

# 一个关于 Kirchhoff 方程解的存在性的注记

胡晓晓

(温州医学院 信息与工程学院, 浙江 温州 325035)

摘要: 对如下形式的 Kirchhoff 型非局部问题进行了研究:

$$\begin{cases} -(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2)\Delta u = g(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中:  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^N$  中的光滑有界区域,  $a, b > 0$ ,  $g(x, t): \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  上的连续实函数. 通过变分计算得到了无经典 Ambrosetti-Rabinowitz 条件下这类问题的多重解的存在性.

关键词: 变分法; Kirchhoff 型问题; 山路引理

中图分类号: O175.8

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2013) 01-0060-03

## 1 引言和主要结论

Kirchhoff 型非局部问题形式如下:

$$\begin{cases} -(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2)\Delta u = g(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^N$  中的光滑有界区域,  $a, b > 0$ ,  $g(x, u): \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  上的连续实函数. 假设非线性连续实函数  $g(x, u): \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 满足下列条件:

(G<sub>1</sub>)  $|g(x, u)| \leq a(1 + |u|^{p-1})$ ,  $a > 0$ ,  $p \in (4, 2^*)$ ,

其中: 当  $N \geq 3$  时,  $2^* := 2N/(N-2)$ ; 当  $N = 1$  或 2 时,  $2^* := +\infty$ .

(G<sub>2</sub>)  $g(x, u) = o(u)$ , 当  $|u| \rightarrow 0$ , 对  $x$  一致成立.

(G<sub>3</sub>)  $G(x, u)/|u|^4 \rightarrow \infty$ , 当  $|u| \rightarrow \infty$ , 对  $x$  一致成立.

(G<sub>4</sub>)  $\exists \beta \in [0, a\lambda_1)$ , 使得对  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{G}(x, t) = tg(x, t) - 4G(x, t) \geq -\beta t^2$ , 对  $x$  一致成立. 其中:  $\lambda_1$  是  $-\Delta$  在  $\Omega$  上的第一个 Dirichlet 特征值,  $G(x, u) = \int_0^u g(x, t)dt$ .

由假设 (G<sub>1</sub>) 和 (G<sub>3</sub>) 推出 (1) 式上的能量泛函  $\Phi(u): H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  可以定义为:

$$\Phi(u) = a/2 \|u\|^2 + b/4 \|u\|^4 - \int_{\Omega} G(x, u)dx,$$

其中:  $\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$  是  $H_0^1(\Omega)$  上的标准范数.

另外,  $\Phi(u)$  属于  $H_0^1(\Omega)$  上的  $C^1$ .

$$\Phi'(u)v = (a+b\|u\|^2)\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx -$$

$$\int_{\Omega} g(x, u)v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

因此, 弱解恰好是能量泛函  $\Phi(u)$  的临界点. 假设条件 (G<sub>4</sub>) 代替经典 Ambrosetti-Rabinowitz AR 条件 (以下简称 AR), 这里文献 [1] 中的山路引理仍然适用.

Kirchhoff 型非局部问题 (1) 是在寻求以下方程的稳定解时产生的:

$$\varphi_u - (a+b\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx) \Delta \varphi = f(x, \varphi).$$

这个模型由 Kirchhoff 在文献 [2] 中提出, 作为对古典 D'Alembert 波方程的弹性弦自由振动的延伸.

近年来, 变分法已被成功地用在 Kirchhoff 型非局部问题<sup>[3-11]</sup>. 如文献 [4] 得到带超线性项或渐进线性项的 Kirchhoff 型问题的变号解. 在文献 [4] 中, 因为非局部项是四阶齐次的, 所以笔者考虑文献 [1] 中第 4 种情况的超线性 AR 条件:

$\exists \mu > 4$ , 使得对  $\forall x \in \overline{\Omega}$ , 当  $u$  足够大时有  $0 < \mu G(x, u) \leq g(x, u)u$  (AR).

容易得到:  $G(x, u) \geq C(|u|^{\mu} - 1)$ , 对  $x$  一致成立. 因此,  $G(x, u)/|u|^4 \rightarrow \infty$ , 当  $|u| \rightarrow \infty$  时, 对  $x$  一致成立.

我们知道 AR 条件很重要, 不仅保证能量泛函有山路几何, 还证明了 Palais-Smale 序列的有界性.

因此, 想知道是否存在比 AR 更弱的条件, 并在此条件下仍然可以得到 Kirchhoff 型非局部问题的解. 到目前为止, Mao 等<sup>[7]</sup>证明了非平凡解、变号解和多重限制下的多重解的存在性. Wu<sup>[9]</sup>、Jin 等<sup>[10]</sup>得到了在  $\mathbb{R}^N$  中超线性 Kirchhoff 型非局部问题存在无穷多解.

显然条件  $(G_4)$  比 AR 弱, 因此  $\tilde{G}(x, u) = uf(x, u) - 4G(x, u)$  不再为非负, 同时发现  $(G_4)$  条件也比单调性条件弱, 即  $t \rightarrow g(x, t)/|t|$ , 在  $(-\infty, 0)$  和  $(0, +\infty)$  上递增.

另外, 这里不再要求不等式  $|g(x, u)|^\sigma \leq c_0 \tilde{G}(x, u)|u|^\sigma$  对足够大的  $u$  成立. 受文献[7, 9-10]的启发, 笔者研究了 Kirchhoff 型问题, 并得到了在条件  $(G_4)$  下问题的解的存在性. 令

$$N = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, \Phi'(u)u = 0\},$$

$$C_0 = \inf\{\Phi(u), u \in N\},$$

如果  $\Phi(u) = C_0$ , 那么  $\Phi$  的解  $u$  叫基态解. 本文的主要结论是:

**定理 1** 如果假设  $(G_1) \sim (G_4)$  成立, 那么问题(1)至少有一个解; 如果  $\tilde{G}(x, t) = tg(x, t) - 4G(x, t) > 0$ ,  $\forall t \neq 0$ , 那么问题(1)至少有一个带有正能量的基态解.

假设  $(G_5)$   $g(x, -t) = -g(x, t), \forall x \in \Omega, t \in \mathbb{R}$ .

**定理 2** 如果假设  $(G_1) \sim (G_5)$  成立, 那么问题(1)有一组序列解, 使得  $\Phi(u_n) \rightarrow +\infty$ .

$(G_6)$   $g(x, t) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  对  $t$  是局部 Lipschitz 连续, 对  $x$  一致,  $tg(x, t) \geq 0$ .

**定理 3** 如果假设  $(G_1) \sim (G_5)$  成立, 那么问题(1)至少有一个正解, 一个负解, 一个变号解.

定理 1 的证明基于变异的山路引理. 定理 2 和定理 3 的证明类似于文献[7, 9], 利用喷泉定理和下降流论证.

## 2 主要结果证明

定理 1 的证明大部分依赖于文献[11-12]中的山路引理.

**引理 1**<sup>[11]</sup> 令  $E$  是 Banach 空间,  $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$  满足下列条件:

- (1)  $\exists r > 0, \alpha > 0$ , 使得  $\inf_{\|u\|=r} \Phi \geq \alpha$ .
- (2)  $\exists e \in E$ , 且  $\|e\| > r$ , 使得  $\Phi(e) < 0$ .

**定义 1**  $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} \Phi(\gamma(t))$ ,

其中:  $\Gamma = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow E : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$ , 那么存在 Gerami 序列  $\{u_n\} \subset E$  使得:

$$\Phi(u_n) \rightarrow c, (1 + \|u_n\|)\Phi'(u_n) \rightarrow 0.$$

证明 由  $(G_1)$  和  $(G_2)$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 我们知道存在  $C_\varepsilon$  使得:

$$|G(x, u)| \leq \varepsilon \lambda_1 |u|^2 + C_\varepsilon |u|^p,$$

因此

$$\Phi(u) \geq (a/2 - \varepsilon)\|u\|^2 + b/4\|u\|^4 - C'_\varepsilon \|u\|^p,$$

取  $\varepsilon$  足够小, 可以得到  $\exists r > 0, \alpha > 0$ , 使得:

$$\inf_{\|u\|=r} \Phi \geq \alpha.$$

另一方面, 由  $(G_3)$  可推出对任意  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $|u|_4^4 = 1, M > b/4\|u\|^4$ , 存在  $C > 0$  使得:

$$G(x, s) \geq M|s|^4 - C, \forall s \in \mathbb{R}.$$

因此, 当  $t \rightarrow \infty$  时,

$$\Phi(tu) \leq at^2/2\|u\|^2 +$$

$$(b/4\|u\|^4 - M)t^4 + C|\Omega| \rightarrow -\infty,$$

所以, 能量泛函  $\Phi$  满足山路几何, 并存在 Germain 序列  $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$  使得:

$$\Phi(u_n) \rightarrow c, (1 + \|u_n\|)\Phi'(u_n) \rightarrow 0, \quad (2)$$

其中:  $c$  如(2)式定义.

下面证明这个 Germain 序列  $\{u_n\}$  收敛于  $\Phi$  的非平凡临界点. 由  $(G_4)$  得到:

$$4\Phi(u_n) - \Phi'(u_n)u_n = a\|u_n\|^2 + \int_\Omega (u_n g(x, u_n) - 4G(x, u_n))dx \geq (a - \beta/\lambda_1)\|u_n\|^2.$$

由条件  $0 < \beta < a\lambda_1$  和  $\{u_n\}$  在  $c$  处是 Cerami 序列推出  $\|u\|^2$  是有界的. 那么可以假设  $u_n$  在  $E$  中弱收敛于某个  $u, u \neq 0, \Phi'(u) = 0$ , 在  $L^s(\Omega)$ ,  $1 \leq s < 2^*$  中强收敛于  $u$ . 那么由  $g(x, u)$  的次临界增长得到: 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\int_\Omega g(x, u_n)(u_n - u)dx \rightarrow 0$ , 那么

$$o(1) = \Phi'(u_n)(u_n - u) = (a + b\|u_n\|^2) \int_\Omega \nabla u_n \nabla (u_n - u) ds,$$

由此得到当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\|u_n\|^2 \rightarrow \|u\|^2, \text{ 即 } u_n \text{ 在 } E \text{ 中强收敛于 } u.$$

由以上证明可知:

$$N = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \neq 0, \Phi'(u) = 0\},$$

是非空的. 因为对

$$t \neq 0, \tilde{G}(x, t) = tf(x, t) - 4G(x, t) > 0,$$

我们知道  $C_0 > 0$ , 令  $u_n \in N$ , 且满足  $\Phi(u_n) \rightarrow C_0$ , 则  $u_n$  在  $C_0$  处是 Cerami 序列, 在  $E$  中收敛于  $u$ ,

$\Phi'(u) = 0$ . 因此,  $u$  是带有正能量的基态解.

**定理 2 的证明** 根据上述论证知道 Cerami 条件成立, 类似于文献[9-10]利用喷泉定理的证明, 如文献[11]中的例子, 可以得到带大能量的无穷多解的存在性.

**定理 3 的证明** 根据上述论证知道 Cerami 条件成立, 类似于文献[7]利用下降流的论述, 可以得到至少存在一个正解, 一个负解, 一个变号解.

#### 参考文献:

- [1] Ambrosetti A, Rabinowitz P. Dual variational methods in critical point theory and applications[J]. J Funct Anal, 1973, 41:349-381.
- [2] Kirchhoff G. Mechanik[M]. Teubner: Leipzig, 1883.
- [3] Perera K, Zhang Z T. Nontrivial solutions of Kirchhoff-type problems via the Yang index[J]. J Differential Equations, 2006, 221:246-255.
- [4] Zhang Z T, Perera K. Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flow[J]. J Math Anal Appl, 2006, 317:456-463.
- [5] Arosio A, Panizzi S. On the well-posedness of the Kirchhoff string[J]. Trans Amer Math Soc, 1996, 384: 305-330.
- [6] Alves C O, Corra F J S A, Ma T F. Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type[J]. Comput Math Appl, 2005, 49:85-93.
- [7] Mao Anmin, Zhang Zhitao. Sign-changing and multiple solutions of Kirchhoff type problems without the P. S. condition[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70:1275-1287.
- [8] Cavalcanti M M, Domingos Cavalcanti V N, Soriano J A. Global existence and uniform decay rates for the Kirchhoff-Carrier equation with nonlinear dissipation[J]. Adv Differential Equations, 2001, 6:701-730.
- [9] Wu Xian. Existence of nontrivial solutions and high energy solutions for Schrödinger-Kirchhoff-type equations in  $R^N$  [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12:1278-1287.
- [10] Jin Jiahua, Wu Xian. Infinitely many radial solutions for Kirchhoff-type problems in  $R^N$  [J]. J Math Anal Appl, 2010, 369:564-574.
- [11] Willem M. Minimax theorem[M]. Birkhäuser: University of Michigan, 1996.
- [12] Sun Jijiang, Tang Chunlei. Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type equations[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74:1212-1222.

## A Note on the Existence of Solutions for Kirchhoff Type Problems without Ambrosetti-Rabinowitz Condition

HU Xiao-xiao

( School of Information & Engineering, Wenzhou Medical College, Wenzhou 325035, China )

**Abstract:** In this paper we consider the Kirchhoff type nonlocal problem in the form of

$$\begin{cases} -(a+b\int_{\Omega} |\nabla u|^2) \Delta u = g(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where  $\Omega$  is a smooth bounded domain of  $\mathbb{R}^N$ ,  $a, b > 0$  and  $g(x, t): \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is a real continuous function. We obtain the existence of multiplicity of solutions through variational methods for this problem without the classical Ambrosetti-Rabinowitz condition.

**Key words:** variational methods; Kirchhoff type problem; Mountain-Pass theorem

(责任编辑 史小丽)