

一种基于关联矩阵判断图的哈密顿性及求解哈密顿回路的算法

王亚丽, 徐晨东*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 基于对图的关联矩阵分析, 刻画了哈密顿回路的关联矩阵的有关性质, 给出了简单无向图和有向图为哈密顿图的充分条件和具体算法, 该算法不仅可以判断简单图的哈密顿性, 而且可以找出该图的所有哈密顿回路. 最后用实例说明该算法的正确性和有效性.

关键词: 哈密顿图; 哈密顿回路; 关联矩阵

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2018) 02-0083-06

本文研究的图 G 均是简单图, $V(G)$, $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集, $n=|V(G)|$ 是图 G 的阶数, $d(x)$ 为顶点 x 的度数, $N(x)$ 表示顶点 x 的邻域, $\Delta(G)$ 为 G 中顶点度数的最大值.

寻找一般图的哈密顿回路是一个 NP 完全问题, 是图论的三大难题之一. 1974 年, Rubin^[1]描述了一个高效的搜索过程, 其用一个大大减少回溯和猜想的推论找到图中的一些或所有哈密顿路径. 而多数学者则是通过研究图的顶点度数和连通性, 判定图的哈密顿性, 给出哈密顿图的充分条件, 即满足下列条件之一的图是哈密顿图.

(1)文献[2]: 对 n 阶图 G 的每个顶点 x , 有 $d(x) \geq n/2$.

(2)文献[3]: 对 n 阶图 G 的不相邻的任意两个顶点 x, y , 均有 $d(x) + d(y) \geq n$.

(3)文献[4]: 对独立数为 α 的 k 连通图 G , 有 $k \geq \alpha$.

(4)文献[5]: 对 2 连通 n 阶图 G 的距离为 2 的任意两点 x, y , 均有 $\max\{d(x), d(y)\} \geq n/2$.

(5)文献[6]: 对 2 连通 n 阶图 G 的距离为 2 的任意两点 x, y , 均有 $|N(x) \cup N(y)| \geq (2n-1)/3$.

(6)文献[7]: G 是独立数为 α 的 k 连通 n 阶图, 对满足 $\Delta(S) \geq n/2$ 的 k 阶独立集 S , 有任意的 $x, y \in S$, 使得 $1 \leq |N(x) \cap N(y)| \leq \alpha - 1$.

(7)文献[8]: 对 2 连通 n 阶图 G 的距离为 2 的任意两点 x, y , 均有 $d(x) + d(y) \geq n - 1$.

(8)文献[9]: G 是独立数为 α 的 k 连通 n 阶图, 对图中任意含距离为 2 的两个恰有 $(k+1)$ 个点的独立点集 S , 需要满足下列条件之一: (i)存在 $u, v \in S$, 使 $d(u) + d(v) \geq n$ 或 $|N(u) \cap N(v)| \geq \alpha$; (ii)对任意的 $u, v \in S$, 均有 $|N(u) \cup N(v)| \geq n - \Delta(S)$.

文献[2-9]主要从图的连通性和顶点度数分析哈密顿图的性质, 而文献[10-12]则是通过其他一些方法来研究图的哈密顿性. 1997 年, 姜新文^[10]引入了路径集合的新的表示方法, 给出了哈密顿图判定的一个新算法. 2011 年, 陈德钦等^[11]总结了近年来哈密顿图的发展. 同年侯爱民等^[12]根据基本圈的分解、合并和单条公共边连通性, 给出了哈密顿图的充分必要条件及计算公式. 众所周知, 图的邻接矩阵、关联矩阵和可达矩阵在分析图的某些性质时通常非常有用. 图的矩阵表示架起了图论与矩阵之间的桥梁. 本文通过分析图的关联矩阵, 给出哈密顿回路的关联矩阵的性质, 从而得到简单无向图和有向图是哈密顿图的充分条件和相应的求解哈密顿回路的算法.

1 准备工作

定义 1 设 $G = \langle V, E \rangle$ 是一个图, V 称为顶点

收稿日期: 2017-05-31.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金 (11101230, 11371209).

第一作者: 王亚丽 (1990-), 女, 河南洛阳人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 计算几何. E-mail: 18892614929@163.com

*通信作者: 徐晨东 (1977-), 男, 浙江慈溪人, 副教授, 主要研究方向: 计算机辅助几何设计与计算几何. E-mail: xuchendong@nbu.edu.cn

集, E 称为边集. 若图 G 中存在经过所有顶点一次且仅一次的回路, 则称图 G 为哈密顿图. 相应的回路称为哈密顿回路.

定义 2 设图 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 m_{ij} 为顶点 v_i 与边 e_j 的关联次数, 则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 G 的关联矩阵, 记作 $M(G)$.

对于一个简单回路 C , 其关联矩阵为 $M(C)$. 因为 C 中每个顶点与两条边相邻, 每条边与两个顶点相邻, 所以关联矩阵 $M(C)$ 每行和为 2, 每列和也为 2.

如果一个简单无向图是哈密顿图, 则删去若干条边后, 剩下的 n 条边与顶点组成的一个回路 C 是哈密顿回路, 其关联矩阵为 $M(C)$. 如果把哈密顿回路的边重新命名, 则得到另一个哈密顿回路 C' , 对应的关联矩阵为 $M(C')$. $M(C')$ 可以通过行列变换得到 $M(C)$, 并且

$$\begin{aligned} |\det(M(C'))| &= |\det(M(C))|, \\ \text{rank}(M(C')) &= \text{rank}(M(C)). \end{aligned}$$

定理 1 对于任意阶为 $n \geq 3$ 的无向回路 C_n , 有 $\det(M(C_n)) = \begin{cases} 2, n = 2k + 1, \\ 0, n = 2k. \end{cases}$

证明 任给一个无向回路 C_n , 对 C_n 的顶点和边按顺时针方向依次标定, 则其关联矩阵 $M(C_n)$ 可以表示为以下形式(其中 0 表示顶点与边不关联, 1 表示顶点与边关联).

$$M(C_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

因为矩阵经过初等变换后其行列式的值不变, 若 $n = 2k + 1$, 让最后一行依次减去 $1, 3, \dots, 2k - 1$ 行, 再依次加上 $2, 4, \dots, 2k$ 行, 则

$$M(C_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{bmatrix}_{(2k+1) \times (2k+1)}.$$

若 $n = 2k$, 让最后一行依次减去 $1, 3, \dots, 2k - 1$ 行, 再依次加上 $2, 4, \dots, 2k - 2$ 行, 则

$$M(C_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2k \times 2k}.$$

$$\text{综上有 } \det(M(C_n)) = \begin{cases} 2, n = 2k + 1, \\ 0, n = 2k. \end{cases}$$

2 无向图的哈密顿性判定

任给一个 n 个顶点 m 条边的无向连通图 G ($m \geq n$), 其关联矩阵为 $M(G)$, 其中矩阵 $M(G)$ 的列表示与这条边相连的相应顶点, 和为 2; 行表示与每个顶点相连的边数, 和大于等于 2. 若图 G 为哈密顿图, 则删去若干条边后剩下的 n 条边 n 个顶点组成一个回路, 即删去 $M(G)$ 的若干列, 使得剩下的矩阵每行和为 2.

不妨取 0-1 列矩阵 $X_{m \times 1}$ 和常数行矩阵 $B = (2, 2, \dots, 2)_{1 \times n}$, 求解方程

$$M(G) \times X = B^T. \quad (1)$$

若方程(1)有解 X , 则此图可能为哈密顿图. 其中 X 表示 G 中相应的边集, 0 表示舍弃该边, 1 表示保留该边. 在关联矩阵 $M(G)$ 中保留与 X 中 1 所对应的列, 得到矩阵 $M'(G)$.

如果此解表示唯一的一个圈, 且相对应的关联矩阵可以转化为矩阵 $M(C)$ 的形式, 则此解对应的图为哈密顿图; 如果此解表示多个圈, 则此解对应的图不一定为哈密顿图.

在多个圈的情况下, 矩阵 $M'(G)$ 经过初等变换可以得到如下矩阵:

$$M'(G) = \begin{bmatrix} M(G_{i_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M(G_{i_2}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M(G_{i_l}) \end{bmatrix}_{\left(\sum_{k=1}^l i_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^l i_k\right)}.$$

其中: $i_1 + i_2 + \dots + i_l = n$, 这里 $M(G_{i_k})$ 表示一个小回路. 所以判定解 X 对应的图是否为哈密顿图, 只需判定解 X 对应的关联矩阵所表示的图中是否有

多个圈存在.

2.1 图 G 的顶点数为奇数

定理 2 若 $|\det(M'(G))| = 2$, 则图 G 为哈密顿图 ($M'(G)$ 为解 X 所对应的关联矩阵).

证明 (1)不可能有偶圈, 因为

$$|\det(M'(G))| = \prod_{k=1}^l |\det(M(G_k))|,$$

若有偶圈, 则有:

$$|\det(M(G_k))| = 0,$$

所以

$$|\det(M'(G))| = \prod_{k=1}^l |\det(M(G_k))| = 0,$$

与

$$|\det(M'(G))| = 2 \text{ 相矛盾.}$$

(2)当有奇圈时,

$$|\det(M'(G))| = \prod_{k=1}^l |\det(M(G_k))| = 2^l,$$

只有当 $l=1$ 时才能成立, 故只能有 1 个奇圈.

综上得证.

2.2 图 G 的顶点数为偶数

当图 G 的顶点数为偶数时, 删去解 X 对应的子图上的任意一个点, 再连接断点. 若得到的图满足上述奇数个顶点的图的哈密顿性判断条件, 则图 G 为哈密顿图.

图 1 是偶数个顶点的图 G_1 , 其对应的关联矩阵为 $M(G_1)$.

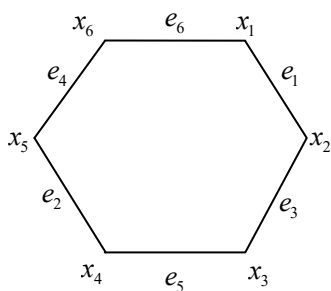


图 1 偶数个顶点的图 G_1

$$M(G_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

图 2 为删去顶点 x_6 , 然后连接顶点 x_1, x_5 , 则在矩阵 $M(G_1)$ 中删去与顶点 x_6 对应的行和该行中值为 1 所对应的列, 再在后面加一个与新连的边所对应的列, 使得在前面删去列中另一个 1 对应的行在新加一列中为 1, 其余位置为 0, 记得到的矩阵为 $M^*(G_1)$.

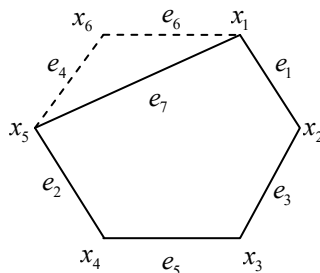


图 2 删去顶点后的图

$$M^*(G_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

删点前图 G 可能有下列几种可能: (1)有 1 个偶圈; (2)有 1 个偶圈, j 个奇圈; (3)有 i 个偶圈; (4)有 i 个偶圈, j 个奇圈; (5)有 j 个奇圈. 其中 $i, j \geq 2$, 且 j 为偶数.

假设(1)成立, 删点后 $M^*(G)$ 有一个奇圈, 则 $|\det(M^*(G))| = 2$, 图 G 为哈密顿图.

假设(2)成立, 若删去的点属于偶圈, 则 $|\det(M^*(G))| = 2^{j+1} > 2$; 若删去的点属于奇圈, 则 $|\det(M^*(G))| = 0$. 则图 G 不是哈密顿图.

假设(3)成立, 无论删去的点属于偶圈还是奇圈, 都有 $|\det(M^*(G))| = 0$, 则图 G 不是哈密顿图.

假设(4)成立, 因为有多于一个偶圈, 所以删去点后, 至少有 $i-1 \geq 1$ 个偶圈, 故有 $|\det(M^*(G))| = 0$, 则图 G 不是哈密顿图.

假设(5)成立, 不管删去任何圈都为奇圈, 所以有 $|\det(M^*(G))| = 0$, 则图 G 不是哈密顿图.

2.3 算法

Step 1 先写出图 G 的关联矩阵 $M(G)$;

Step 2 求 $M(G) \times X = B$ 的 0-1 解矩阵 X ;

Step 3 若无解, 则图 G 不是哈密顿图; 若有 1 个或多个解, 继续下一步;

Step 4 对每一个解 X , 求出其对应的矩阵

$M(G')$, 若 $|\det M(G')| = 2$, 则图 G 是哈密顿图, 否则图 G 不是哈密顿图.

3 有向图的哈密顿性判定

设图 $D = \langle V, E \rangle$ 是有向图, 且 $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 称矩阵 $M(D) = (m_{ij})_{n \times m}$ 为有向图 D 的关联矩阵, 其中:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j \text{ 以 } x_i \text{ 为起点,} \\ 0, & e_j \text{ 与 } x_i \text{ 不关联,} \\ -1, & e_j \text{ 以 } x_i \text{ 为终点.} \end{cases}$$

对任意阶连通有向图 D , 其关联矩阵 $M(D)$, 其中每列有且只有一个 1 和一个 -1, 即一条边只对应一个起点和终点; 每行至少有一个 1 和一个 -1, 即一个点至少为一条边的起点和另一条边的终点, 否则不能构成回路.

运用前面的思路, 计算出有向图对应方程的所有解. 首先对 $M(D)$ 进行改造, 使得每条边的起点和终点数值有明显的差异.

不访设 $M(D)$ 的顶点数为 n , 把 $M(D)$ 中值为 1 的全部值重新赋值为 n , 得到新的矩阵 $M'(D)$, 取 0-1 列矩阵 $X_{m \times 1}$, 即求解方程:

$$M'(D) \times X = (n-1, n-1, \dots, n-1)_{1 \times n}^T. \quad (2)$$

如果方程(2)有解, 则此图可能为哈密顿图. 与无向图一样, 此解可能有多个圈的情形. 在 $M(D)$ 中取与 X 相对应的 $n \times n$ 矩阵 $M^*(D)$, 如果 $\text{rank}(M^*(D)) = n-1$, 则此图为哈密顿图.

4 实例

下面的实例给出了上述算法的应用.

例 1 给出平面图 G_2 , 如图 3 所示.

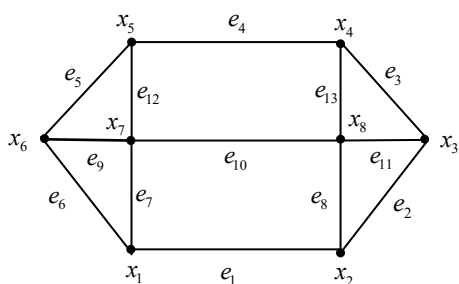


图 3 平面图 G_2

先写出平面图 G_2 的关联矩阵 $M(G_2)$:

$$M(G_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{8 \times 13},$$

则方程 $M(G_2) \times X_1 = B$ 的解为:

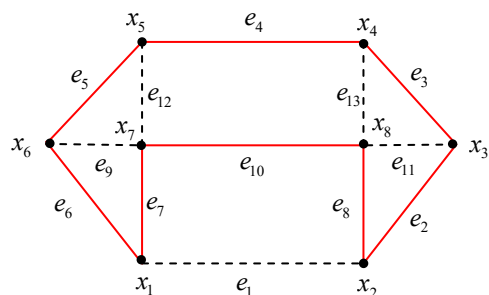
$$X_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T,$$

其中:

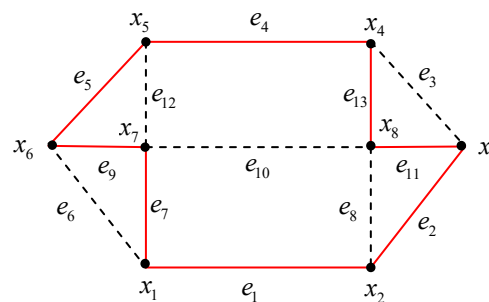
$$\begin{aligned} x_1 &= (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0), \\ x_2 &= (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1), \\ x_3 &= (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0), \\ x_4 &= (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1), \\ x_5 &= (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0), \\ x_6 &= (0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1), \\ x_7 &= (1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

利用上述方法判定各个解是否对应哈密顿回路, 并给出了每个解所对应的图形(图 4).

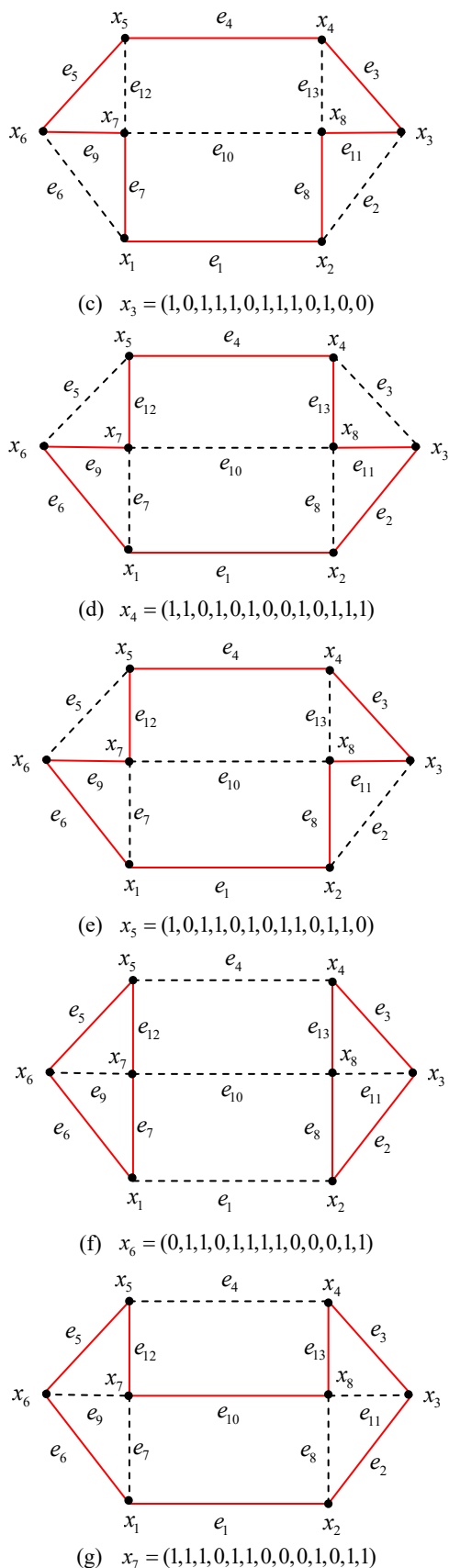
由每个解对应的图形知, 解 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_7$



(a) $x_1 = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$



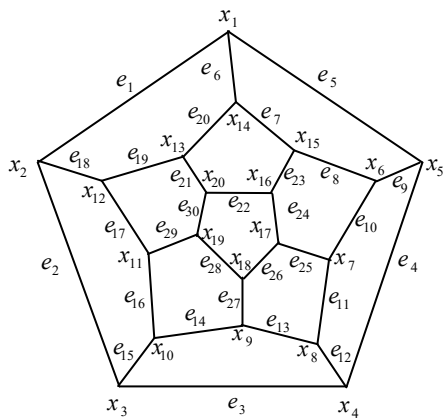
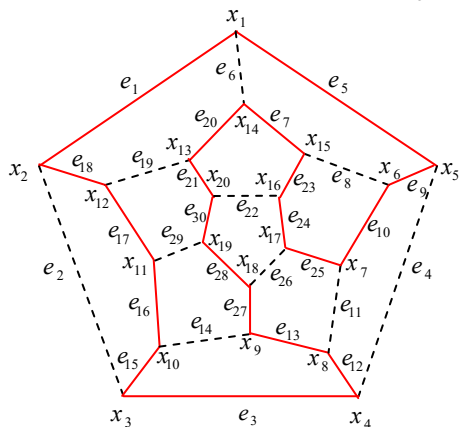
(b) $x_2 = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$

图 4 G_2 对应方程的解的所有情况

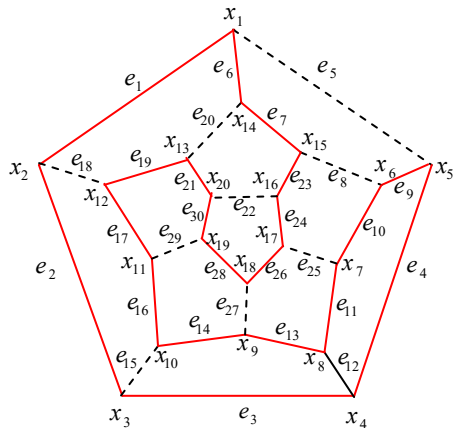
均有哈密顿回路, 而解 x_6 中包含 2 个偶圈, 故不能生成哈密顿回路。

例 2 验证正十二面体的平面投影图 G_3 (图 5) 是哈密顿图, 并给出哈密顿回路。

由于正十二面体的顶点数和边数比较多, 其关联矩阵此处略去, 计算过程和例 1 类似, 可以得到 2 种哈密顿回路图, 如图 6 所示。

图 5 正十二面体在平面上的投影 G_3 

(a) 哈密顿回路 1



(b) 哈密顿回路 2

图 6 图 G_3 的 2 种哈密顿回路

5 结语

本文从简单图的关联矩阵的角度,研究了哈密顿回路对应的关联矩阵的性质,进而给出了判断简单图是否为哈密顿图的算法,该算法可以找出所有的哈密顿回路。但是本文算法对于判断非简单图的哈密顿性并不适用。

参考文献:

- [1] Rubin F. A search procedure for Hamilton paths and circuits[J]. Journal of the Association for Computing Machinery, 1974, 21(4):576-580.
- [2] Dirac G A. Some theorems on abstract graphs[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1952, 2(1):69-81.
- [3] Ore O. Hamilton connected graphs[J]. Journal De Mathématiques Pures Et Appliqués, 1963, 42:21-27.
- [4] Chvátal V, Erdős P. A note on Hamilton circuits[J]. Discrete Mathematics, 1972, 2:111-113.
- [5] Fan G H. New sufficient conditions for cycles in graphs [J]. Journal of Combinatorial Theory (Series B), 1984, 37:221-227.
- [6] Faudree R J. Neighborhood unions and Hamiltonian properties in graphs[J]. Journal of Combinatorial Theory (Series B), 1989, 47:1-9.
- [7] Li J S, Li J R, Feng J F. An efficient condition for a graph to be Hamiltonian[J]. Discrete Applied Mathematics, 2007, 155:1842-1845.
- [8] Zhao K W, Lai H J, Shao Y H. New sufficient condition for Hamiltonian graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2007, 20:116-122.
- [9] Zhao K W, Gould R J. A note on the Song-Zhang theorem for Hamiltonian graphs[J]. Colloquium Mathematicum, 2010, 120(1):63-75.
- [10] 姜新文. 求解哈密顿图判定问题的一个新算法[J]. 计算技术与自动化, 1997, 16(1):1-3.
- [11] 陈德钦, 赵克文. 一般图的哈密顿图的研究进展[J]. 数学理论与应用, 2011, 31(2):92-99.
- [12] 侯爱民, 郝志峰. 无向哈密顿图的一个充分必要条件及计算公式[J]. 计算机工程及应用, 2011, 47(14):7-9.

An incidence-matrix-based algorithm for determining the Hamiltonian of a graph and identifying the Hamiltonian circuit

WANG Ya-li, XU Chen-dong*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Based on the incidence matrix of given graph, this paper describes the properties of the incidence matrix of the Hamiltonian circuit, and presents the sufficient condition and the specific algorithm for both simple undirected graph and directed graph. The algorithm not only judges whether or not a given graph is a Hamiltonian graph, but also finds all the Hamiltonian circuits of the graph. In the end, some examples are given to validate of the presented algorithm.

Key words: Hamiltonian graph; Hamiltonian circuit; incidence matrix

(责任编辑 史小丽)