

Levi 方程组的最优系统、对称约化和守恒律

鲁亚南, 沃维丰*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 利用李群分析方法得到了 Levi 方程组的向量场并构造了对应的一维最优系统, 根据最优系统对方程组进行约化, 给出了方程组的守恒律.

关键词: 李群分析; 最优系统; 对称约化; 守恒律

中图分类号: O175.27

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2018) 02-0074-05

随着孤子理论快速发展, 学者们研究出了许多行之有效的构造非线性偏微分方程精确解的方法, 如 Bäcklund 变换、Darboux 变换、反散射变换^[1]、经典和非经典李群方法^[2-4]等. 其中经典和非经典李群方法是非常重要的方法之一, 近些年得到了广泛的应用与发展^[5-13].

本文考虑 Levi 方程组:

$$\begin{cases} \Delta_1 = u_t - 2uu_x - 2v_x + u_{xx} = 0, \\ \Delta_2 = v_t - 2(uv)_x - v_{xx} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

文献[6]由 Hirota 双线性法和朗斯基行列式法得到 Levi 方程组(1)的双线性形式, 并得到其孤子解; 文献[7]利用双 Bell 多项式得到 Levi 方程组(1)的双线性形式, 得到其精确解; 文献[8]给出了 Levi 方程组的李对称分析、基本相似约化以及一些精确解, 但只利用 4 个无穷小生成子对方程组进行了对称约化. 为了得到所有不等价的约化系统, 我们考虑了从所有无穷小生成子的线性组合中选取合适且不等价的生成元来优化方程组, 采用的方法是构造最优系统. 本文系统地给出了 Levi 方程组(1)的生成元及其最优系统, 然后在最优系统的基础上对原方程进行约化, 最后给出方程组(1)的共轭方程组以及相应的守恒律.

1 方程组(1)的李群分析和最优系统

设 Levi 方程组的对称群由如下形式的向量场

生成:

$$V = \xi(x, t, u, v) \partial_x + \tau(x, t, u, v) \partial_t + \eta_u(x, t, u, v) \partial_u + \eta_v(x, t, u, v) \partial_v, \quad (2)$$

若向量场(2)是方程组(1)的一个李点对称, 那么 V 必须满足下面的李对称条件^[3]:

$$\text{pr}^{(2)} V(\Delta_1)|_{\Delta_1=\Delta_2=0} = 0,$$

$$\text{pr}^{(2)} V(\Delta_2)|_{\Delta_1=\Delta_2=0} = 0,$$

其中: $\text{pr}^{(2)} V$ 是 V 的二阶延拓, 由

$$\begin{aligned} \text{pr}^{(2)} V = & V + \eta_x^{(1)} \partial_{u_x} + \\ & \eta_t^{(1)} \partial_{u_t} + \eta_{xx}^{(2)} \partial_{u_{xx}} + \eta_{tt}^{(2)} \partial_{u_{tt}} + \eta_{xt}^{(2)} \partial_{u_{xt}} \end{aligned}$$

给出. 其中无穷小 $\eta_x^{(1)}$, $\eta_t^{(1)}$, $\eta_{xx}^{(2)}$, $\eta_{tt}^{(2)}$, $\eta_{xt}^{(2)}$ 可由 ξ, τ, η 及其导数表示.

由李对称条件得到一系列决定方程:

$$\xi_x = \frac{1}{2} \tau_t, \quad \xi_u = \xi_v = \xi_t = 0,$$

$$\tau_x = \tau_u = \tau_v = \tau_t = 0,$$

$$\eta_u = -\frac{1}{2} u \tau_t - \frac{1}{2} \xi_t, \quad \eta_v = -v \xi_t,$$

解该决定方程组, 得到 Levi 方程组(1)的李点对称群的向量场为:

$$\xi = C_1 x + 2C_3 t + C_4, \quad \tau = 2C_1 t + C_2,$$

$$\eta_u = -C_3 u - C_3, \quad \eta_v = -2C_1 v,$$

其中: $C_i (i=1, \dots, 4)$ 是任意常数. 因此可得到 Levi 方程组的所有向量场的李点对称群的向量场为:

$$v_1 = x\partial_x + 2t\partial_t - u\partial_u - 2v\partial_v, \quad v_2 = \partial_t,$$

$$v_3 = 2t\partial_x - \partial_u, \quad v_4 = \partial_x.$$

由文献[3]李括号运算定义 $[v_i, v_j] = v_i v_j - v_j v_i$, 以及伴随表达式 $Ad(\exp(\varepsilon v_i))$ 的定义:

$$Ad(\exp(\varepsilon v_j)) =$$

$$v_j - \varepsilon[v_i, v_j] + \varepsilon^2/2![v_i, [v_i, v_j]] - \dots,$$

得到李代数交换子(表 1)和李代数伴随作用(表 2).

表 1 李代数交换子

Lie	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	$-2v_2$	v_3	$-v_4$
v_2	$2v_2$	0	$2v_4$	0
v_3	$-v_3$	$-2v_4$	0	0
v_4	v_4	0	0	0

表 2 李代数伴随

Ad	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	v_1	$e^{2\varepsilon}v_2$	$e^{-\varepsilon}v_3$	$e^{\varepsilon}v_4$
v_2	$v_1 - 2\varepsilon v_2$	v_2	$v_3 - 2\varepsilon v_4$	v_4
v_3	$v_1 + \varepsilon v_3$	$v_2 + 2\varepsilon v_4$	v_3	v_4
v_4	$v_1 - \varepsilon v_4$	v_2	v_3	v_4

定理 1 方程组(1)对称代数的一维最优系统是由下面元素组成的集合:

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2, \quad w_3 = v_3, \quad w_4 = v_4,$$

$$w_5 = v_2 - v_3, \quad w_6 = v_2 + v_3.$$

证明 利用文献[9]的方法求解方程组(1)对称代数的一维最优系统, 其方法主要分为 3 步, 记微分方程组的 n 维对称代数 $\mathcal{G} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, $\mathcal{G}$ 对应的对称群为 G .

第 1 步: 求出对称代数的不变量. 若存在一个实函数 $\phi = \phi(a_1, a_2, \dots, a_n)$, 使得对任意的 $v \in \mathcal{G}$ 和 $G \in G$ 都有 $\phi(Ad_g(v)) = \phi(v)$ 成立, 则称 ϕ 是一个不变量.

用任意子群 $w = \sum_{j=1}^n b_j v_j$ 作用在方程组(1)的一般向量 $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ 上,

$$Ad_{\exp(\varepsilon w)}(v) = e^{-\varepsilon w} v e^{\varepsilon w} =$$

$$v - \varepsilon[w, v] + \varepsilon^2/2![w, [w, v]] - \dots =$$

$$(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) - \varepsilon[b_1 v_1 + \dots +$$

$$b_n v_n, a_1 v_1 + \dots + a_n v_n] + O(\varepsilon^2) = (a_1 v_1 + \dots +$$

$$a_n v_n) - \varepsilon(\Theta_1 v_1 + \dots + \Theta_n v_n) + O(\varepsilon^2) =$$

$$(a_1 - \varepsilon\Theta_1, \dots, a_n - \varepsilon\Theta_n) + O(\varepsilon^2),$$

其中: $\Theta_i \equiv \Theta_i(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ 可由表 1 计算得到.

由对称代数的不变量定义, 得:

$$\phi(a_1 - \varepsilon\Theta_1 + O(\varepsilon^2), \dots, a_n - \varepsilon\Theta_n + O(\varepsilon^2)) =$$

$$\phi(a_1, \dots, a_n) - \varepsilon(\Theta_1 \frac{\partial \phi}{\partial a_1} + \dots + \Theta_n \frac{\partial \phi}{\partial a_n}) + O(\varepsilon^2),$$

如果对于任意的 b_i , 都有:

$$\Theta_1 \frac{\partial \phi}{\partial a_1} + \dots + \Theta_n \frac{\partial \phi}{\partial a_n} = 0$$

成立, 则求解相应的 n 个方程组可以得到不变量 ϕ .

用任意子群 $w = \sum_{j=1}^4 b_j v_j$ 作用在方程组(1)的

一般向量 $v = \sum_{i=1}^4 a_i v_i$ 上,

$$Ad_{\exp(\varepsilon w)}(v) = e^{-\varepsilon w} v e^{\varepsilon w} =$$

$$v - \varepsilon[w, v] + \varepsilon^2/2![w, [w, v]] - \dots =$$

$$(a_1 v_1 + \dots + a_4 v_4) - \varepsilon[b_1 v_1 + \dots +$$

$$b_4 v_4, a_1 v_1 + \dots + a_4 v_4] + O(\varepsilon^2) = (a_1 v_1 + \dots +$$

$$a_4 v_4) - \varepsilon(\Theta_1 v_1 + \dots + \Theta_4 v_4) + O(\varepsilon^2) =$$

$$(a_1 - \varepsilon\Theta_1, \dots, a_4 - \varepsilon\Theta_4) + O(\varepsilon^2),$$

其中:

$$\Theta_1 = 0, \quad \Theta_2 = -2b_1 a_2 + 2b_2 a_1,$$

$$\Theta_3 = b_1 a_3 - b_3 a_1,$$

$$\Theta_4 = -b_1 a_4 + 2b_2 a_3 - 2b_3 a_2 + b_4 a_1,$$

将 $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ 代入 $\Theta_1 \frac{\partial \phi}{\partial a_1} + \dots + \Theta_4 \frac{\partial \phi}{\partial a_4} = 0$, 提取所

有 $b_i (i=1, \dots, 4)$ 的系数, 并令其为 0, 得到下面的方程组:

$$\begin{cases} -2a_2 \frac{\partial \phi}{\partial a_2} + a_3 \frac{\partial \phi}{\partial a_3} - a_4 \frac{\partial \phi}{\partial a_4} = 0, \\ 2a_1 \frac{\partial \phi}{\partial a_2} + a_3 \frac{\partial \phi}{\partial a_4} = 0, \\ -a_1 \frac{\partial \phi}{\partial a_3} - 2a_2 \frac{\partial \phi}{\partial a_4} = 0, \\ a_1 \frac{\partial \phi}{\partial a_4} = 0, \end{cases}$$

求解方程组得到 $\phi(a_1, a_2, a_3, a_4) = F(a_1)$, 其中 F 是关于 a_1 的任意函数. 即方程组(1)有一个基本不变量 a_1 , 而通过计算得 Levi 方程组(1)的 Killing 型为 $6a_1^2$, 即方程组(1)仅有一个不变量 a_1 .

第 2 步: 得到不变量后, 再利用 Ovsiannikov 伴

随表示全矩阵方法^[4]计算一般伴随矩阵 A , 该矩阵分别用 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 作用在一般向量 $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ 对应的伴随作用矩阵 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的乘积. A_i 由式(3)给出.

$$\begin{aligned} Ad_{\exp(\varepsilon_i v_i)}(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = \\ a_1 Ad_{\exp(\varepsilon_i v_i)}(v_1) + \dots + a_n Ad_{\exp(\varepsilon_i v_i)}(v_n) = \\ R_i v_1 + \dots + R_n v_n, \end{aligned} \quad (3)$$

其中: $R_i \equiv R_i(a_1, \dots, a_n, \varepsilon_i)$, $i = 1, \dots, n$, 将式(3)写成下面的矩阵形式:

$$\begin{aligned} v \bullet (a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow (R_1, R_2, \dots, R_n) = \\ (a_1, a_2, \dots, a_n) A_i, \end{aligned}$$

即对一般向量 v 作最一般的共轭作用

$$Ad(\exp(\varepsilon_n v_n)) \cdots Ad(\exp(\varepsilon_2 v_2)) Ad(\exp(\varepsilon_1 v_1)),$$

其伴随变换为:

$$\begin{aligned} v \bullet (a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \\ (a_1, a_2, \dots, a_n) A, \end{aligned} \quad (4)$$

若方程(4)有解, 则意味着 $\sum_{i=1}^n a_i v_i$ 在伴随作用下与 $\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i v_i$ 等价.

计算一般伴随矩阵 A , 该矩阵是分别用 $v_1, v_2, \dots, v_n$ 作用在一般向量 $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ 对应的伴随作用矩阵 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的乘积. 以 A_1 为例:

$$\begin{aligned} Ad_{\exp(\varepsilon_1 v_1)}(v) = a_1 Ad_{\exp(\varepsilon_1 v_1)}(v_1) + \dots + \\ a_4 Ad_{\exp(\varepsilon_1 v_1)}(v_4) = a_1 v_1 + \\ a_2 e^{2\varepsilon_1} v_2 + a_4 a_3 e^{-\varepsilon_1} v_3 + e^{\varepsilon_1} v_4 = \\ (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot A_1 \cdot (v_1, v_2, v_3, v_4)^T, \end{aligned}$$

其中伴随矩阵 A_1 为:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\varepsilon_1} \end{bmatrix},$$

类似可得如下伴随矩阵 A_2, A_3, A_4 .

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2\varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2\varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\varepsilon_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

因此, 一般伴随矩阵 A 为:

$$A = A_1 A_2 A_3 A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2\varepsilon_2 & \varepsilon_3 & -4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\ 0 & e^{2\varepsilon_1} & 0 & 2e^{2\varepsilon_1}\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & e^{-\varepsilon_1} & 2e^{-\varepsilon_1}\varepsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\varepsilon_1} \end{bmatrix},$$

其中伴随变换为:

$$(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) A. \quad (5)$$

第3步: 得到不变量和一般伴随矩阵 A 后, 可系统地构造李代数的一维最优系统. 若对任何不变量 ϕ , 都有 $\phi(v) = \phi(w)$ 成立, 则称向量 v, w 是等价的. 注意当 $v = cw$ 时, 对应的等价关系为 $\phi(v) = c'\phi(w)$, 而一般有 $\phi(v) \neq \phi(w)$, 为避免这种情况, 简化了不变量.

不失一般性, 只需要考虑不变量的值为 $1, -1, 0$ 三种情况. 当不变量的量度为奇数时, 对于 $v = cw$ 有 $\phi(v) = c^{2k+1}\phi(w)$, 可以选取合适的 c 改变不变量的符号, 考虑不变量值为 $\phi = 0$ 和 $\phi \neq 0$ (为方便起见, 取 ϕ 值为 $1, -1$) 两种情况. 当不变量的量度为偶数时, 对 $v = cw$, 有 $\phi(v) = c^{2k}\phi(w)$, 此时无法选取合适的 c 来改变不变量的符号, 需要考虑不变量值为 $0, 1, -1$ 三种情况.

下面分别讨论得到 Levi 方程组(1)的最优系统:

情形1 $a_1 = 1$.

取一个代表元 $\tilde{v} = v_1$, 将 $\tilde{a}_1 = 1, \tilde{a}_2 = \tilde{a}_3 = \tilde{a}_4 = 0$ 代入伴随变换式(5)中, 得到一组解:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = \frac{a_2 e^{2\varepsilon_1}}{2a_1}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{a_3 e^{-\varepsilon_1}}{a_1}, \\ \varepsilon_4 = \frac{(a_1 a_4 + a_2 a_3) e^{\varepsilon_1}}{a_1^2}, \end{aligned}$$

其中: ε_i 是任意常数. 这意味着方程组(1)的任意一维子空间与 v_1 等价.

情形2 $a_1 = 0$.

此时由伴随变换式(5)得到一个新的不变量 $\phi(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_2 a_3^2$, 该不变量量度为 3, 所以分下面 2 种情形讨论:

(1) 当 $a_2 a_3^2 = 1$ 时, 先取一个代表元 $\tilde{v} = v_2 + v_3$,

将 $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_4 = 0$, $\tilde{a}_2 = \tilde{a}_3 = 1$ 代入伴随变换(5)中, 得到一组解:

$$\varepsilon_1 = \ln a_3, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\frac{a_3 a_4}{2},$$

其中: ε_4 是任意常数. 这意味着方程组(1)的任意一维子空间与 $v_2 + v_3$ 等价.

再取一个代表元 $\tilde{v} = v_2 - v_3$, 将 $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_4 = 0$, $\tilde{a}_2 = 1$, $\tilde{a}_3 = -1$ 代入伴随变换式(5)中, 得到一组解:

$$\varepsilon_1 = -\frac{\ln a_2}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{a_3 a_4}{2}, \quad \varepsilon_3 = a_3 a_4,$$

其中: ε_4 是任意常数. 这意味着方程组(1)的任意一维子空间与 $v_2 - v_3$ 等价.

(2)当 $a_2 a_3 = 0$ 时, 分为下面 3 种子情形:

(i)当 $a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$ 时, 取一个代表元 $\tilde{v} = v_3$, 将 $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = \tilde{a}_4 = 0$, $\tilde{a}_3 = 1$ 代入伴随变换式(5)中, 得到一组解:

$$\varepsilon_1 = \ln a_3, \quad \varepsilon_2 = -\frac{a_3 a_4}{2},$$

其中: $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是任意常数. 这意味着方程组(1)的任意一维子空间与 v_3 等价.

(ii)当 $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$ 时, 取一个代表元 $\tilde{v} = v_2$, 将 $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_3 = \tilde{a}_4 = 0$, $\tilde{a}_2 = 1$ 代入伴随变换式(5)中, 得到一组解:

$$\varepsilon_1 = -\frac{\ln a_2}{2}, \quad \varepsilon_3 = -\frac{a_4}{2\sqrt{a_2}},$$

其中: $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ 是任意常数. 这意味着方程组(1)的任意一维子空间与 v_2 等价.

(iii)当 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_4 \neq 0$ 时, 取一个代表元 $\tilde{v} = v_4$, 将 $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = \tilde{a}_3 = 0$, $\tilde{a}_4 = 1$ 代入伴随变换式(5)中, 得到一组解:

$$\varepsilon_1 = -\ln a_4, \quad \varepsilon_2 = -\frac{a_3}{2a_4},$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{a_2}{2a_4}, \quad \varepsilon_4 = \frac{2a_1 a_4 - a_2 a_3}{2a_4^2},$$

这意味着方程组(1)的任意一维子空间与 v_4 等价. 证明了方程(2)的任意一维子空间等价于 $w_1, \dots, w_6$ 所张成的某个子空间.

2 方程组(1)的对称约化和守恒律

基于 Levi 方程组(1)最优系统后, 可以得到方程组(1)的对称约化(表 3), 其中“'”表示单变量函数 P, Q 对自变量 ξ 的导数.

表 3 方程组(1)的约化方程

情形	不变量	约化方程
w_1	$\xi = x/t^{1/2}$	$\xi P' + 4PP' + P + 4Q' - 2P'' = 0$
	$P(\xi) = ut^{1/2}, Q(\xi) = vt$	$\xi Q + 2Q + 4(PQ)' + 2Q'' = 0$
w_2	$\xi = x$	$2PP' + 2Q' - P'' = 0$
	$P(\xi) = u, Q(\xi) = v$	$(PQ)' + Q'' = 0$
w_3	$\xi = t$	$P' = 0$
	$P(\xi) = x + 2tu, Q(\xi) = v$	$\xi Q' - Q = 0$
w_4	$\xi = t$	$P' = 0$
	$P(\xi) = u, Q(\xi) = v$	$Q' = 0$
w_5	$\xi = x - t^2$	$P'' - 2PP' - 2Q' - 1 = 0$
	$P(\xi) = u + t, Q(\xi) = v$	$Q'' + 2(PQ)' = 0$
w_6	$\xi = x + t^2$	$P'' - 2PP' - 2Q' + 1 = 0$
	$P(\xi) = u - t, Q(\xi) = v$	$Q'' + 2(PQ)' = 0$

下面给出 Levi 方程组(1)的伴随方程组以及相应的守恒律. 由 Ibragimov 给出的方程组的伴随方程定理^[14-16], 方程组(1)的伴随方程组为:

$$\begin{cases} \alpha_t - 2\alpha_x u - 2\beta_x v - \alpha_{xx} = 0, \\ \beta_t - 2\alpha_x - 2\beta_x u + \beta_{xx} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

并且有一个标准的拉格朗日函数为:

$$L = \alpha(u_t - 2uu_x - 2v_x + u_{xx}) + \beta(v_t - 2(uv)_x - v_{xx}),$$

其中 $\alpha = \alpha(x, t)$, $\beta = \beta(x, t)$ 由式(6)决定.

对于向量场 $w_1 = x\partial_x + 2t\partial_t - u\partial_u - 2v\partial_v$, 得到:

$$\xi = x, \quad \tau = 2t, \quad \eta_u = -u, \quad \eta_v = -2v,$$

$$W^1 = -u - xu_x - 2t u_t, \quad W^2 = -2v - xv_x - 2tv_t,$$

从而得到方程组(1)的守恒向量场为:

$$C^1 = \xi L + W^1 \frac{\partial L}{\partial u_t} + W^2 \frac{\partial L}{\partial v_t} =$$

$$2t\alpha(u_t - 2uu_x - 2v_x + u_{xx}) +$$

$$2t\beta(v_t - 2(uv)_x - v_{xx}) - \alpha(u + 2tu_t +$$

$$xu_x) - \beta(2v + 2tv_t + xv_x),$$

$$C^2 = \tau L + W^1 \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_{xx}} \right) +$$

$$W^2 \left(\frac{\partial L}{\partial v_x} - D_x \frac{\partial L}{\partial v_{xx}} \right) =$$

$$\alpha x(u_t - 2uu_x - 2v_x + u_{xx}) +$$

$$\beta x(v_t - 2(uv)_x - v_{xx}) + (u + 2tu_t + xu_x) +$$

$$(2\alpha u + 2\beta v + \alpha_x) - (2v + 2tv_t + xv_x) \cdot$$

$$(2\alpha + 2\beta u + \beta_x) - \alpha(xu_{xx} + u_x + 2tu_{xt} + u_x) +$$

$$\beta(2v_x + 2tv_{xt} + v_x + xv_{xx}).$$

对于向量场 $w_2 = \partial_t$, 可以得到方程组(1)的守恒向量场为:

$$C^1 = \alpha(u_t - 2uu_x - 2v_x) + \beta(2v_t - 2(uv)_x - v_{xx}),$$

$$C^2 = u_t(2\alpha u + 2\beta v + \alpha_x) +$$

$$v_t(2\alpha + 2\beta u + \beta_x) - \alpha u_{xt} + \beta v_{xt}.$$

对于向量场 $w_3 = 2t\partial_x - \partial_u$, 可以得到方程组(1)的守恒向量场为:

$$C^1 = -\alpha - 2\alpha tu_x - 2\beta tv_x,$$

$$C^2 = 2\alpha t(u_t - 2uu_x - 2v_x + u_{xx}) +$$

$$2\beta t(v_t - 2(uv)_x - v_{xx}) + (1 + 2tu_x) \cdot$$

$$(2\alpha u + 2\beta v + \alpha_x) + 2tv_x(2\alpha + 2\beta u +$$

$$\beta_x) - 2\alpha tu_{xx} + u_x + 2\beta tv_{xx}.$$

对于向量场 $w_4 = \partial_x$, 可以得到方程组(1)的守恒向量场为:

$$C^1 = -\alpha u_x - \beta v_x,$$

$$C^2 = \alpha(u_t - 2uu_x - 2v_x) +$$

$$\beta(2v_t - 2(uv)_x - v_{xx}) + u_x(2\alpha u + 2\beta v +$$

$$\alpha_x) + v_x(2\alpha + 2\beta u + \beta_x) - \alpha u_{xx} + \beta v_{xx}.$$

参考文献:

- [1] 李翊神. 孤子与可积系统[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1999:45-79.
- [2] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations[M]. New York: Springer, 1989:163-249.
- [3] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. New York: Springer, 1998:75-238.

- [4] Ovsiannikov L V. Group Analysis of Differential Equations[M]. New York: Academic Press, 1982:68-339.
- [5] Clakson P A, Kruskal M D. New similarity reductions of the Boussinesq equations[J]. J Math Phys, 1989, 30: 2201-2210.
- [6] You F C, Zhang J, Hao H H. Multi-soliton solutions of the Levi equations[EB/OL]. [2017-08-10]. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0256-307X/26/9/090201/pdf>.
- [7] Tang Y N, Tang Y, Zai W, et al. Binary bell polynomials, Hirota bilinear approach to Levi equation[J]. Appl Math and Com, 2017, 293:565-574.
- [8] 张颖元, 王岗伟. Levi 方程组的精确解和守恒律[J]. 聊城大学学报(自然科学版), 2011, 24(2):5-8.
- [9] Hu X R, Chen Y. A direct algorithm of one-dimensional optimal system for the group invariant solutions[J]. J Math Phys, 2015, 56:1-17.
- [10] Hu X R, Chen Y. Constructing two-dimensional optimal system of the group invariant solutions[J]. J Math Phys, 2016, 57:1-22.
- [11] Qu C Z. Symmetries and solutions to the thin film equations[J]. J Math Anal Appl, 2006, 317:381-397.
- [12] Chou K S, Li G X. A note on optimal systems for the heat equation[J]. J Math Anal Appl, 2001, 261:741-751.
- [13] Chou K S, Qu C Z. Optimal systems and group classification of (1+1)-dimensional heat equation[J]. Acta Appl Math, 2004, 83:257-287.
- [14] Ibragimov N H. Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians[J]. J Math Anal Appl, 2006, 318:742-757.
- [15] Ibragimov N H. Nonlinear self-adjointness and conservation laws[EB/OL]. [2017-08-10]. <http://iopscience.iop.org/article/0.1088/1751-8113/44/43/432002/pdf>.

Optimal system, symmetry reductions and conservation laws of Levi equations

LU Ya-nan, WO Wei-feng*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The vector fields of Levi equations are obtained and a corresponding one-dimensional optimal system is found. Reduced equations and conservation laws associated to the optimal system are discussed.

Key words: Lie group analysis; optimal system; symmetry reductions; conservation laws

(责任编辑 史小丽)