar{t} \times (1 + k_1). \quad (7)$$

1.2 伪布尔可满足性

在 SAT 算法中, 给定 1 个函数 f , 通过对布尔变量的分配, 找到一些满足约束的解. 如果能找到这样的解, 称之为可满足, 否则称之为不可满足. 约束条件写在 1 个 CNF (Conjunctive Normal Form) 文件中, CNF 文件为 m 个子句的合取, 每个子句都为 k 个文字的析取, 其中每个文字即为 1 个变量或者其反变量, 每个变量取值只能为 0, 1^[6], 如:

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3),$$

其中, $\wedge$ 表示合取即逻辑与, $\vee$ 表示析取即逻辑或. 在上面表达式中, 有 3 个变量, 3 个子句, 6 个文字. 当 $\{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1\}$ 时, 会出现冲突, 不满足布尔约束, 使得 $f = 0$, 称之为不可满足. 当 $\{x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1\}$, 满足布尔约束, 使得 $f = 1$, 称之为可满足.

随着 SAT 发展, SAT 法被扩展为伪布尔可满足性(Pseudo-Boolean Satisfiability, PBS), 其可由整数线性关系代数式表示: $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b_m$, 其中, $a_i, b_m \in Z, (i = 1, 2, \cdots, n), (m = 1, 2, \cdots, k)$, x_i 是布尔变量. PBS 法可引入目标函数将问题转化为优化话题(Pseudo-Boolean Optimization, PBO),

$$\min: f = \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

其中, $c_i \in Z$. 对于给定的约束条件, 求出一组解, 使得满足所有的约束条件, 同时能够使得目标函数取得最优值, 如:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 + \bar{x}_3 \geq 1, \end{cases}$$

$$\min: f = -x_1 + 2x_2 + \bar{x}_3.$$

对于上面的例子有 2 组可行解: $x_1 = 1, x_2 = 0$,

$x_3 = 0$ 和 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$, 它们都能使得约束条件得到满足. 显然第二组解比第一组解更适合目标函数, 更能使目标函数得到优化. 因此对于上述问题的最优解是: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

当约束条件较多的时候, 通过手工计算的方法就比较困难, 此时可通过 C 语言编写代码, 将问题编码成 PBO 问题, 得到的 OPB 文件即为伪布尔(Pseudo-Boolean)约束的合取, 然后通过 PBO 求解器直接求解.

2 算法实现

针对上述问题, 提出了基于伪布尔可满足性(PBS)的流水线工位优化算法, 变量描述如下:

W 为工序总数, 工序记为 $j = 1, 2, \cdots, W$;

M 为给定的总各位数, 工位为 $i = 1, 2, \cdots, M$;

T_j 为第 j 道工序的工时;

P_i^j 为第 i 个工位被分配到第 j 道工序;

t_j 为第 j 道工序实际生产节拍, 单位为 s ;

$\bar{t}$ 为整个流水线的平均节拍.

根据伪布尔可满足性算法的要求, 需要给出约束条件和目标函数, 并通过对约束条件的分析, 找出满足目标函数的最优解.

整个流水线的平均节拍 $\bar{t}$ 可用下式表示:

$$\bar{t} = \left\lceil \left(\sum_{j=1}^W t_j \right) / M \right\rceil, \quad (8)$$

接着, 取(8)式的整数部分, 在计算过程中误差很小, 便于算法的实现.

对于实际生产中的工位而言, 每个工位要么不被安排到流水线中, 要么只被安排在一道工序中; 对于工序而言, 每道工序的工位至少大于 1, 而且安排到整个流水线的工位不大于给定的工位, 表达成的约束条件如下^[4,6-7].

(1) 保证每个工位要么不被安排进流水线, 要么只被安排到一道工序:

$$\sum_{j=1}^W P_i^j \leq 1. \quad (9)$$

(2) 保证分配到流水线工序的工位大于或等于 1:

$$\sum_{i=1}^M P_i^j \geq 1. \quad (10)$$

(3) 保证分配到整个流水线的工位不大于

给定的工位数:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^W P_i^j \leq M. \quad (11)$$

(4) 流水线生产的最基本原则是达到平衡生产, 即各工序生产节拍和平均节拍相当, 则:

$$0.8 \cdot \bar{t} \leq t_j \leq 1.1 \cdot \bar{t}. \quad (12)$$

每道工序安排的工位数乘以对应工序的生产节拍等于该工序的工时:

$$\left(\sum_{i=1}^M P_i^j \right) \cdot t_j = T_j. \quad (13)$$

结合(12)式和(13)式以及 SAT 运算的特性, 可以得出如下约束:

$$80\bar{t} \cdot \sum_{i=1}^M P_i^j \leq 100T_j, \quad (14)$$

$$110\bar{t} \cdot \sum_{i=1}^M P_i^j \geq 100T_j. \quad (15)$$

综上所述, 约束条件为:

$$\bar{t} = \left\lceil \left(\sum_{j=1}^W t_j \right) / M \right\rceil, \quad (16)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^W P_i^j \leq 1, \\ \sum_{i=1}^M P_i^j \geq 1, \\ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^W P_i^j \leq M, \\ 80\bar{t} \cdot \sum_{i=1}^M P_i^j \leq 100T_j, \\ 110\bar{t} \cdot \sum_{i=1}^M P_i^j \leq 100T_j. \end{cases} \quad (17)$$

当满足流水线实际生产节拍与平均节拍相当时, 安排到工序的工位人数越少越能提高生产效率, 越能实现效益最大化, 因此目标函数可设为:

$$\min: f = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^W P_i^j. \quad (18)$$

提出基于 PBS 算法的具体步骤如下:

(1) 分析流水线的工序、工时、工位数, 确定流水线生产的平均节拍, 为实际生产中工序的生产节拍提供依据;

(2) 为每个工位设定约束, 即每个工位要么不被安排到流水线中, 要么只被安排到其中一道工序; 为每道工序设定约束, 即每道工序的人数必须

大于或等于 1, 而且安排到整个流水线的工位数不大于给定的工位总数;

(3) 保证整个流水线的生产节拍在节拍下限和节拍上限之间, 以确定流水线能够平衡生产;

(4) 在生产达到平衡时, 确保进入流水线生产的工位最少, 即设定目标函数;

(5) 对约束条件和目标函数进行编译, 产生适合 PBO 求解器求解的 OPB 文件, 通过 PBO 求解器进行求解.

3 举例说明

算法已用 C 语言编程实现, 将约束条件输出到 OPB 文件中, 输出格式按照文献[6]中的要求. 在 linux 系统下, 通过调用 MiniSAT+求解器, 对 OPB 文件进行求解.

给定某条流水线中有 13 道工序, 工位数位 20, 各道工序工时见表 1, 求取合理分配工位. 为此, 首先确定该流水线的约束条件以及目标函数.

表 1 各工序的工时

工序	工时	工序	工时
1	115	8	95
2	108	9	120
3	402	10	110
4	100	11	120
5	100	12	210
6	240	13	120
7	342		

由表 1 知, 各工序的工时, 则流水线平均节拍:

$$\bar{t} = \left\lceil \left(\sum_{j=1}^W t_j \right) / M \right\rceil = 110.$$

对应的约束条件为:

$$\sum_{j=1}^{13} P_i^j \leq 1, i = 1, 2, \dots, 30,$$

$$\sum_{i=1}^{30} P_i^j \geq 1, j = 1, 2, \dots, 13,$$

$$\sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1}^{13} P_i^j \leq 30,$$

$$80 \times 110 \cdot \sum_{i=1}^{30} P_i^j \leq 100T_j, j = 1, 2, \dots, 13,$$

$$110 \times 110 \cdot \sum_{i=1}^{30} P_i^j \geq 100T_j, j = 1, 2, \dots, 13.$$

对应的目标函数:

$$\min: f = \sum_{i=1}^{30} \sum_{j=1}^{13} P_i^j.$$

实验结果见表 2. 从表 2 中可以看到, 每道工序的生产节拍均在节拍界限范围内, 能够满足流水线生产, 该流水线的工位安排达到最优配置.

表 2 算法运行结果

工序序号(W=13)	工时/s	工位排(M=20)	生产节拍
1	115	1	115
2	108	1	108
3	420	4	105
4	100	1	100
5	100	1	100
6	240	2	120
7	342	3	114
8	95	1	95
9	120	1	120
10	110	1	110
11	120	1	120
12	210	2	105
13	120	1	120

注: 平均节拍界限 $\bar{t}=110$, $T_u=121$, $T_l=88$.

4 结语

提出了基于伪布尔可满足性算法的流水线工

序分配算法并已用 C 语言加以实现. 针对不同的流水线、不同的工位数, 只需要输入相应的流水线参数, 就能给出合理的分配方案.

在实际情况中, 部分工序可能会不满足(14)式和(15)式的关系, 这时需对具体工序进行具体分析, 然后做拆分和合并处理, 这是下一步的研究工作.

致谢 本文得到宁波大学信息科学与工程学院王伦耀副教授的帮助, 在此表示衷心感谢.

参考文献:

- [1] 许树文, 张文斌, 冯克平, 等. 微型计算机辅助服装缝纫流水线优化设计[J]. 东华大学学报: 自然科学版, 1992, 18(6):43-52.
- [2] 胡觉亮, 季晓芬. 服装生产流水线的优化运行模型[J]. 纺织学报, 2001, 22(3):191-192.
- [3] 季晓芬, 胡觉亮. 服装生产流水线上工作站的最优设置模型[J]. 纺织学报, 2001, 22(4):265-266.
- [4] Chen James C, Chen Chunchieh, Su Linghuey, et al. Assembly line balancing in garment industry[J]. Expert system with Application, 2012, 39:10073-10081.
- [5] 陶海涓, 陈雁. 服装缝制工序的编排与优化[J]. 江苏纺织学报, 2005(1):48-50.
- [6] Roussel O, Manquinho V. Input/output format and solver requirements for the competitions of pseudo-boolean solver[EB/OL]. [2010-08-05]. <http://www.cril.univ-artois.fr/PB12/format.pdf>.
- [7] 谭浩强. C 程序设计[M]. 3 版. 北京: 清华大学出版社, 2005.

Optimization Design of Assembly Line Station Based on Pseudo-Boolean Satisfiability

ZHENG Chang-shun, SUN Jian-guo, WANG Xian-jian, CAI Li-jun, XIA Yin-shui*

(Institute of Circuits and Systems, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Given the assembly line process, working hours, and station number, how to keep the assembly line in balance is a fundamental problem in assembly line. By establishing mathematical models, the optimization design of the assembly line station is proposed in this paper based on Pseudo-Boolean satisfiability to identify one of the constraints and the objective function. The optimized arrangement of the assembly line station is achieved, and the assembly line to balance the production scale is made. The proposed design not only improves production efficiency, but also enables all stations to be used at reasonable level, thus avoiding the waste of resources.

Key words: assembly line; station arrangement; average time; station number; algorithm

(责任编辑 章践立)