

基于移动坐标系法圆柱瞬时启动与瞬时停止的数值模拟

孙新蕾¹, 杨路春^{2*}, 王长杰², 徐 锋²

(1. 武汉学院 信息及传播学院, 湖北 武汉 430212; 2. 武汉第二船舶设计研究所, 湖北 武汉 430205)

摘要: 采用移动坐标系法结合有限体积数值计算方法, 对圆柱瞬时启动和瞬时停止问题进行数值模拟, 计算了 Re 为 40 和 550, 停止时间分别为 102 和 550 的圆柱启动停止, 分析了圆柱表面涡量的演变, 流场中流线的演化等, 部分结果与试验结果、已有文献结果进行了比对, 吻合很好。该方法可以推广应用于单物体无界流域的运动计算。

关键词: 移动坐标系法; 有限体积法; 圆柱瞬时启动; 圆柱瞬时停止

中图分类号: U661.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2018) 03-0104-08

圆柱启动引起的流动发展问题是流体力学中的经典问题之一, 该问题也是一个非定常分离流动的原型, 与很多实际应用都有关联, 如潜器、海洋平台、输油管线等。很多学者^[1-19]对该问题开展了研究, 其研究方法大致可分为 3 类: 理论求解、试验研究和数值计算。

理论计算方面, Collins 等^[1]、Bar-Lev 等^[2]对该问题的解析解进行了深入研究, 但是解析解只在很小的时间段内有效。试验研究方面, 最早可追溯到 Prandtl 年代(20 世纪初), 但最全面试验是在 70 年代由 Coutanceau 等^[3-4]、Bouard 等^[5]开展, 他们详细分析了封闭尾涡随时间和 Re 数的演变; 此外, Sumner 等^[6-8]应用粒子图像测速仪(Particle Image Velocimetry, PIV)对双圆柱(并列、串列)的瞬间启动进行了试验研究; Lin 等^[9]应用 PIV 对 $Re=500\sim 2\,000$, 无量纲时间从 0.5~5 圆柱启动后尾部回流区结构进行了试验研究。数值计算方面, 许多学者采用了不同的方法对其进行数值求解, 大体分为 3 类: (1) 涡方法, 即涡量-流函数方法, 如文献[1,10-15]分别应用不同离散方法、差分格式求解了涡量、流函数方程, 该方法的优点是对高 Re 问题, 不需要特别考虑湍流模型, 但是边界条件处理不直观, 也很难推广至三维任意物体的计算。(2) 求解 NS 方程方法, 如 Rahman 等^[16]应用有限体积法分析了启动后涡

的脱落等过程; 李志峰等^[17]应用动网格方法结合有限体积法分析了圆柱启动后的非定常流动演化过程; Xu 等^[18]应用最小二乘等几何算法数值求解不可压缩流体方程分析圆柱启动后流场, 其中动网格方法很容易推广至任意物体启停运动模拟^[17], 但每一步计算都需要处理网格变形, 计算量增大, 若物体形状复杂, 网格变形后质量很难保证, 容易增大计算误差, 若运动时间较长, 流场域需要很大, 计算时间会增加。(3) 求解格子 Boltzmann 方程, Niu 等^[19]应用泰勒级数展开法和基于最小二乘的格子玻尔兹曼方法计算了圆柱启动过程, 这是一种介于宏观和微观之间的计算模型, 模拟粒子的传播与碰撞, 其基本方程经变换可以导出 NS 方程, 不用求解线性方程组, 对于并行计算而言, 具有算法简单、易于编程实现等优点, 但对于复杂边界, 湍流模拟处理难度大大增加。对于圆柱停止运动的计算, Wang 等^[20]对涡量输运方程应用预报修正的有限差分方法计算了 Re 为 102 和 550 的圆柱启动和停止流动, Koumoutsakos 等^[11]应用自适用格式求解涡量输运方程, 计算了 Re 为 40 和 550 的圆柱启动和停止流动, 分析了圆柱的受力和流场中涡量的演变。

本文采用移动坐标系法模拟圆柱的瞬间启动和瞬间停止, 将坐标系建立在圆柱中心, 并随圆柱一起运动, 网格不发生变形, 物体运动对流场的影

收稿日期: 2017-11-02.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journal.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(51509193)。

第一作者: 孙新蕾(1985-), 女, 黑龙江望奎人, 讲师, 主要研究方向: 偏微分方程数值计算、随机过程分析。E-mail: sun-xinlei@live.cn

*通信作者: 杨路春(1986-), 男, 江苏宿迁人, 高级工程师, 主要研究方向: 水下航行体水动力计算分析。E-mail: yangluchun@hotmail.com

响通过源项引入, 这种处理方式适用单个任意形状物体的运动; 流体控制方程为不可压缩 NS 方程, 数值离散方法采用有限体积方法, 在开源计算软件 OpenFOAM 的基础上编制计算程序. 为验证上述方法和程序的正确性, 计算了 Re 为 40 和 550, 停止时间分别为 10 和 5 的圆柱启动停止流动, 停止参数参照试验结果进行选取, 并将部分计算结果和文献[5,11,15]结果进行对比, 同时对停止后的流场演变进行了详细分析.

1 移动坐标系下控制方程及离散方法

1.1 移动坐标系下控制方程

假定移动坐标系的原点在大地坐标系中的位置为 d_a , 坐标系的平动速度为 dd_a/dt , 取旋转速度为 Ω (旋转角度采用 Euler 角 ϕ, θ, ψ 表示), 用 x_a 和 x_r 表示大地坐标系和移动坐标系中的坐标, 两者之间的变换关系为:

$$x_a = Q \cdot x_r + d_a,$$

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi + \sin \phi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \sin \theta \cos \psi \\ \leftarrow -\sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}.$$

移动坐标系下的绝对速度应为牵连速度与相对速度之和

$$u_a = \underbrace{\frac{dd_a}{dt}}_1 + Q(\Omega \times x_r) + \underbrace{Qu_r}_2,$$

式中: 1 表示牵连速度; 2 表示相对速度.

移动坐标系下 NS 方程为:

$$\nabla \cdot u_r = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial t} \right)_r + \nabla \cdot (u_r u_r) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 u_r - \Omega \cdot$$

$$(\Omega \times x_r) - 2\Omega \times u_r - \frac{d\Omega}{dt} \times x_r -$$

$$Q^T \frac{d^2 d_a}{dt^2} + f.$$

1.2 离散方法

采用有限体积法求解移动坐标系下 NS 方程,

为方便推导, 用 U 表示 u_r . 与一般 NS 方程的离散过程一致, NS 方程可用通用方程表示:

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial t}}_1 + \underbrace{\nabla \cdot (U \phi)}_2 - \underbrace{\nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi)}_3 = \underbrace{S_\phi(\phi)}_4,$$

$\phi = 1, S_\phi = 0$, 对应连续性方程,

$\phi = U$,

$$S_\phi = -\Omega \times (\Omega \times x) - 2\Omega \times U - \frac{d\Omega}{dt} \times$$

$$x - Q^T \frac{d^2 d_a}{dt^2} + f, \text{ 对应动量方程.}$$

对控制体 V_p , 关于时间和空间的积分形式为:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_p} \phi dV + \int_{\partial V_p} U \phi \cdot dS - \int_{V_p} \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) dV \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_{V_p} S_\phi(\phi) dV \right) dt.$$

(1) 对流项:

$$\int_{\partial V_p} U \phi \cdot dS = \sum_f S \cdot (U \phi)_f = \sum_f S \cdot U_f \phi_f = \sum_f F \phi_f,$$

其中:

$$F = S \cdot U_f,$$

$$U_f = f_x U_p + (1 - f_x) U_N +$$

$$(a_p^n)^{-1} n \left[n \cdot (\nabla p)_f - \frac{p_N - p_p}{|d|} \right],$$

ϕ_f 采用线性差分格式.

(2) 扩散项

$$\int_{V_p} \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) dV = \sum_f S \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi)_f =$$

$$\sum_f (\Gamma_\phi)_f S \cdot (\nabla \phi)_f,$$

$(\Delta \phi)_f$ 采用最小二乘差分格式.

(3) 源项

通常源项作线性化处理: $S_\phi(\phi) = S_u + S_p \phi$, 从

$$\text{而 } \int_{V_p} S_\phi(\phi) dV = S_u V_p + S_p V_p \phi_p.$$

将空间项的离散表达式代入积分表达式可得:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_p V_p + \sum_f F \phi_f - \sum_f (\Gamma_\phi)_f S \cdot (\nabla \phi)_f \right] dt =$$

$$\int_t^{t+\Delta t} (S_u V_p + S_p V_p \phi_p) dt.$$

(4) 瞬态项

时间积分采用 Crank-Nicholson 格式:

$$\begin{aligned} & \frac{(\phi_p V_p)^n - (\phi_p V_p)^0}{\Delta t} + \frac{1}{2} \sum_f F \phi_f^n - \\ & \frac{1}{2} \sum_f (\Gamma_\phi)_f \mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f^n + \frac{1}{2} S_p (V_p \phi_p)^n = \\ & S_u V_p + \frac{1}{2} S_p (V_p \phi_p)^0 + \frac{1}{2} \sum_f F \phi_f^0 - \\ & \frac{1}{2} \sum_f (\Gamma_\phi)_f \mathbf{S} \cdot (\nabla \phi)_f^0. \end{aligned}$$

2 圆柱启动与停止的数值模拟

根据 Lin 等^[9]描述, 当启动参数 $A_p > 0.67$ 后, 启动过程对流场的演变几乎没有影响, 本文启动与停止参数 $A_p = \frac{D}{U_\infty^2} \frac{dU_\infty}{dt} = \frac{1}{0.2^2} \times 2 = 50$. 此外, 用到的几个无量纲参数定义为:

无量纲时间: $T = tD / (2U_\infty)$.

无量纲涡量: $\omega = \bar{\omega}D / U_\infty$, $\bar{\omega} = \partial u / \partial y - \partial v / \partial x$.

阻力系数: $C_d = 2F_x / (U_\infty^2 D)$.

2.1 $Re=40$ 圆柱瞬时启动与停止的数值模拟

2.1.1 阻力计算与验证

在开源流体力学软件包 OpenFOAM 基础上实现以上计算过程. 首先对阻力进行计算和验证, 图 1 给出了 $Re=40$ 时的计算结果及文献[11]的计算结果.

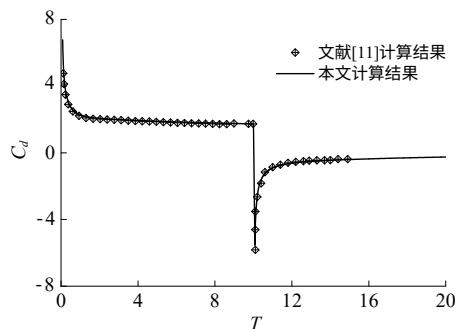


图1 $Re=40$ 圆柱瞬时启动与停止($T=10$)的阻力系数曲线

从图 1 可见, 本文的计算结果和文献[11]的计算结果十分吻合, 在启动时刻阻力值最大, 然后迅速减小至 2, 之后缓慢减小直至瞬间停止时刻, 在瞬时停止时刻阻力值发生阶跃变化, 变为反向最大, 随后逐渐增大至 0 附近. 在瞬时停止时刻前圆柱带着周围一部分流体运动, 瞬停后, 这部分流体因为惯性继续沿原方向运动, 从而圆柱遭遇反方

向拍击力.

2.1.2 流场随时间的演变

图 2 给出了圆柱启动初期($T=0.4, 0.8, 1.0, 2.0$)的表面涡量分布曲线, 横轴为圆周角度. 由图 2 可以看出, 涡量分布相对于 180° 位置呈现反对称, 在 $T \leq 0.8$ 附近, 圆柱尾部($90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$)范围内涡量开始出现负值, 说明在圆柱尾部开始出现流动分离, 开始形成尾部的主涡, 这与 Bouard 等^[5]试验值一致. 此时圆柱周围的流线如图 3 所示, 尾部出现尺度很小的回流区.

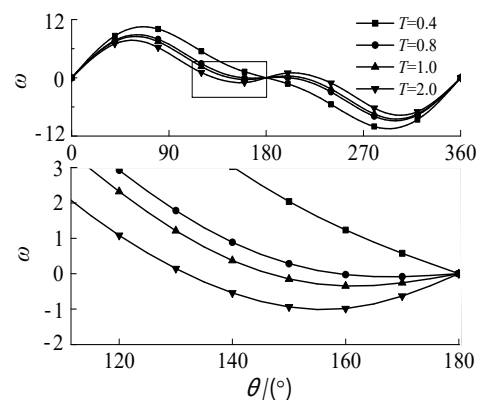


图2 $Re=40$ 圆柱瞬时启动后初期圆柱表面涡量分布曲线及局部放大

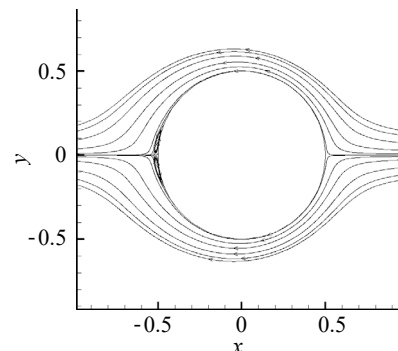


图3 $Re=40, T=0.8$ 时刻流线分布

图 4 给出了圆柱启动后上半表面的涡量演变($T < 10$). 从图 4 可看出: 涡量最大值出现在 $45^\circ \sim 60^\circ$ 之间, 涡量的最大幅值随时间减小, 幅值减小速度随时间变慢, 最大值对应的角度随时间减小; 涡量跨零点对应的角度随时间减小, 减小速度迅速变慢, T 在 3~9 之间时分离角约为 128° , 说明分离点向前移动, 分离区域增大, 最后分离点基本稳定在 120° 位置. 尾流区内圆柱表面涡量随时间先迅速减小, 然后增大, T 在 3~4 之间出现涡量最小值. 图 5

给出了圆柱启动后 $T=1, 4, 9$ 时刻的流线分布, 可见尾流区随时间变化逐渐增大.

圆柱在 $T=10.00$ 开始停止, $T=10.04$ 完全停止.

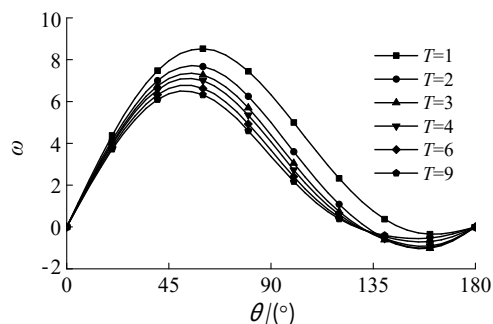


图4 $Re=40$ 圆柱启动后 $T=1\sim 9$ 时刻表面涡量的演变

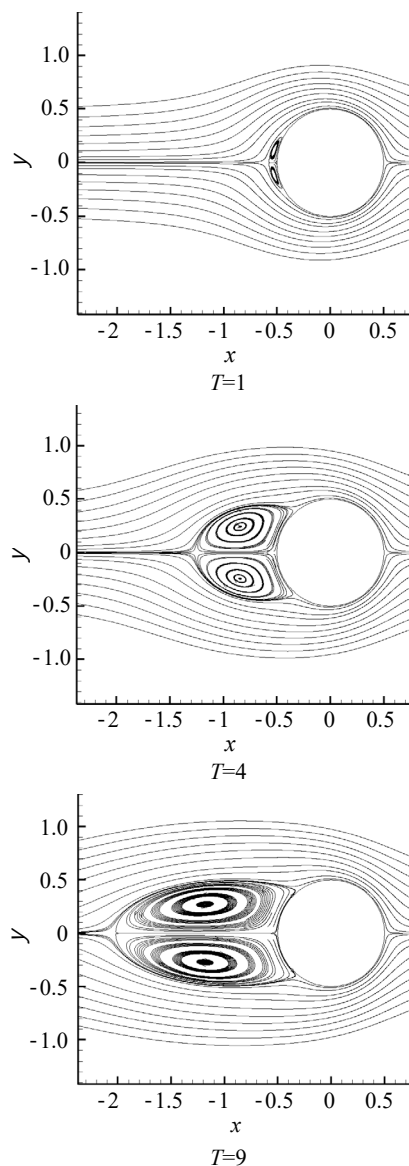


图5 $Re=40$ 圆柱启动后流线分布

$T=9.80, 10.02, 10.04, 10.06, 10.08$ 时刻圆柱上半表面涡量的变化如图6和图7所示. 从图6和图7可看出, 停止时刻圆柱表面涡量减小到最小值, 然后缓慢变大, 圆柱上表面(除去前后驻点)涡量均为负值, 下表面涡量为正值; 停止初期, 表面涡量最小值对应的角度逐渐增大, 随着时间的推进该值又开始变小; $T=15$ 附近上半圆柱表面开始出现正涡量, 对应角度约为 50° , 这表明圆柱该处流线扭曲并开始产生新的分离, 此时的流线如图8所示.

图9给出了 $T=18, 22$ 时刻流线的分布. 从图9

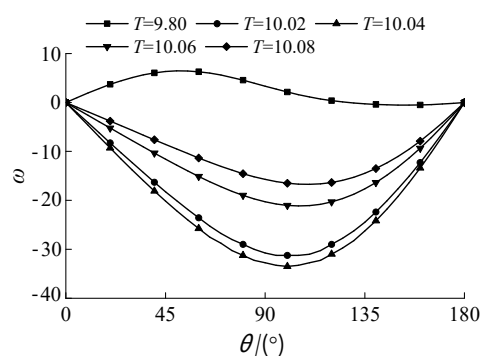


图6 $Re=40$ 圆柱停止初期上半表面涡量的演变

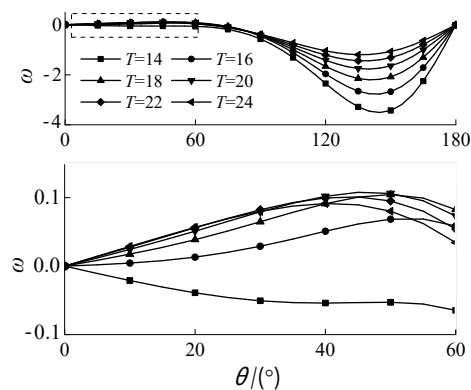


图7 $Re=40$ 圆柱停止后上半表面涡量的演变

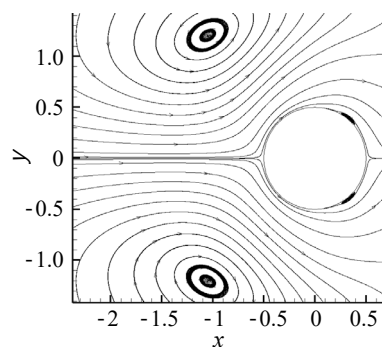


图8 $Re=40, T=15$ 时刻流线分布

可看出, 右侧的分离区域随着时间的推移逐渐变大, 流场内存在 2 个界限明显的涡, 尺度差别也很大, 左边的涡为圆柱启动后产生的, 随着圆柱停止逐步演化, 附着在圆柱壁面的涡则是该涡与圆柱面相互作用的结果.

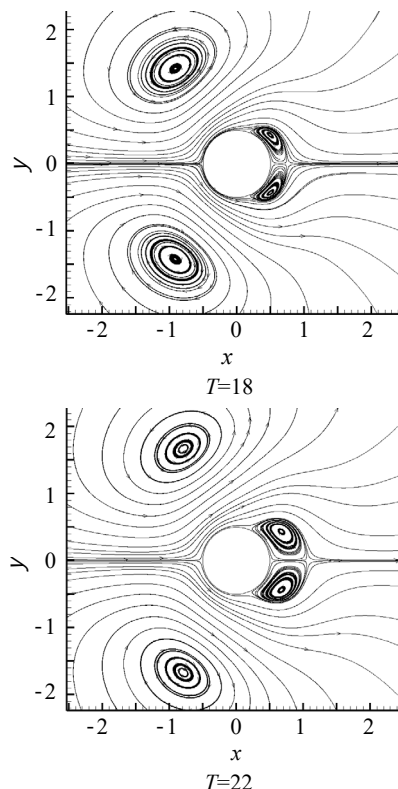


图9 $Re=40$, $T=18, 22$ 时刻流线分布

2.2 $Re=550$ 圆柱瞬间启动与停止的数值模拟

2.2.1 阻力计算与验证

图 10 给出了 $Re=550$ 本文计算结果与文献[11]计算结果的对比. 从图 10 可看出, 2 个结果十分吻合, 阻力曲线较 $Re=40$ 的曲线波动大, 在停止时刻后阻力反向最大, 然后再增大减小, 逐渐趋于 0.

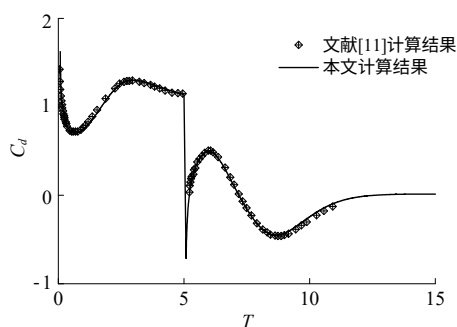


图 10 $Re=550$ 圆柱瞬时启动与停止($T=5$)的阻力系数曲线

2.2.2 流场随时间的演变

圆柱启动初期表面涡量的分布如图 11 所示. 圆柱上表面在 $T=0.5$ 附近出现负值涡量, 表面该处出现分离, $T=0.6$ 时刻的流线如图 12 所示, 圆柱尾部可见回流区, 尾部主涡开始形成. $T=2, 3, 4$ 时刻圆柱上表面的涡量如图 13 所示, 在 $T=3$ 时刻, 该曲线跨零点 3 次, 此时流场内的流线如图 14 所示. 图 15 给出了 $T=5$ 时刻流线的分布与实验值的对比, 可以看出流型吻合很好.

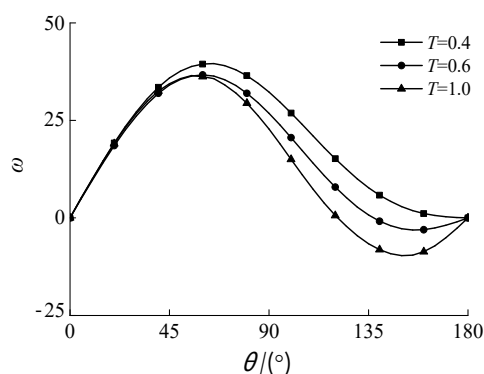


图 11 $Re=550$ 圆柱启动 $T=0.4, 0.6, 1.0$ 时刻表面涡量分布

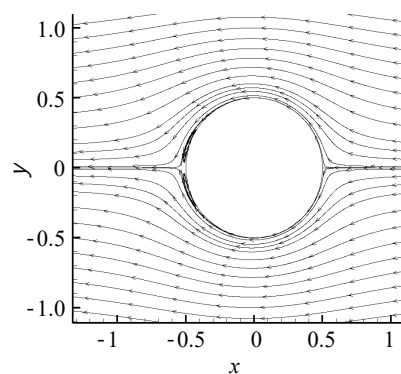


图 12 $Re=550$, $T=0.6$ 时刻流线分布

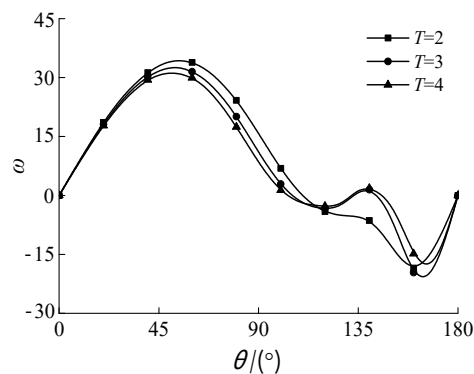


图 13 $Re=550$ 圆柱启动后 $T=2, 3, 4$ 时刻表面涡量分布

圆柱在 $T=5$ 时刻开始停止, $T=5.04$ 时刻完全停止, 各时刻圆柱上表面涡量分布如图 16 所示. 圆柱完全停止时, 圆柱表面涡量迅速变为最小值, 然后增大, 从 $T=6$ 至 $T=10$ 时刻, 圆柱表面涡量在 $0^\circ \sim$

120° 范围内变化较复杂, $T=6$ 时刻涡量在 100° 和 120° 附近穿过零点, 由图 17 中 $T=6$ 的流线可以看到该角度范围圆柱表面出现分离区域, 随时间推进该区域向前推进, 且尺度增大.

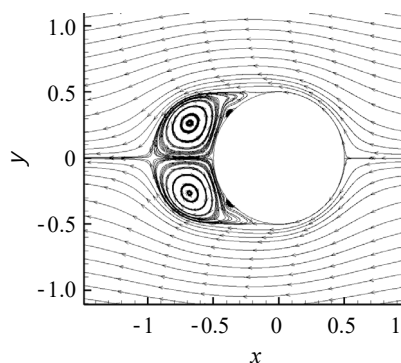


图 14 $Re=550$, $T=3$ 时刻流线分布

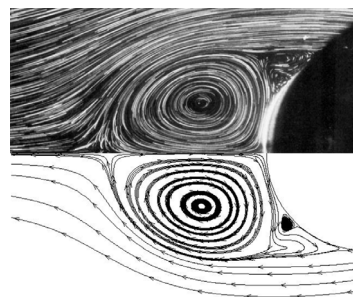


图 15 $Re=550$, $T=5$ 时刻流线分布与试验结果对比^[15]

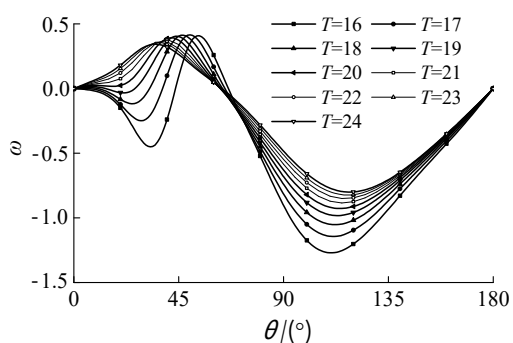
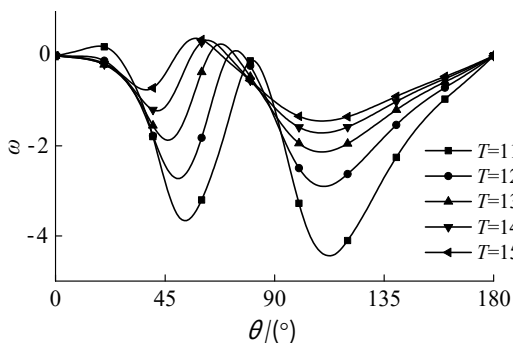
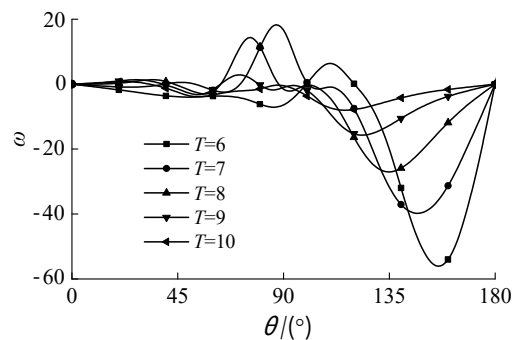
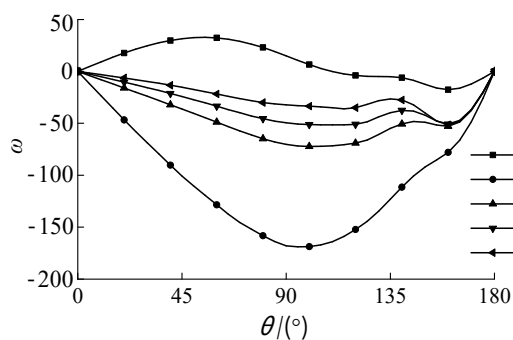
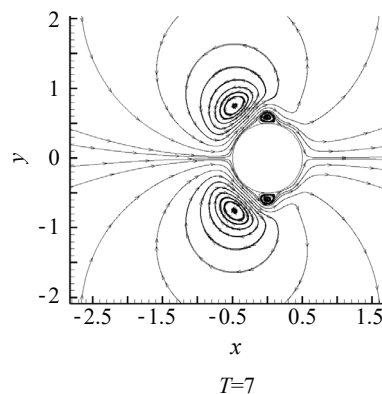
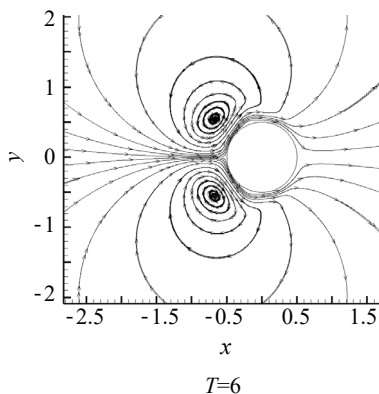
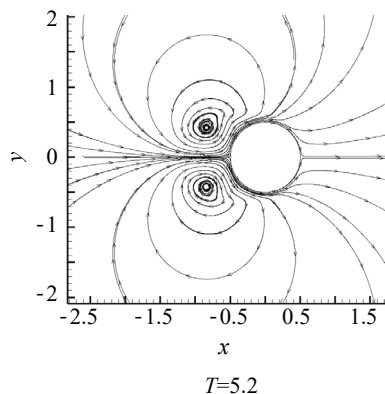
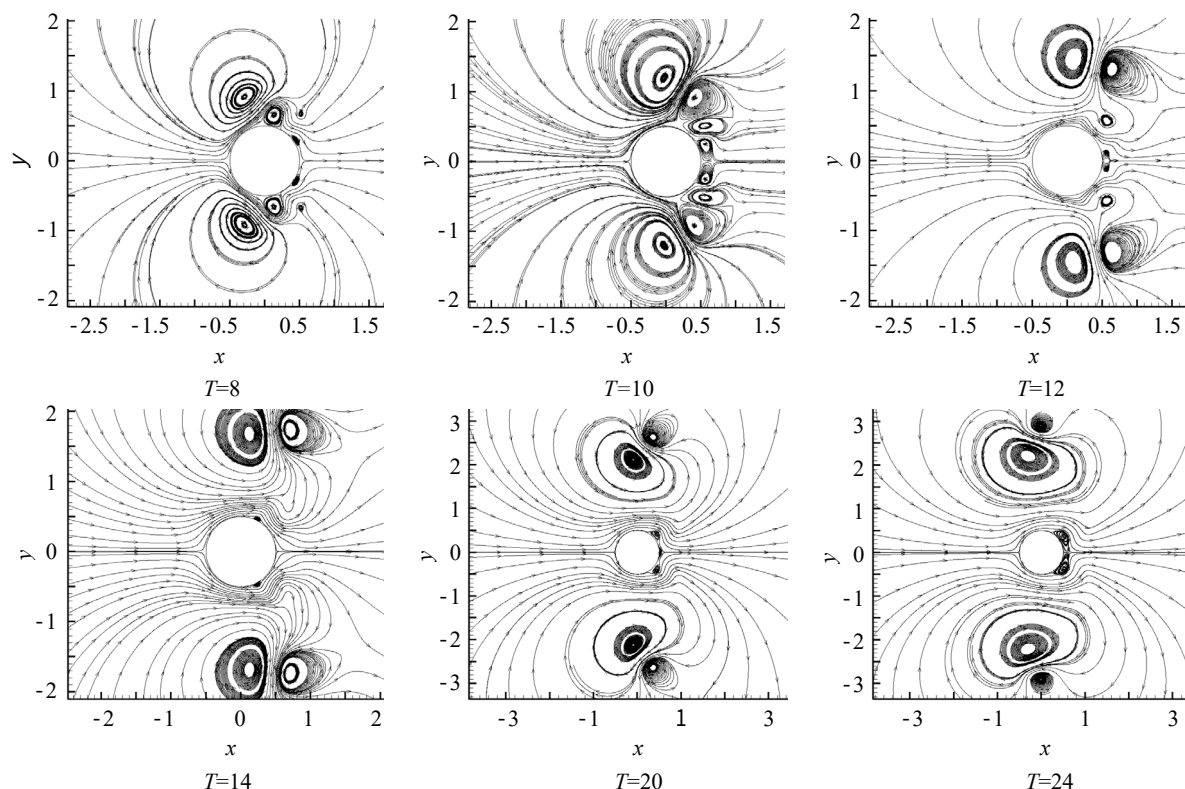


图 16 $Re=550$ 圆柱停止后上半表面涡量的演变



图 17 $Re=550$ 圆柱停止后流线的演变

流场中流线的演化如图 17 所示, 从 $T=7$ 至 $T=14$, 圆柱表面和流场内都存在封闭流线的产生和消亡, 流线扭曲明显, 现象很复杂, 受最大尺度封闭流线的影 响, 离其最近的附着在壁面的分离流, 尺度持续增大, 并离开壁面与最大尺度的封闭流线形成方向相反的“涡对”, 并被大的封闭流线包围, 该涡对呈现逆时针旋转运动, 涡对旋转中心的距离随时间的增大而减小。

3 结论

本文采用移动坐标系法结合有限体积法数值模拟了 Re 为 40 和 550, 停止时间分别为 10 和 5 的圆柱瞬时启动和瞬时停止问题, 详细分析了圆柱表面涡量的演变, 流场中流线的演化等。圆柱启动后其尾部的回流区随时间持续增长, $Re=550$ 和 $Re=40$ 相比, 尾流区内出现了二次涡; 圆柱停止后, 流场的演变比圆柱启动后流场的演变复杂, $Re=550$ 比 $Re=40$ 更复杂, 流场内存在多个涡的产生和消亡, 且远离壁面处是一对运动涡, 涡对旋转中心的距离随时间的增大而减小。本文计算方法为单个物体运动的无界流场计算提供了参考。

参考文献:

- [1] Collins W M, Dennis S C R. Flow past an impulsively started circular cylinder[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1973, 44(1):53-75.
- [2] Bar-Lev M, Yang H T. Initial flow field over an impulsively started circular cylinder[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1975, 72(4):625-647.
- [3] Coutanceau M, Bouard R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation Part 1: Steady flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1977, 79(2):231-256.
- [4] Coutanceau M, Bouard R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation Part 2: Unsteady flow[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1977, 79(2):257-272.
- [5] Bouard R, Coutanceau M. The early stage of development of the wake behind an impulsively started cylinder for $40 < Re < 104$ [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1980, 101(3):583-607.
- [6] Sumner D, Price S J, Paidousis M P. Investigation of impulsively-started flow around side-by-side circular cylinders: Application of particle image velocimetry[J]. Journal of Fluids and Structures, 1997, 11(6):597-615.

- [7] Sumner D, Price S J, Paidousis M P. Tandem cylinders in impulsively started flow[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1999, 13(7):955-965.
- [8] Sumner D, Price S J, Paidousis M P. Fluid behaviour of side-by-side circular cylinders in steady cross-flow[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1999, 13(3):309-338.
- [9] Lin C, Hsieh S C, Lin W J, et al. Characteristics of recirculation zone structure behind an impulsively started circular cylinder[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2012, 138(2):184-198.
- [10] Loc T P. Numerical analysis of unsteady secondary vortices generated by an impulsively started circular cylinder[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, 100(1):111-128.
- [11] Koumoutsakos P, Leonard A. High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1995, 296:1-38.
- [12] Marra A, Mola A, Quartapelle L, et al. Calculation of impulsively started incompressible viscous flows[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2004, 46(8):877-902.
- [13] Sanyasiraju Y V S S, Manjula V. Flow past an impulsively started circular cylinder using a higher-order semicompact scheme[EB/OL]. [2017-08-12]. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.016709>.
- [14] Kalita J C, Sen S. The biharmonic approach for unsteady flow past an impulsively started circular cylinder[J]. *Communications in Computational Physics*, 2012, 12(4):1163-1182.
- [15] Kalita J C, Sen S. α -, β -phenomena in the post-symmetry break for the flow past a circular cylinder[EB/OL]. [2017-08-12]. <https://doi.org/10.1063/1.4979065>.
- [16] Rahman M M, Karim M M, Alim M A. Numerical investigation of unsteady flow past a circular cylinder using 2-D finite volume method[J]. *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*, 2007, 4(1):27-42.
- [17] 李志峰, 吴大转, 王乐勤. 基于动网格方法的圆柱启动瞬态流动数值模拟[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2008, 42(2):264-268.
- [18] Xu D Y, Chen D X, Guo J. Least squares isogeometric method for transient flow around an impulsively started circular cylinder[J]. *International Journal of Fluid Dynamics*, 2017, 5(3):83-90.
- [19] Niu X, Chew Y, Shu C. Simulation of flows around an impulsively started circular cylinder by Taylor series expansion- and least squares-based lattice Boltzmann method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2003, 188(1):176-193.
- [20] Wang X, Dalton C. Numerical solutions for impulsively started and decelerated viscous flow past a circular cylinder[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2010, 12(4):383-400.

Numerical simulation of impulsively started and stopped circular cylinder based on moving coordinate method

SUN Xin-lei¹, YANG Lu-chun^{2*}, WANG Chang-jie², XU Feng²

(1. School of Information and Communication, Wuhan College, Wuhan 430212, China;

2. Wuhan 2nd Ship Design and Research Institute, Wuhan 430205, China)

Abstract: Both moving coordinated method and finite volume method are used to simulate the flow caused by impulsively started and stopped cylinder. The evolution of vortices on the cylinder surface and the stream lines in flow are analyzed. This method can also be applied to simulate the flow field of a single object moving in unbounded fluid.

Key words: moving coordinated method; finite volume method; impulsively started cylinder; impulsively stopped cylinder

(责任编辑 史小丽)