

两指标 B 值鞅空间 ${}_p H_\alpha^S(B)$ 的对偶

叶 臣, 钟才明

(宁波大学 科学技术学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 通过引入新型两指标 B 值鞅空间, 利用两指标 B 值鞅的 Fefferman 不等式, 证明了当 B 为自反 Banach 空间时, 由 p 均方算子定义的两指标 B 值鞅空间 ${}_p H_\alpha^S(B)$ 的对偶空间是 ${}_q K_\alpha^S(B^*)$, 同时讨论了对偶空间的相互嵌入关系与 Banach 空间的几何性质之间的密切联系.

关键词: 两指标 B 值鞅空间; 对偶空间; p 一致光滑; q 一致凸

中图分类号: O211.6

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2018) 02-0079-04

鞅空间的对偶空间是 H_p 鞅论中饶有兴趣的问题之一. 对于实值鞅, 1973 年, Garsia^[1]和 Herz^[2]引入 BMO 鞅空间, 并以此刻画了单指标鞅 Hardy 空间 ${}_2 H_1^S(R)$ 的对偶空间, 从而将函数空间 H_1 -BMO 对偶理论推广到实值鞅的情况; 1994 年 Weisz^[3]对单指标及两指标实值鞅空间 ${}_2 H_\alpha^S(R)$ 的对偶空间进行了深入全面的研究; 2016 年, Liu^[4]讨论了拟鞅的 Hardy 空间 $\hat{H}_\alpha$ 在 $1 < \alpha < \infty$ 时的对偶空间. 对于 B 值鞅, 1991 年刘培德^[5]结合 Banach 空间的几何性质给出了单指标 B 值鞅空间 ${}_p H_\alpha^S(B)$ 的对偶空间; 2001 年, Yu^[6]在 B 为自反 Banach 空间情形时给出了单指标 B 值鞅空间 ${}_p H_\alpha^S(B)$ 的对偶空间的完全刻画.

本文旨在利用已有两指标 B 值鞅的 Fefferman 不等式结果^[7], 通过对两指标 B 值鞅引入新型空间, 研究由 p 均方算子 $S^{(p)}(f)$ 所定义的两指标 B 值鞅空间 ${}_p H_\alpha^S(B)$ 的对偶空间, 并讨论对偶空间的相互嵌入关系与 Banach 空间几何性质之间的联系, 所得结论推广了单指标 B 值鞅及两指标实值鞅的相关结果.

1 符号及定义

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为完备的概率空间, $(B, \|\cdot\|)$ 为维数不小于 2 的 Banach 空间, $\{\mathcal{F}_n, n \in N^2\}$ 为 $\mathcal{F}$ 的关于 N^2 中的偏序不降的子 σ 代数列. 对 $\forall n = (n_1, n_2) \in N^2$, 记 $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{n \in N^2} \mathcal{F}_n)$ 及 $\mathcal{F}_{n-1} = \mathcal{F}_{n_1-1, n_2-1}$. 用

E, E_n 和 E_{n-1} 分别表示期望算子及关于 $\mathcal{F}_n$ 和 $\mathcal{F}_{n-1}$ 的条件期望算子.

如果取值于 Banach 空间 B 且可积的随机变量序列 $f = (f_n, n \in N^2)$ 关于 $\{\mathcal{F}_n, n \in N^2\}$ 是适应的, 即对所有 $n \in N^2$, f_n 关于 $\mathcal{F}_n$ 可测, 且当 $n \leq m$ 有 $E_n f_m = f_n$, 则称 $f = (f_n, n \in N^2)$ 为两指标 B 值鞅.

对于两指标 B 值鞅定义鞅差为:

$$d_n f = \begin{cases} 0, & n_1 n_2 = 0, \\ f_{n_1, n_2} - f_{n_1-1, n_2} - f_{n_1, n_2-1} + f_{n_1-1, n_2-1}, & n_1 n_2 \neq 0. \end{cases}$$

本文约定:

$$\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_{-1, i} = \mathcal{F}_{i, -1} = \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$

$$f_{-1} = f_{-1, i} = f_{i, -1} = f_0 = 0.$$

对定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上, 取值于 Banach 空间 B 上两指标鞅 $f = (f_n, n \in N^2)$, 本文用 f^* 及 $S^{(p)}(f)$ 表示极大算子及 p 均方算子:

$$f_n^* = \sup_{i \leq n} \|f_i\|, \quad f^* = \sup_{n \in N^2} \|f_n\|,$$

$$S_n^{(p)}(f) = \left(\sum_{0 \leq i \leq n} \|d_i f\|^p \right)^{1/p},$$

$$S^{(p)}(f) = \sup_{n \in N^2} S_n^{(p)}(f), \quad 0 < p < \infty.$$

我们用 $H_\alpha^*(B)$ 及 ${}_p H_\alpha^S(B)$ 表示下列两指标 B 值鞅空间:

$$H_\alpha^*(B) = \{f : \|f\|_{H_\alpha^*(B)} = \|f^*\|_\alpha < \infty\}, \quad 0 < \alpha \leq \infty,$$

$${}_p H_\alpha^S(B) = \{f : \|f\|_{{}_p H_\alpha^S(B)} = \|S^{(p)}(f)\|_\alpha < \infty\},$$

$$1 < p < \infty, \quad 0 < \alpha \leq \infty.$$

类似于文献[6]和[8],我们对两指标 B 值鞅引入新型空间 ${}_p K_\alpha(B)$ 及 ${}_p K_\alpha^S(B)$ 如下:

$$\begin{aligned} {}_p K_\alpha(B) &= \{f : \exists \gamma \in L_\alpha(R), \gamma \geq 0, \\ &E_n(\|\sum_{i=n}^m d_i f\|^p) \leq E_n(\gamma^p), \forall 1 \leq n \leq m < \infty\}, \\ \|f\|_{{}_p K_\alpha(B)} &= \inf_\gamma \|\gamma\|_\alpha, \quad 0 < p < \infty, p \leq \alpha \leq \infty; \\ {}_p K_\alpha^S(B) &= \{f : \exists \gamma \in L_\alpha(R), \gamma \geq 0, \\ &E_n(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p) \leq E_n(\gamma^p), \forall n \geq 1\}, \\ \|f\|_{{}_p K_\alpha^S(B)} &= \inf_\gamma \|\gamma\|_\alpha, \quad 0 < p < \infty, p \leq \alpha \leq \infty. \end{aligned}$$

若 2 个赋范或拟赋范空间 X 和 Y 同构,且它们的范数等价,即存在常数 $C_1, C_2 > 0$,使得对所有 $f \in X$ 有 $C_1 \|f\|_X \leq \|f\|_Y \leq C_2 \|f\|_X$,则称 X 和 Y 等价(简记为 $X \approx Y$). 赋范空间 X 的对偶空间表示为 X^* ,如果 $X^* \approx Y$,则称 Y 是 X 的对偶空间.

Banach 空间的几何性质如 p 一致光滑性和 q 一致凸性的定义参见文献[6].

2 主要结果和证明

引理 1(Fefferman 不等式)^[7] 设 B 为 Banach 空间, $1 < p < \infty, 1 \leq \alpha \leq p$, 则存在常数 $C = C_{p,\alpha} > 0$,使得对任一两指标 B 值鞅

$$\begin{aligned} f &= (f_n, n \in N^2) \in {}_p H_\alpha^S(B), \\ \varphi &= (\varphi_n, n \in N^2) \in {}_q K_{\alpha'}^S(B^*), \end{aligned}$$

有

$$|Ef_n \varphi_n| \leq C \|f\|_{{}_p H_\alpha^S(B)} \|\varphi\|_{{}_q K_{\alpha'}^S(B^*)}, \quad n \geq 1.$$

引理 2^[7] 设 B 为 Banach 空间, $1 < p \leq 2, p \leq \alpha \leq \infty$, 则以下条件相互等价:

- (i) B 同构于 p 一致光滑空间;
- (ii) ${}_p K_\alpha^S(B) \subset {}_p K_\alpha(B)$, 且存在常数 $C = C_{p,\alpha} > 0$,使得对任一两指标 B 值鞅

$$f = (f_n, n \in N^2) \in {}_p K_\alpha^S(B),$$

有

$$\|f\|_{{}_p K_\alpha(B)} \leq C \|f\|_{{}_p K_\alpha^S(B)}.$$

引理 3^[7] 设 B 为 Banach 空间, $2 \leq q < \infty, q \leq \alpha \leq \infty$, 则以下条件相互等价:

- (i) B 同构于 q 一致凸空间;
- (ii) ${}_q K_\alpha(B) \subset {}_q K_\alpha^S(B)$, 且存在常数 $C = C_{q,\alpha} > 0$,使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in N^2) \in {}_q K_\alpha(B)$ 有

$$\|f\|_{{}_q K_\alpha^S(B)} \leq C \|f\|_{{}_q K_\alpha(B)}.$$

从引理 1 可知,对每个 $\varphi \in {}_q K_{\alpha'}^S(B^*)$ 可在 ${}_p H_\alpha^S(B)$ 上生成一个有界线性泛函 l_φ :

$$l_\varphi(f) = \langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} E(f_n \varphi_n), \quad \forall f \in {}_p H_\alpha^S(B),$$

$$1 \leq \alpha \leq p,$$

$$|l_\varphi(f)| \leq C \|f\|_{{}_p H_\alpha^S(B)} \|\varphi\|_{{}_q K_{\alpha'}^S(B^*)},$$

这里,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f_n \varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n E(d_i f d_i \varphi),$$

因 $\sum_{i=0}^\infty E(d_i f d_i \varphi)$ 绝对收敛而极限存在.

为刻画 ${}_p H_\alpha^S(B)$ 的对偶空间,我们将 ${}_p H_\alpha^S(B)$ 嵌入一个更大的空间,而这个更大空间的对偶空间容易刻画.对 ${}_p H_\alpha^S(B)$ 的对偶空间 $({}_p H_\alpha^S(B))^*$ 中每个 $l, \varphi \in {}_q K_{\alpha'}^S(B^*)$ 可定义如上线性泛函 l_φ .

设 $L_\alpha(l_p(B))$ 表示序列 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ 的空间,其中 $\theta_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ 是两指标 B 值随机变量,使得对每个 $\theta \in L_\alpha(l_p(B))$, 满足:

$$\|\theta\|_{L_\alpha(l_p(B))} = \left\| \left(\sum_{i=1}^\infty \|\theta_i\|^p \right)^{1/p} \right\|_\alpha < \infty.$$

引理 4 设 B 为自反 Banach 空间, $1 < p < \infty, 1 \leq \alpha \leq p, q$ 和 α' 分别是 p 和 α 的对偶数,则对 $L_\alpha(l_p(B))$ 上的任一有界泛函 $l(\theta)$, 存在 $\xi \in L_{\alpha'}(l_q(B^*))$, 使得

$$\begin{aligned} l(\theta) &= \sum_{i=1}^\infty E \xi_i \theta_i, \quad \forall \theta \in L_\alpha(l_p(B)), \\ \|\xi\|_{L_{\alpha'}(l_q(B^*))} &\leq \|l\|. \end{aligned}$$

证明 首先考虑 $\alpha > 1$ 情形,对任意 $\theta_i \in L_\alpha(B)$, 当 $\theta = (0, \dots, 0, \theta_i, 0, \dots)$ 时, 令 $l_i(\theta_i) = l(\theta)$, 则

$$|l_i(\theta_i)| \leq \|l\| \|\theta\|_{L_\alpha(l_p(B))} = \|l\| \|\theta_i\|_\alpha.$$

注意 B^* 具有 Radon-Nikodym 性质,从而存在 $\xi_i \in L_{\alpha'}(B^*)$, 使得 $l_i(\theta_i) = E \xi_i \theta_i, \forall \theta_i \in L_\alpha(B)$.

当 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n, 0, \dots)$ 时, 由 l 的线性有

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n E \xi_i \theta_i,$$

记 $\xi^{(n)} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, \dots)$, 需注意

$$\varpi_i = \xi_i \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^q \right)^{1/q(\alpha'/q-1)} \in L_q(B^*),$$

并且空间 B 的自反性意味着 $L_p(B)$ 是一个自反空间,故存在 $\bar{\theta}_i \in L_p(B), \|\bar{\theta}_i\|_p = 1$, 使得 $E \varpi_i \bar{\theta}_i = \|\varpi_i\|_q$.

设 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n, 0, \dots)$, 其中,

$$\theta_i = \bar{\theta}_i \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^q \right)^{1/q(\alpha'/q-1)} \|\varpi_i\|_q^{q-1},$$

则

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n E \xi_i \theta_i = \sum_{i=1}^n E \xi_i \bar{\theta}_i \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^q \right)^{1/q(\alpha'/q-1)}.$$

$$\|\varpi_i\|_q^{q-1} = \sum_{i=1}^n E \varpi_i \bar{\theta}_i \|\varpi_i\|_q^{q-1} = \sum_{i=1}^n \|\varpi_i\|_q^q =$$

$$\sum_{i=1}^n E \|\xi_i\|^q \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^q \right)^{\alpha'/q-1} = E \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^q \right)^{\alpha'/q}.$$

应用 Hölder 不等式及 $E \|\bar{\theta}_i\|^p = 1$, $1 \leq \alpha \leq p$, 可以得到:

$$\|\theta\|_{L_\alpha(l_p(B))}^\alpha = E \left(\sum_{i=1}^n \|\bar{\theta}_i\|^p \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^q \right)^{p/q(\alpha'/q-1)} \right).$$

$$\|\varpi_i\|_q^{p(q-1)\alpha'/p} = E \left(\sum_{i=1}^n \|\bar{\theta}_i\|^p \|\varpi_i\|_q^q \right)^{\alpha'/p}.$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^q \right)^{\alpha'/q(1-\alpha/q)} \leq [E \left(\sum_{i=1}^n \|\bar{\theta}_i\|^p \|\varpi_i\|_q^q \right)^{\alpha'/p}].$$

$$[E \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^q \right)^{\alpha'/q(1-\alpha/q)}] \leq [E \left(\sum_{i=1}^n \|\varpi_i\|_q^q \right)^{\alpha'/p}].$$

$$[E \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^q \right)^{\alpha'/q(1-\alpha/q)}] = E \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^q \right)^{\alpha'/q},$$

从而 $\|\theta\|_{L_\alpha(l_p(B))} \leq [E \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^q \right)^{\alpha'/q}]^{1/\alpha'}$.

根据不等式 $|l(\theta)| \leq \|l\| \|\theta\|_{L_\alpha(l_p(B))}$, 容易得到:

$$\|\xi^{(n)}\|_{L_{\alpha'}(l_q(B^*))} \leq [E \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^q \right)^{\alpha'/q}]^{1/\alpha'} \leq \|l\|,$$

因为 n 是任意的, 所以,

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in L_{\alpha'}(l_q(B^*)),$$

且

$$l(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \sum_{i=1}^n \xi_i \theta_i = \sum_{i=1}^\infty E \xi_i \theta_i.$$

现考虑 $\alpha=1$ 情形, 注意到 $\forall b > 1$, $L_b(l_p(B)) \subset L_1(l_p(B))$ 嵌入是连续的, 所以在 $L_1(l_p(B))$ 上每个有界线性泛函 l 可自动生成一个 $L_b(l_p(B))$ 上的有界线性泛函 l , 因此存在 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ 使得对所有 $1 < b < \infty$, $l(\theta) = \sum_{i=1}^\infty E \xi_i \theta_i$, 且 $\|\xi\|_{L_{b'}(l_q(B^*))} \leq \|l\|$, $\theta \in L_b(l_p(B))$, 这里 b' 是 b 的对偶数, 由此可得

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^\infty \|\xi_i\|^q \right)^{1/q} \right\|_\infty = \lim_{b' \rightarrow +\infty} \|\xi\|_{L_{b'}(l_q(B^*))} \leq \|l\|.$$

引理 4 得证.

定理 1 设 B 为 Banach 空间, $1 < p \leq \alpha \leq \infty$, $p \neq \infty$, 则存在常数 $C = C_{p,\alpha} > 0$, 使得对任意 $\xi \in L_\alpha(l_p(B))$, 两指标鞅

$$\varphi = (\varphi_n, n \in N^2),$$

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n [E_i \xi_i - E_{i-1} \xi_i], \quad \varphi_0 = 0,$$

满足

$$\|\varphi\|_{{}_p K_\alpha^S(B)} \leq C \|\xi\|_{L_\alpha(l_p(B))}.$$

证明 记 $g = (\sum_{i=1}^\infty \|\xi_i\|^p)^{1/p}$ 及 $g^* = \sup_n E_n g$.

$\xi \in L_\alpha(l_p(B))$ 意味着 $g \in L_\alpha$. 当 $\alpha > 1$ 时, 由 Doob 不等式可知 $g^* \in L_\alpha$. 当 $i \geq n+1$ 时,

$$E_n(\|d_i \varphi\|^p) = E_n(E_{n-1}(\|d \varphi\|^p)) \leq$$

$$2^{p-1} E_n(\|E_i \xi_i\|^p + \|E_{i-1} \xi_i\|^p) \leq$$

$$2^p E_n(\|\xi_i\|^p).$$

当 $i = n$ 时,

$$\|d_i \varphi\|^p \leq 2^{p-1} (\|E_n \xi_n\|^p + \|E_{n-1} \xi_n\|^p) \leq$$

$$2^{p-1} (E_n(\|\xi_i\|^p) + (g^*)^p),$$

因此,

$$\sum_{i=1}^\infty E_n(\|d_i \varphi\|^p) \leq 2^p \sum_{i=1}^\infty E_n(\|\xi_i\|^p) +$$

$$2^{p-1} E_n((g^*)^p) \leq 2^p \sum_{i=1}^\infty E_n(g^p) +$$

$$2^{p-1} E_n((g^*)^p) \leq 2^p E_n(g^p + (g^*)^p),$$

从而,

$$E_n(S^{(p)}(\varphi) - S_{n-1}^{(p)}(\varphi)) \leq 2^p E_n(g^p + (g^*)^p) \leq$$

$$CE_n((g^*)^p),$$

即 $\|\varphi\|_{{}_p K_\alpha^S(B)} \leq C \|g\|_\alpha \leq C \|\xi\|_{L_\alpha(l_p(B))}$.

定理 1 得证.

定理 2 设 B 为自反 Banach 空间, $1 \leq \alpha \leq p < \infty$, 则 $({}_p H_\alpha^S(B))^* \approx {}_q K_\alpha^S(B^*)$, 其中 $1/p + 1/q = 1$, $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$.

证明 首先, 由引理 1 知 ${}_q K_\alpha^S(B^*) \subset ({}_p H_\alpha^S(B))^*$. 将 ${}_p H_\alpha^S(B)$ 看作 $L_\alpha(l_p(B))$ 的子空间, 其中 $\theta = df = (d_1 f, d_2 f, \dots)$, 对所有 $f = (f_n, n \in N^2) \in {}_p H_\alpha^S(B)$. 根据 Hahn-Banach 延拓定理, 当 $l \in ({}_p H_\alpha^S(B))^*$ 时, l 可延拓为 $L_\alpha(l_p(B))$ 上的有界线性泛函并且保持原范数不变. 其次, 由引理 4 存在 $\xi \in L_{\alpha'}(l_q(B^*))$, 使 $\|\xi\|_{L_{\alpha'}(l_q(B^*))} \leq \|l\|$. 注意到 $1 < q \leq \alpha' \leq \infty$, $q \neq \infty$, 由定理 1, 存在两指标鞅 $\varphi = (\varphi_n, n \in N^2) \in {}_q K_\alpha^S(B^*)$ 使得

$$\|\varphi\|_{{}_q K_\alpha^S(B^*)} \leq C \|\xi\|_{L_{\alpha'}(l_q(B^*))} \leq C \|l\|,$$

这说明 $({}_p H_\alpha^S(B))^* \subset {}_q K_\alpha^S(B^*)$, 从而 $({}_p H_\alpha^S(B))^* \approx {}_q K_\alpha^S(B^*)$, 即 ${}_q K_\alpha^S(B^*)$ 是 ${}_p H_\alpha^S(B)$ 的对偶空间.

定理 2 得证.

对照 ${}_p BMO_\alpha^S(B)$ 鞅空间的定义:

$${}_p BMO_\alpha^S(B) = \{f : \|f\|_{{}_p BMO_\alpha^S(B)} =$$

$$\sup_n \|(E_n(S^{(p)}(f)^p - S_{n-1}^{(p)}(f)^p)^{\alpha/p})^{1/\alpha}\|_\infty < \infty\},$$

$$(0 < p < \infty, 0 < \alpha < \infty),$$

定理 2 中, 当 $\alpha=1$ 时即为 H_1 -BMO 对偶定理的推广, 可得以下推论 1.

推论 1 设 B 为自反 Banach 空间, $1 \leq p < \infty$, 则 $({}_p H_1^S(B))^* \approx {}_q BMO_q^S(B^*)$, 其中, $1/p + 1/q = 1$.

由引理 2、引理 3 及定理 2 即可得以下推论 2 和推论 3.

推论 2 设 B 为自反 Banach 空间, $1 < p \leq 2$, $1 \leq \alpha \leq p$, 则以下条件相互等价:

- (i) B 同构于 p -一致光滑空间;
- (ii) ${}_q K_{\alpha'}(B^*) \subset ({}_p H_\alpha^S(B))^*$, 且存在常数 $C = C_{p,\alpha} > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅 $f = (f_n, n \in \mathbb{N}^2) \in {}_q K_{\alpha'}(B^*)$ 有:

$$\|f\|_{({}_p H_\alpha^S(B))^*} \leq C \|f\|_{{}_q K_{\alpha'}(B^*)},$$

其中, $1/p + 1/q = 1$, $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$.

推论 3 设 B 为自反 Banach 空间, $2 \leq q < \infty$, $1 \leq \alpha \leq q$, 则以下条件相互等价:

- (i) B 同构于 q -一致凸空间;
- (ii) $({}_p H_\alpha^S(B))^* \subset {}_q K_{\alpha'}(B^*)$, 且存在常数 $C = C_{q,\alpha} > 0$, 使得对任一两指标 B 值鞅

$$f = (f_n, n \in \mathbb{N}^2) \in {}_q K_{\alpha'}(B^*),$$

有

$$\|f\|_{{}_q K_{\alpha'}(B^*)} \leq C \|f\|_{({}_p H_\alpha^S(B))^*},$$

其中, $1/p + 1/q = 1$, $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$.

进一步, 由 Kwapien 定理^[9]及定理 2 又可得以下推论 4.

推论 4 设 B 为 Banach 空间, $1 \leq \alpha \leq 2$, 则以下条件等价:

- (i) B 同构于 Hilbert 空间;
- (ii) $({}_2 H_\alpha^S(B))^* \approx {}_2 K_{\alpha'}(B^*)$, 其中 $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$.

参考文献:

- [1] Garsia A M. Martingale inequalities[C]//Seminar Notes on Recent Progress Math, Lecture Notes Series, New York: Benjamin Inc, 1973:196-212.
- [2] Herz C S. Bounded mean oscillation and regulated martingales[J]. Trans Amer Math Soci, 1974, 193:199-215.
- [3] Weisz F. Martingale Hardy Space and their Applications in Fourier Analysis(LNM1568)[M]. New York: Springer-Verlag Press, 1994:84-100.
- [4] Liu H F, Zhu Y S. The Fefferman inequality and dual theorem for quasi-martingales[J]. Journal of Math, 2016, 36(4):135-142.
- [5] 刘培德. Fefferman 不等式与 ${}_a \tilde{H}_p(X)$ 的共轭[J]. 数学年刊, 1991, 12(A):356-364.
- [6] Yu L. Duals of Banach-space-valued martingale hardy spaces[J]. Kyungpook Math J, 2001, 41:259-275.
- [7] 叶臣, 舒启昂. 两类新型两指标 B 值鞅空间的相互嵌入关系[J]. 宁波大学学报(理工版), 2015, 28(3):42-47.
- [8] 刘培德. 鞅空间与 Banach 空间的几何性质[J]. 中国科学: A 辑, 1990, 20(7):694-704.
- [9] Kwapien S. Isomorphic characterization of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients[J]. Studia Math, 1972, 44:583-595.

Dual of two-parameter Banach space valued martingale space ${}_p H_\alpha^S(B)$

YE Chen, ZHONG Cai-ming

(College of Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: By introducing two new types of two-parameter Banach space valued martingale spaces and using Fefferman inequalities, it is proved that the dual space of two-parameter Banach space valued martingale space ${}_p H_\alpha^S(B)$ associated with p -variation is ${}_q K_{\alpha'}^S(B^*)$. The relationship between the mutual embedding of dual spaces and the geometrical properties of Banach space is also investigated.

Key words: two-parameter Banach space valued martingale spaces; dual space; p -uniform smoothness; q -uniform convexity

(责任编辑 章践立)