

弹性约束边界条件下拉索结构横向振动特性分析

程 鹏, 冯志敏, 陈跃华*, 张 刚, 闫 伟

(宁波大学 海运学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 在拉索两端引入线性约束弹簧和扭转约束弹簧, 通过对弹簧设置相应的刚度系数, 得到弹性边界条件包括经典边界条件下的拉索横向振动模型. 振动位移采用切比雪夫级数展开, 使得横向位移在整个求解域内足够光滑. 对不同边界条件下的拉索横向振动进行了研究, 研究结果与参考结果的良好吻合验证了所构造模型的正确性; 并进一步对线性约束弹簧刚度和扭转约束弹簧刚度对拉索横向振动特性的影响进行了分析. 研究表明, 边界条件对拉索振动固有频率的影响不可忽略.

关键词: 拉索; 横向振动; 弹性边界约束; 切比雪夫级数; 固有频率

中图分类号: O327

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2018) 02-0055-08

斜拉索作为斜拉桥的关键构件, 具有自重小、柔度大、低阻尼等特点, 在风雨及车辆等动态载荷激励下, 很容易发生振动. 随着斜拉桥跨度的增加, 斜拉索振动问题变得越来越突出^[1].

研究拉索结构的稳定性和动态响应分析时, 需要对拉索结构横向振动特性进行研究. 在对拉索结构进行健康监测和损伤识别研究中, 需通过结构动态测试手段测得结构的各阶固有频率^[2-3], 并与其理论值进行对比, 从而判断拉索结构是否损伤^[4]. 主要测试方法有液压表法、压力传感器法^[5]、测量伸长法、磁通量法^[6]及频率法^[7]. Mehrabi 等^[8]考虑垂度和抗弯刚度对拉索振动特性的影响, 做了大量的参数分析, 给出了拉索的振动频率与索力之间的数学模型. 宋一凡等^[9]将固支拉索的振型函数考虑为压杆屈曲函数, 根据 RITZ 法计算拉索的固有频率. 徐霞飞等^[10]推导拉索在一般边界条件下的自由振动频率方程和索力的解析表达式, 分析边界条件对拉索索力估算的影响. Zui 等^[11]考虑拉索的弯曲刚度和垂度的影响, 并给出了固支拉索的索力表达式.

目前在对拉索横向振动的研究中, 通常假设其两端为理想的简支或固支条件. 事实上, 拉索的

边界条件并非理想的简支和固支, 而是介于简支和固支之间^[12]. 斜拉桥拉索端部通过锚具与主梁和索塔相连接, 在工程中锚具方式较为复杂, 不能简单当作简支或固支边界处理^[13]. 在实际测量过程中, 由于索力与其振动频率之间存在着特定的关系, 索力可由频率换算而间接得到^[14]. 分析拉索两端为固支或简支边界约束时, 通过计算出来的索力与实际索力存在明显的偏差. Prato 和 Ceballos 等^[15]在研究中发现拉索的索力变化超过 10% 时, 取决于两端的边界约束是由固支或简支情况下产生的, 认为在计算索力时需考虑拉索两端的转动刚度. Ceballos 等^[16]考虑了拉索两端转动刚度对拉索索力的影响, 基于振动微分方程, 推导了考虑转动约束刚度的频率-索力解析表达式. 魏金波等^[17]通过有限元法对弹性支承拉索的动力特性进行了研究, 结果表明随着弹性支承刚度的增大, 拉索的自振频率随之增大. 因此在进行振动模型时, 需要找到一种与实际情况相符的边界约束形式.

由上述综述可知, 在目前大部分研究中都是假定拉索两端为简支或固支条件, 这种假定与实际边界约束还存在一定的误差. 特别是在研究长度较短的拉索时, 更不能简单地当作简支或固支

收稿日期: 2017-08-30.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金 (51675286, 51505237).

第一作者: 程鹏 (1992-), 男, 湖北荆州人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 机械结构振动与机电控制. E-mail: chengpeng2017cp@163.com

*通信作者: 陈跃华 (1986-), 男, 湖南常德人, 讲师, 主要研究方向: 船舶结构振动与噪声控制. E-mail: chenychua@nbu.edu.cn

边界条件. 对于此类复杂边界问题的研究目前还很少, 为此需要进一步研究边界约束条件对拉索振动特性的影响. 本文基于能量变分原理, 建立了弹性约束边界条件下的拉索横向振动特性预报模型, 采用 Chebyshev 级数方法求解拉索振动系统特征方程. 通过计算的固有频率与参考文献中不同边界条件下拉索振动固有频率对比, 验证了本模型的正确性. 并在此基础上, 讨论了边界线性约束刚度和扭转约束刚度对拉索横向振动频率的影响.

1 理论模型

研究拉索结构横向振动问题. 考虑到拉索的长度远大于横截尺寸, 忽略其转动惯量和剪切变形(图 1), 同时忽略拉索的垂度问题. 假定拉索两端分别受到线性支承弹簧 k_1 、 k_2 和扭转弹簧 k_{r1} 、 k_{r2} 的约束, 则由拉索边界力和力矩平衡关系, 可得拉索边界条件方程^[12]:

$$k_1 w|_{x=0} = Q_{r1} = EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=0} - S \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (1)$$

$$k_2 w|_{x=l} = Q_{r2} = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=l} + S \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad (2)$$

$$k_{r1} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = M_{r1} = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0}, \quad (3)$$

$$k_{r2} \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=l} = M_{r2} = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=l}, \quad (4)$$

式中, E , I , S , l 分别为拉索结构的弯曲刚度、截面惯性矩、索力、拉索长度; Q_r 为拉索端部剪力; M_r 为拉索端部弯矩; w 为拉索横向振动位移; 下标 1、2 分别代表相关物理量位于拉索的左端和右端. 由边界条件方程可知, 通过调节拉索边界处的线性支承弹簧刚度和扭转弹簧刚度, 即可模拟拉索的弹性边界条件. 对于简支边界条件, 可通过将线性支承弹簧刚度系数 k_1 和 k_2 设置为无穷大, 而扭转弹簧刚度系数 k_{r1} 和 k_{r2} 设置为零. 对于固支边界条件, 考虑设置边界约束刚度系数为无穷大, 将两组

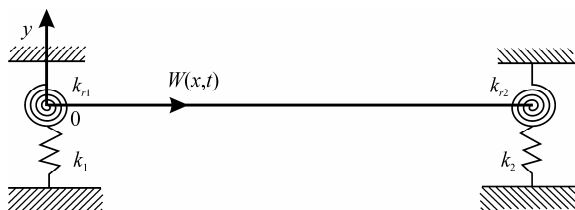


图 1 弹性约束边界下拉索横向振动分析模型

弹簧刚度系数设置为无穷大; 当考虑两组弹簧刚度系数为特定值时, 则表示位于简支和固支边界约束之间的弹性边界约束.

由振动理论可知, 拉索的横向位移 $W(x, t)$ 表示为如下形式:

$$W(x, t) = w(x) e^{j\omega t}, \quad (5)$$

式中, $w(x)$ 为拉索横向位移分布函数; $e^{j\omega t}$ 是简谐时间因子; ω 为圆频率.

由能量变分原理可知, 拉索结构的拉格朗日泛函 L 可表示为如下形式:

$$L = V - T, \quad (6)$$

式中, V 表示拉索结构的总势能; T 表示拉索结构的动能. 其中, 总势能由拉索拉伸应变能 V_s 、拉索弯曲应变能 V_f 以及存储在边界弹簧中的弹性势能 V_k 三项构成. 拉索的动能和势能可分别表示如下:

$$T = \frac{m\omega^2}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)^2 dx, \quad (7)$$

$$V = V_s + V_f + V_k = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \left[k_1 w^2 + k_{r1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]_{x=0} + \frac{1}{2} \left[k_2 w^2 + k_{r2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]_{x=l}, \quad (8)$$

式中, m 为拉索质量线密度. 由(8)式可知, 拉索的弯曲应变能和拉伸应变能分别对应着第 1 个和第 2 个积分项, 而第 3、4 项则分别表示在拉索左端和右端边界弹簧储存的弹性势能.

在进一步建立拉索的拉格朗日函数时, 需要选定合适的位移函数表达式. 这里, 拉索的边界条件可通过边界弹簧约束进行描述, 因此需要给出满足边界约束条件下的位移函数. 位移函数的基本要求是满足所有边界, 基函数之间满足正交性, 并在求解域内连续、光滑性符合原函数的要求, 而常见正交多项式满足此要求. 本文考虑的是第一类 Chebyshev 多项式, 对于 n 阶 Chebyshev 级数多项式的表达式如下^[18]:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), n = 0, 1, 2, 3, \dots; |x| \leq 1. \quad (9)$$

由三角函数关系:

$$\cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta] = 2 \cos \theta \cos(n\theta),$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

可得到如下递推公式:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \quad (10)$$

由归纳法可以推导出第 n 阶 Chebyshev 多项式的具体表达式为:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} x^{n-2k} (1-x^2)^k, \quad (11)$$

上式中 $[n/2]$ 为 $n/2$ 取整部分.

对于定义在区间 $[-1, 1]$ 的连续函数 $f(x)$ 可按 Chebyshev 级数进行展开:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\theta), \quad (12)$$

因而, 拉索的横向位移函数可采用 Chebyshev 多项式进行展开. 需注意到, Chebyshev 多项式定义区间是 $[-1, 1]$, 而拉索的位移定义区间为 $[0, l]$, 故展开拉索的横向位移前需进行相应的坐标变换, 坐标变换表达式为:

$$x = l(1 + \zeta) / 2, \quad (13)$$

坐标变换后拉索的横向位移表达式为:

$$w(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T_n(\zeta), \quad (14)$$

式中, A_n 为级数展开式系数, 由(14)式可知, 拉索位移为无穷多项 Chebyshev 多项式的和. 但在实际计算中, 为了提高计算效率将选有限项进行计算.

将(14)式代入拉索结构的势能和动能表达式中可得:

$$T = \frac{Im\omega^2}{4} \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 d\zeta, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} V = V_s + V_f + V_k = & \frac{4EI}{l^3} \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} \right)^2 d\zeta + \\ & \frac{S}{l} \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta + \frac{1}{2} \left[k_1 w^2 + \frac{4k_{r1}}{l^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \right]_{\zeta=-1} + \\ & \frac{1}{2} \left[k_2 w^2 + \frac{4k_{r2}}{l^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \right]_{\zeta=1}. \end{aligned} \quad (16)$$

将(14)~(16)式代入(6)式, 并按照 Rayleigh-Ritz 法令拉索的拉格朗日泛函对位移函数中的未知系数取极值.

$$\partial L / \partial A_n = 0, \quad (17)$$

得到系统特征方程:

$$(K - \omega^2 M)E = 0, \quad (18)$$

式中, K 和 M 分别为拉索刚度矩阵和质量矩阵在

Chebyshev 多项式基下的投影; E 为位移展开式中的未知系数向量.

为给出矩阵元素的具体计算公式, 可做如下定义: 变量 σ , $\bar{\sigma} = 0, 1, 2$ 和 α, β .

$$\alpha = n + 1, \quad (19)$$

$$\beta = n + 1, \quad (20)$$

$$T_n' = \frac{\partial T_n(\zeta)}{\partial \zeta}, \quad (21)$$

$$\Xi_{n,m}^{\sigma,\bar{\sigma}} = \int_{-1}^1 \frac{\partial^\sigma T_n(\zeta)}{\partial \zeta^\sigma} \frac{\partial^{\bar{\sigma}} T_m(\zeta)}{\partial \zeta^{\bar{\sigma}}} d\zeta. \quad (22)$$

于是拉索横向振动的刚度矩阵 K 、质量矩阵 M 以及位移系数向量 E 具体表达式为:

$$\begin{aligned} [K]_{(\alpha,\beta)} = & \frac{8EI}{l^3} \Xi_{n,m}^{2,2} + \frac{2s}{l} \Xi_{n,m}^{1,1} + \\ & \frac{1}{2} \left[k_1 T_n(\zeta) T_m(\zeta) + \frac{4k_{r1}}{l^2} T_n'(\zeta) T_m'(\zeta) \right]_{\zeta=-1} + \\ & \frac{1}{2} \left[k_2 T_n(\zeta) T_m(\zeta) + \frac{4k_{r2}}{l^2} T_n'(\zeta) T_m'(\zeta) \right]_{\zeta=1}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$[M]_{(\alpha,\beta)} = \frac{lm}{4} \Xi_{n,m}^{0,0}, \quad (24)$$

$$[E]_{(\alpha)} = [A_{00}, A_{01}, \dots, A_{0n}]^T. \quad (25)$$

通过求解(18)式此标准的矩阵特征值问题, 可以得到弹性边界约束条件下拉索横向振动的固有频率和振型. 与其他方法相比, 本模型可以考虑弹性边界约束情况. 当边界条件改变时, 仅需设置相应的弹簧刚度, 便可得到任何经典边界条件, 而无需对理论模型进行重新推导, 适合于边界条件对拉索横向振动特性的影响分析.

2 数值结果与分析

2.1 两端简支边界约束条件

研究两端简支边界条件, 选取数值仿真数据参数如下: 拉索长度 $l = 190.22$ m, 拉索线密度 $m = 60.74$ kg·m⁻¹, 拉索拉力 $S = 3\,959$ kN, 拉索弹性模量 $E = 2 \times 10^{11}$ N·m⁻², 拉索直径 $d = 0.121$ m. 两端简支边界条件下, 推导的固有频率表达式为^[19]:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{S}{m} \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2 S} \right)}, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (26)$$

式中, n 为模态序列数.

对于两端简支边界条件下拉索的横向振动分析, 在进行数值计算时, 模拟简支边界约束条件如

下: 扭转约束弹簧刚度系数为零, 线性约束弹簧刚度系数为某个足够大的数. 拉索两端线性弹簧约束刚度不同, 拉索前 8 阶振动频率变化情况见表 1. 线性弹簧刚度系数达到 $k_1 = k_2 = 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $k_{r1} = k_{r2} = 0 \text{ Nm} \cdot \text{rad}^{-1}$ 时, 拉索的固有频率趋于稳定. 表中还给出了模拟两端简支边界条件下, 拉索横向振动模态频率与经典简支边界条件频率的结果比较, 并且采用解析法求解简支边界下的拉索振动微分方程. 表 1 还显示, 可通过对模型中边界约束设置为简支边界约束, 计算拉索固有频率. 通过比较两者的计算结果, 最大偏差为 0.43%, 两者结果吻合良好, 验证了模型的正确性

表 1 简支边界条件下线性弹簧约束刚度系数收敛情况

模态阶数	边界约束刚度系数 $k_1=k_2/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$					理论解	误差/%
	10^1	10^3	10^7	10^9	10^{11}		
1	0.01	0.07	0.67	0.67	0.67	0.67	0.00
2	0.67	0.68	1.34	1.34	1.34	1.34	0.00
3	1.34	1.35	2.00	2.01	2.01	2.01	0.00
4	2.01	2.02	2.67	2.68	2.68	2.68	0.00
5	2.69	2.69	3.34	3.36	3.36	3.36	0.00
6	3.36	3.36	4.02	4.03	4.03	4.03	0.00
7	4.04	4.03	4.70	4.72	4.72	4.70	0.43
8	4.79	4.77	5.72	5.79	5.73	5.71	0.35

如表 2 所示, 给出了在不同截断项数拉索前 7 阶频率的收敛情况. 随着截断项数的提高, 拉索计算结果更接近理论值, 因此后面计算过程中, 在保证计算结果准确性的条件下, 为提高计算效率, 对 Chebyshev 级数项数进行截断, 当截断项数取 12 时, 拉索固有频率基本接近理论值, 表明在对拉索进行固有频率的计算结果已经收敛, 为此在随后的数值计算中, 对 Chebyshev 级数项数展开时, 截断

表 2 Chebyshev 级数截断项数收敛情况

截断系数	模态阶数						
	1	2	3	4	5	6	7
7	0.67	1.34	2.02	2.70	4.00	5.10	6.34
8	0.67	1.34	2.01	2.70	3.42	5.10	6.34
9	0.67	1.34	2.01	2.69	3.42	4.16	6.33
10	0.67	1.34	2.01	2.69	3.36	4.14	4.93
11	0.67	1.34	2.01	2.69	3.36	4.05	4.90
12	0.67	1.34	2.01	2.68	3.36	4.02	4.70
理论值	0.67	1.34	2.01	2.68	3.36	4.03	4.70

系数均取前 12 项.

对于简支-简支边界条件, 只需将拉索两端线性支承约束刚度系数设置为 $k_1 = k_2 = 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, 而扭转约束刚度系数设置为零即可. 通过将特征方程求解所得的特征向量系统代入(18)式, 便可得到拉索横向振动模态振型. 分析不同线性约束刚度下拉索模态振型的变化规律, 图 2 给出了拉索前

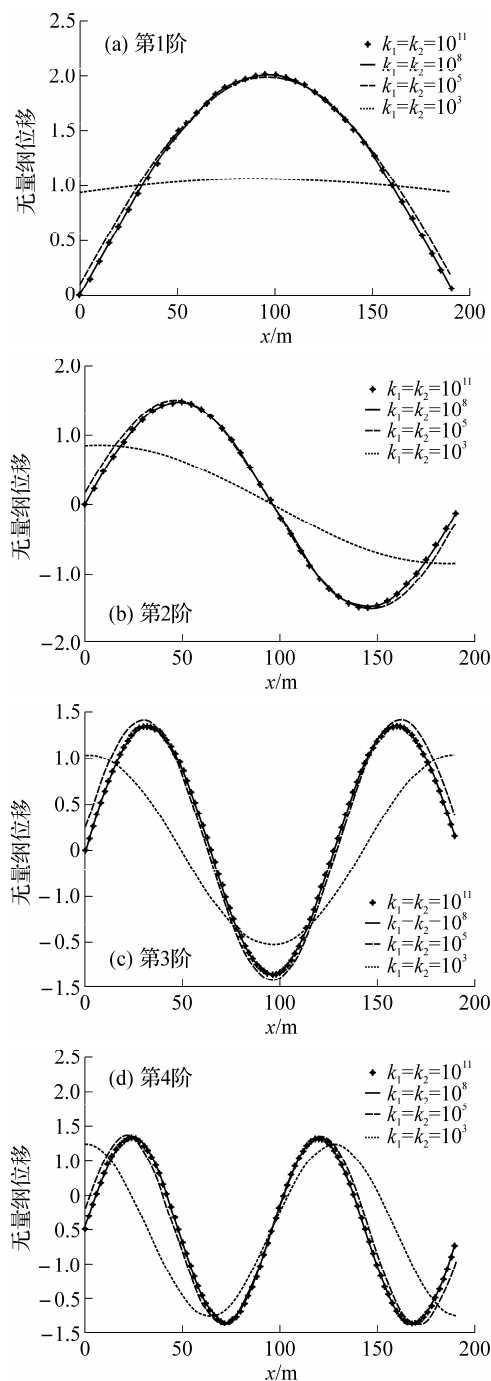


图 2 拉索前 4 阶模态振型下不同弹性边界约束刚度的变化

4 阶模态振型的变化情况. 由图可知, 拉索的模态振型在边界处位置发生了改变, 振型也发生相应变化.

为进一步验证模型的正确性, 本文计算了简支边界约束下的解析解, 并对本文模拟简支边界下拉索振型分布与解析解进行比较, 如图 3 所示, 两者结果吻合良好. 对于两端简支边界, 通过计算

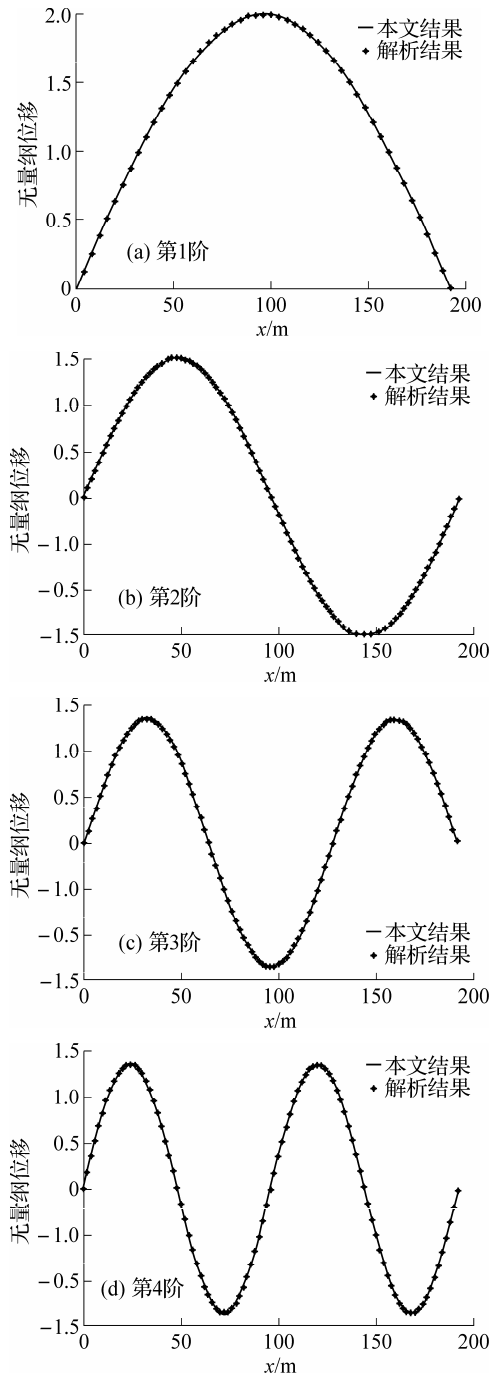


图3 简支边界条件拉索横向振动模态振型图

分析可知, $l\sqrt{T/(EI)}$ 不是很大的情况下, 可用正弦曲线来替代理论振型函数^[20], 即:

$$w(x) = \sin(n\pi x / l), \quad (27)$$

式中, n 为模态序列数.

2.2 两端固支边界约束条件

对两端固支边界条件下拉索横向振动分析, 考虑扭转弹簧刚度系数从零到无穷大进行变化, 即整个过程相当于从简支-简支到固支-固支的演变过渡. 采用文献[21]中相关参数进行分析, 拉索弯曲刚度 $EI = 2.67 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^2$, 拉索长度 $l = 8.21 \text{ m}$, 拉索索力 $S = 574.31 \text{ kN}$, 线密度 $m = 24.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$, 线性约束弹簧刚度系数为 $k_1 = k_2 = 10^{11} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$, 扭转约束弹簧刚度系数 k_{r1}, k_{r2} 从 0 增加到 $10^{11} \text{ Nm}\cdot\text{rad}^{-1}$. 表 3 给出了前 5 阶拉索固有频率随扭转约束刚度系数的变化情况. 由此可以看出, 当扭转弹簧刚度系数取值达到 $k_{r1}, k_{r2} = 10^9 \text{ Nm}\cdot\text{rad}^{-1}$ 时, 继续增加扭转刚度系数将不再改变系统固有频率. 根据经典理论可知, 固支拉索的振动频率由求解频率方程给出^[22].

$$2\lambda_1\lambda_2(1 - \text{ch}\lambda_2 l \cos\lambda_1 l) + \text{sh}\lambda_2 l \sin\lambda_1 l(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) = 0, \quad (28)$$

其中,

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{2} + k^4}}, \lambda_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{2} + k^4}},$$

$$\alpha^2 = S / (EI), k^4 = \omega^2 m / (EI).$$

表3 固支边界条件下扭转弹簧约束刚度系数收敛情况

模态	边界约束系数 $k_{r1}=k_{r2}/(\text{Nm}\cdot\text{rad}^{-1})$					文献	误差/
阶数	10^1	10^3	10^5	10^7	10^9	[22]	%
1	9.74	9.74	10.06	11.66	11.66	11.66	0.00
2	21.25	21.26	21.86	25.31	25.31	25.31	0.00
3	35.89	35.90	36.72	42.30	42.30	42.30	0.00
4	54.47	54.48	55.46	63.37	63.37	63.37	0.00
5	77.43	77.45	78.54	88.88	88.88	88.88	0.00

表 3 还列出了模拟两端固支边界条件下, 拉索横向振动模态频率与文献[22]结果的比较, 进一步验证了本文理论模型的正确性. 从表中看出, 本文模拟固支边界约束计算结果与文献[22]相比, 前 5 阶固有频率基本相同, 两者偏差为 0.

2.3 固支-弹性边界约束条件

2.3.1 线性弹簧刚度对拉索频率的影响

分析线性支承刚度对拉索固有频率的影响规

律,以及拉索一端的线性约束刚度系数变化对固有频率的影响.当边界约束从固支-自由变化到固支-简支状态时,表4给出了不同边界刚度下拉索前5阶固有频率变化情况.由表中数据可知,随着线性边界约束刚度的增加,拉索各阶固有频率逐渐升高,但这种变化并不均匀.当 k_2 取值小于 $10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ 时,拉索自振频率变化较小;当 k_2 取值 $10^3\sim 10^7 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ 时,固有频率变化较大,为线性刚度对拉索固有频率影响的敏感区间.表中还对本文模拟固支-简支边界条件下的拉索固有频率与文献[23]结果进行比较,可以看出两者能够很好地吻合,最大偏差为1.62%.计算结果表明本文在对拉索横向振动特性分析的正确性.

表4 一端固支一端弹性约束不同边界刚度下

模态 阶数	拉索前5阶固有频率 边界支承刚度系数 $k_2/(\text{Nm}\cdot\text{rad}^{-1})$					Hz 文献 [23]
	10^1	10^3	10^5	10^7	10^9	
1	5.20	5.20	7.04	10.53	10.62	10.62
2	16.33	16.33	17.33	22.93	23.15	23.15
3	29.72	29.72	30.43	38.50	38.97	38.94
4	46.47	46.47	47.01	59.61	59.70	58.75
5	72.82	72.82	73.30	80.96	82.35	82.96

注:模态阶数1~5误差分别为0.00%,0.00%,0.00%,1.62%,0.74%.

2.3.2 扭转弹簧刚度对拉索频率的影响

将固支-固支边界拉索结构一端的扭转约束进行释放,即该端扭转弹簧刚度系数从零到无穷大进行变化,整个过程相当于从固支-简支到固支-固支的演变过渡.表5给出了拉索前5阶固有频率随扭转约束刚度系统的变化.从表中可见,相比较于线性约束刚度情况,扭转约束刚度的影响较为平缓.当 k_{r2} 取值小于 $10^3 \text{ Nm}\cdot\text{rad}^{-1}$ 时,固有频率变化并不明显;当 k_{r2} 取值 $10^5\sim 10^7 \text{ Nm}\cdot\text{rad}^{-1}$ 时,固有

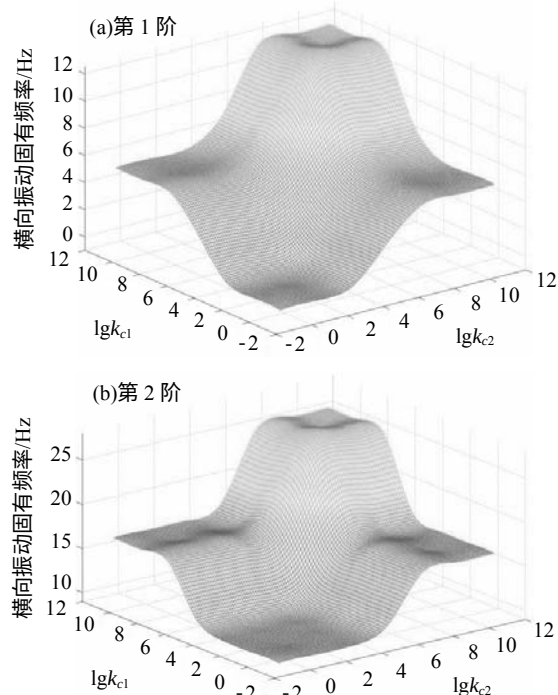
表5 一端固支一端弹性约束不同扭转约束刚度下

模态 阶数	拉索前5阶固有频率 边界扭转约束刚度系数 $k_{r2}/(\text{Nm}\cdot\text{rad}^{-1})$					Hz
	10^1	10^3	10^5	10^7	10^9	
1	10.62	10.62	10.80	11.61	11.66	11.66
2	23.15	23.16	23.49	25.21	25.31	25.31
3	38.97	38.98	39.41	42.15	42.34	42.34
4	60.94	60.95	61.62	62.78	63.37	63.37
5	85.47	86.38	87.07	88.31	88.88	88.88

频率变化较大,为扭转刚度对拉索固有频率影响的敏感区间.从表中还可以看出,随着边界扭转约束刚度逐渐增加,各阶固有频率相应提高;当边界扭转约束刚度达到 $10^9 \text{ Nm}\cdot\text{rad}^{-1}$ 时,拉索横向振动频率趋向于稳定.

2.4 两端弹性支承边界约束条件

分析两端弹性支承边界约束情况.为更加全面揭示边界约束刚度对拉索振动特性的影响规律,设定变量 $k_{c1}=k_{r1}=k_1, k_{c2}=k_{r2}=k_2$,拉索固有频率与其两端边界约束刚度变化如图4所示,其中 k_{r1}, k_1 和 k_{r2}, k_2 从0.1(自由边界)增加到 1×10^{12} (固支边界).图4(a)~(d)为拉索第1阶到第4阶固有频率的变化情况.从图中可知,随着拉索两端边界约束刚度的增大,拉索固有频率也相应增大;当边界约束达到固支边界约束时,继续增大边界约束刚度,拉索固有频率不再增加.结果表明,边界约束刚度对拉索固有频率的影响存在一定范围,超出此范围时,拉索横向振动固有频率将保持不变.从频率分析角度上来看,在索力一定的情况下,将拉索两端当做简支和固支处理时,分别计算简支边界下拉索固有频率与固支边界下的固有频率,拉索前4阶自振频率相差16.50%,16.03%,15.90%,14.05%,说明边界条件对拉索横向振动固有频率有显著影响.因而在进行索力估算时,需要考虑拉索实际的



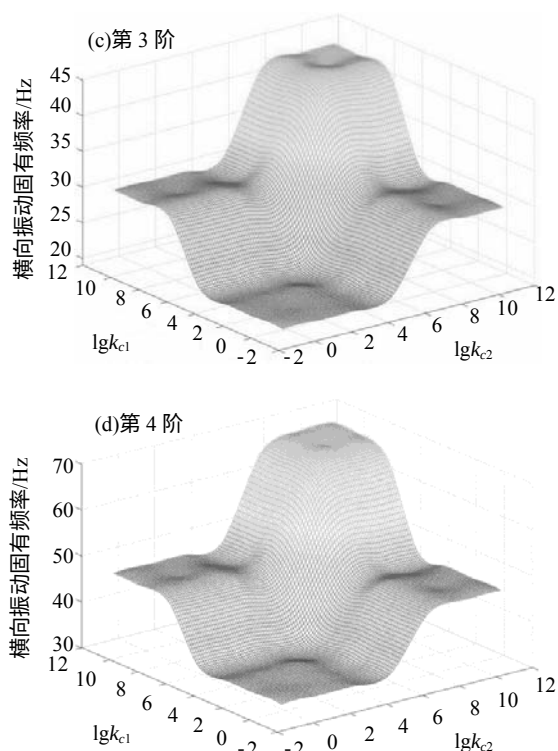


图4 边界约束刚度对拉索横向振动特性的影响

边界扭转约束情况; 在考虑边界约束情况时, 通过测量的拉索振动频率与计算的频率进行迭代得到扭转约束的初值, 可以提高索力估算的精度。

3 结论

本文建立了弹性边界约束条件下拉索横向振动模型, 通过在拉索边界处增加2组约束弹簧来模拟弹性边界约束条件。设置2组弹簧刚度系数来模拟经典边界约束条件, 计算出经典边界约束下的拉索横向振动频率与振型分布, 与文献中结果比较, 两者吻合良好, 验证了本文建立模型的正确性。同时仿真分析了线性边界约束刚度和扭转约束刚度对其横向振动特性的影响。

通过研究得到如下结论:

(1)提出了一种弹性边界条件下, 拉索结构横向振动特性分析的Chebyshev多项式方法, 建立了弹性边界条件下拉索横向振动特性预报模型, 通过Rayleigh-Ritz法获得Chebyshev多项式级数解, 得到系统特征矩阵方程。

(2)分析了边界约束刚度对拉索横向振动特性的影响规律, 结果表明, 在一定范围内, 边界约束刚度对拉索横向振动频率影响较大; 当边界约束

刚度超过此范围时, 边界约束刚度对拉索固有振动特性影响程度降低。线性约束弹簧刚度的变化对拉索横向振动特性的影响甚于扭转弹簧刚度的变化, 且线性约束刚度取值越大, 横向振动频率越大。在实际工程应用中, 进行索力估算时, 需要考虑边界条件对拉索的频率影响, 在不同边界条件下拉索的自振频率有明显变化。通过分析线性支承刚度和扭转刚度对拉索横向固有频率的影响规律, 并通过测量拉索的振动频率, 进而确定边界的约束初值, 所得结果可用于斜拉桥拉索的索力识别问题, 修正拉索索力, 以及提高拉索预拉力的计算精度。

(3)本文在研究弹性边界下拉索的振动特性时, 与其他文献相比较, 当边界约束条件改变时, 不需要对理论模型和计算程序进行重新修改, 仅需设置边界约束刚度系数即可得到, 实现了弹性边界条件下拉索横向振动特性分析情况。

参考文献:

- [1] 陈政清. 工程结构的风致振动、稳定与控制[M]. 北京: 科学出版社, 2013:518-519.
- [2] 叶庆卫, 袁德彬, 王晓东. 斜拉索非线性振动信号粒子滤波分析与应用[J]. 振动与冲击, 2013, 32(5):108-112.
- [3] Ye Q W, Feng Z M, Yuan D B. Nonlinear vibration signal tracking of large offshore bridge stayed cable based on particle filter[J]. Polish Maritime Research, 2015, 22 (4):70-75.
- [4] Salawu O S. Detection of structural damage through changes in frequency: A review[J]. Engineering Structural, 1997, 19(9):718-723.
- [5] 张戌社, 杜彦良, 孙宝臣, 等. 光纤光栅压力传感器在斜拉索索力监测中的应用研究[J]. 铁道学报, 2002, 24 (6):47-49.
- [6] Wang M I, Chen Z L, Koontz S S. Magneto elastic method of stress monitoring in steel tendons and cables[J]. SPIE Proceedings Series International Society for Optical Engineering Proceedings Series, 2000, 3995:492-500.
- [7] Russell J C, Lardner T J. Experiment determination of frequencies and tension for elastic cables[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, 124(10):1067-1072.
- [8] Mehrabi A B, Tabatabai H. Unified finite difference formulation for free vibration of cable[J]. Journal of Structural Engineering, 1998, 124(11):1313-1322.
- [9] 宋一凡, 贺拴海, 吴小平. 固端刚性拉索索力分析能量法[J]. 西安公路交通大学学报, 2001, 21(1):55-57.

- [10] 徐霞飞, 任伟新. 边界条件对吊索索力估算的影响[J]. 铁道科学与工程学报, 2008, 5(6):26-31.
- [11] Zui H, Shinke T, Hamazaki Y. Practical formulas for estimation cable tension by vibration method[J]. Journal of Structural Engineering, 1996, 122(60):651-656.
- [12] 李国强, 顾明. 拉索振动、动力检测与振动控制理论[M]. 北京: 科学出版社, 2014:98-99.
- [13] 郭向荣, 陈淮. 弹性支承对斜拉桥拉索自振特性的影响[J]. 郑州工业大学学报, 2000, 3(1):34-36.
- [14] 任伟新, 陈刚. 由基频计算拉索索力的实用公式[J]. 土木工程学报, 2005, 38(11):26-31.
- [15] Prato C A, Ceballos M A. Dynamic bending stresses near the ends of parallel-bundle stay cables[J]. Structural Engineering International, 2003, 13(1):64-68.
- [16] Ceballos M A, Prato C A. Determination of the axial force on stay cables accounting for their bending stiffness and restraints by free vibration tests[J]. Journal of sound and vibration, 2008, 317(2):127-141.
- [17] 魏金波, 李国强, 蒋夏子俊. 弹性支承拉索动力特性研究[J]. 结构工程师, 2011, 27(3):25-30.
- [18] Fox L, Parker I B. Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis[M]. London: Oxford University Press, 1968.
- [19] Harris C M. 冲击与振动手册[M]. 5版. 刘树林, 王金东, 李凤明, 等, 译. 北京: 中国石化出版社, 2008: 115-167.
- [20] 袁从森. 斜拉索振动研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2012.
- [21] 刘文峰, 应怀樵, 柳春图. 考虑刚度及边界条件的索力精确求解[J]. 振动与冲击, 2003, 22(4):12-14.
- [22] 廖敬波, 唐光武. 固结拉索的一种近似频率计算公式[J]. 振动与冲击, 2013, 32(6):149-151; 172.
- [23] 秦小平, 廖敬波. 固支-铰支拉索近似频率计算公式及其求解条件讨论[C]. 第二十一届桥梁学术会议论文集(下册), 大连, 2014.

Transverse vibration of cables under elastic boundary conditions

CHENG Peng, FENG Zhi-min, CHEN Yue-hua*, ZHANG Gang, YAN Wei

(Faculty of Maritime and Transportation, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The linear springs and the torsion springs are applied to both ends of the cable. By introducing the boundary springs and defining stiffness constants to the springs, the transverse vibration model of the cable under arbitrary elastic boundary conditions including all the classical boundary conditions can be easily obtained. The displacement of the transverse vibration of the cable is extended to a Chebyshev series, which makes the constructed functions sufficiently smooth in the whole solution domain. The transverse vibration of the cable under different boundary conditions is also investigated. The test results are in good agreement with those from the references for verifying the correctness of the constructed model. The analysis on influence of boundary stiffness and torsional stiffness on the transverse vibration characteristics of the cable is conducted, indicating that the influence of the boundary condition on the natural frequencies of the cable should by all means be taken into consideration.

Key words: stay cable; transverse vibration; elastic boundary constraint; Chebyshev series; natural frequencies

(责任编辑 章践立)