

非连续增算子的不动点定理及其应用

李冰冰¹, 吴献超²

(1. 同济大学浙江学院 数学教研室, 浙江 嘉兴 314000; 2. 嘉兴一中 数学组, 浙江 嘉兴 314000)

摘要: 给出了 Banach 空间的一个增算子不动点定理, 将这一定理应用到 Banach 空间含间断项的二阶非线性脉冲积—微分方程, 给出了一类方程的最大解和最小解的存在性定理. 应用以上 2 个定理并通过建立比较定理, 讨论了 Banach 空间含间断项的二阶非线性脉冲积—微分方程的初值问题的最大解、最小解的存在性, 并且在应用定理时仅用锥正规, 减弱了刘笑颖等提出的锥正则条件.

关键词: 增算子; 不动点; 含间断项的脉冲积—微分方程; 初值问题

中图分类号: O17

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2013) 01-0063-06

增算子的不动点定理在数学的许多领域, 特别是在非线性微分方程和积分方程中有着广泛的应用^[1-3]. 而非连续增算子不动点定理在含间断项的非线性积—微分方程中有着极为广泛的应用^[4-6]. 在已有的文献中, 对含间断项脉冲积—微分方程的研究并不多, 因而能用来直接讨论此类方程的增算子不动点定理自然也不多. 笔者给出了一个新的非连续增算子不动点定理, 用锥正规和非常弱的伪可分条件减弱了文献[2,3]中的锥正则和弱紧性条件. 利用此定理讨论了 Banach 空间中含间断项的脉冲积—微分方程的初值问题, 通过建立比较定理, 证明了方程的最大解和最小解的存在性.

1 主要定理

引理 1^[3] 设 (Y, P) 为半序 Banach 空间, Z 是 Y 的非空子集, $y \in Y$, 若 $\forall z \in Z$, 有 $z \leq y$ (或 $y \leq z$), 则 $\forall z \in \overline{\text{co}}(Z)$, 有 $z \leq y$ (相应地 $y \leq z$).

定义 1^[7] 设 X 是半序集, 如果对 X 中任何全序子集 N , 都存在可数集 $\{x_n\} \subset N$, 使得只要 $x \in N$, $x \neq \sup N$, 就存在 $x_{n_0} \in \{x_n\}$, 满足 $x \leq x_{n_0}$, 则称 X 是伪可分的.

定理 1 设 X 是半序集, D 为 X 的非空子集, (Y_i, P) 是半序 Banach 空间, 存在增算子 $B_i: D \rightarrow Y_i$ 与增算子 $C_i: Y_i \rightarrow D$, 使得 $A = \sum_{i=1}^m C_i B_i$, 若

(i) $\exists u_0 \in D$, 使 $u_0 \leq A u_0$.

(ii) $B_i(D)$ 的任一全序子集都是有界的且是伪可分的, 则 A 在 D 中至少有一个不动点.

证明 易知 $A: D \rightarrow D$ 是增算子. 令 $M = \{x \in D \mid x \leq A x\}$, 由(i)知 $u_0 \in M$, 故 $M \neq \emptyset$.

设 N 是 M 的任一全序子集, 下证 N 在 M 中必有上界.

由于 B_i 是增算子, 故 $B_i(M)$ 是 $B_i(D)$ 中的一个全序子集, 则由(ii)知 $B_i(M)$ 是伪可分的, 即对 $B_i(M)$ 的任一全序子集 $B_i(W)$ 都存在可数集 $\{w_n\} \subset B_i(W)$, 对任意 $w \in B_i(W)$, $w \neq \sup B_i(W)$, 存在 $w_{n_0} \in \{w_n\}$, 使得 $w \leq w_{n_0}$.

令 $s_1 = w_1$, $s_n = \max\{w_{n-1}, w_n\}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$), 则 $\{s_n\} \subset B_i(W)$, 且 $\{s_n\}$ 为 $B_i(W)$ 中单调递增序列. 由 $B_i(M)$ 有界, 故 $B_i(W)$ 也有界. 存在 $\bar{s}_i \in B_i(M) \cap \overline{\text{co}} B_i(N)$, 令 $\bar{s} = \max\{\bar{s}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, 使

$$s_n \leq \bar{s}, n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

令 $\bar{x} = \sum_{i=1}^m C_i \bar{s}$. 任意 $x \in N$, 有 $B_i x \in B_i(N)$, 由(1)式知, $B_i x \leq \bar{s}$. 因 C_i 是增算子, 且 $x \leq A x$, 故 $x \leq A x = \sum_{i=1}^m C_i B_i x \leq \sum_{i=1}^m C_i \bar{s} = \bar{x}$, 即 $\bar{x}$ 是 N 的一个上界.

再证 $\bar{x} \in M$. 因任意 $x \in M$, $x \leq \bar{x}$, 由于 B_i 是增算子, 故 $B_i x \leq B_i \bar{x}$. 而 $\bar{s} \in \overline{\text{co}}(B_i(N))$, 由引理 1 知 $\bar{s} \leq B_i \bar{x}$. 于是 $\bar{x} = \sum_{i=1}^m C_i \bar{s} \leq \sum_{i=1}^m C_i B_i \bar{x} = A \bar{x}$, 故 $\bar{x} \in M$. 表明 M 的任一全序子集都在 M 中有上界,

从而根据 Zorn 引理可知 M 必有极大元, 记为 x^* .

最后证明 $x^* = Ax^*$, 否则 $x^* < Ax^*$. 由 A 是增算子, 有 $Ax^* \leq A(Ax^*)$. 易知 $Ax^* \in D$, 所以 $Ax^* \in M$. 这与 x^* 是 M 的极大元矛盾, 从而定理得证.

若将定理 1 中的集 D 加强为序区间, 则可以获得更强的结果.

定理 2 设 X 是半序集, $D = [u_0, v_0] = \{x \in X \mid u_0 \leq x \leq v_0\}$ 是 X 中的序区间, (Y_i, P) 为半序 Banach 空间. 如果存在增算子 $B_i: D \rightarrow Y_i$ 与增算子 $C_i: [B_i u_0, B_i v_0] \rightarrow X$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 使得:

$$A = \sum_{i=1}^m C_i B_i: D \rightarrow X, \text{ 若}$$

$$(i) \quad u_0 \leq Au_0, \quad Av_0 \leq v_0 \leq \Phi(t).$$

(ii) $B_i(D)$ 的任一全序子集都是有界且伪可分的, 则 A 在 D 中必有最大不动点和最小不动点.

证明 易知 A 是增算子, 由 (i) 知 $\forall x \in D$ 有 $u_0 \leq Au_0 \leq Ax \leq Av_0 \leq v_0$, 故 $A: D \rightarrow D$. 令定理 1 的条件全部满足, 于是根据定理 1 知 A 在 D 中必有不动点. 令不动点的集合 $J(A) = \{x \in D \mid Ax = x\}$, 则 $J(A) \neq \emptyset$. 又令

$$D^* = \{[u, v] \mid [u, v] \subset D, \\ u \leq Au, \quad Av \leq v, \quad J(A) \subset [u, v]\}.$$

因为 $D \in D^*$, 故 $D^* \neq \emptyset$. 在 D^* 中取集合的包含关系 “ $\subset$ ” 作为半序, 则 D^* 是一个半序集.

下证 D^* 中必有极小元.

设 $B^* = \{Q_\alpha = [u_\alpha, v_\alpha] \mid \alpha \in \Lambda\}$. 设 $N_u = \{u_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$, $N_v = \{v_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$. 显然 N_u, N_v 是 D 的全序子集. 在定理 1 的证明中取 $N = N_u$, 则令 $\bar{y} = \bar{S}$ 且 $\bar{y} \in \overline{\text{co}}(B(N_u))$, 使 $\bar{u} = \sum_{i=1}^m C_i \bar{y}$ 有定义, 且 $\bar{u} \in D$ 及

$$u_\alpha \leq \bar{u}, \quad \forall \alpha \in \Lambda, \quad (2)$$

$$\bar{u} \leq A\bar{u}. \quad (3)$$

令 $M^* = \{x \in D \mid x \geq Ax\}$, 又令 $N = N_v$, 则存在 $\bar{Z}_i \in B(M) \cap B_i(N_v)$, 令 $\bar{Z} = \min\{\bar{Z}_i\}$, 使 $\bar{Z} \leq S_n$, $n = 1, 2, \dots$. $\bar{Z} \in \overline{\text{co}}(B(N_v))$, 使得 $\bar{v} = \sum_{i=1}^m C_i \bar{Z}$ 有定义, 且 $\bar{v} \in D$ 及

$$\bar{v} \leq v_\alpha, \quad \forall \alpha \in \Lambda, \quad (4)$$

$$A\bar{v} \leq \bar{v}, \quad (5)$$

$\forall x \in J(A)$, 对于 $\forall u_\alpha \in N_u, v_\alpha \in N_v$, 有 $u_\alpha \leq x \leq v_\alpha$, 从而 $B_i u_\alpha \leq B_i x \leq B_i v_\alpha$.

由于 $\bar{y} \in \overline{\text{co}}(B(N_u))$, $\bar{Z} \in \overline{\text{co}}(B(N_v))$, 即

$$\bar{u} \leq Ax \leq \bar{v}, \quad (6)$$

于是 $\bar{u} \leq \bar{v}$, 令 $Q = [\bar{u}, \bar{v}]$, 由 (2) 式和 (4) 式可以看出

$\forall \alpha \in \Lambda$ 有 $Q \subset Q_\alpha$, 即 Q 是 B^* 的一个下界, 由 (6) 式知 $J(A) \subset Q$. 再利用 (3) 式和 (5) 式知 $Q \in D^*$, 于是根据 Zorn 引理知 D^* 中必有极小元, 记作

$$Q_* = [u_*, v_*].$$

最后证明 u_* , v_* 分别是 A 在 D 中的最小不动点与最大不动点. 若 $v_* \neq Av_*$, 则因 $Q_* \in D^*$ 有:

$$u_* \leq Au_*, \quad (7)$$

$$Av_* < v_*, \quad (8)$$

且 $J(A) \subset Q_*$, 因此令 $Q_0 = [u_*, Av_*]$ 有意义, 且 $Q_0 \subset Q_*$, $Q_0 \neq Q_*$. 由于 $\forall x \in J(A)$, $u_* \leq x \leq v_*$, 于是 $Au_* \leq Ax = x \leq Av_*$. 再由 (7) 式知 $J(A) \subset Q_0$, 据 (8) 式有 $A(Av_*) < Av_*$, 结合 (7) 式知 $Q_0 \in D^*$. 此与 Q_* 的极小性矛盾, 故必有 $Av_* = v_*$. 同理 $Au_* = u_*$, 再由 $J(A) \subset Q_*$, 即结论成立.

2 对含间断项的二阶非线性脉冲积—微分方程初值问题的应用

Banach 空间 E 中含间断项的二阶非线性脉冲积—微分方程初值问题 (IVP).

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), (Tx)(t), (Sx)(t)), & t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), \\ \Delta x'|_{t=t_k} = I'_k(x(t_k)) - MI_k(x(t_k)), \\ \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1 - Mx_0, \end{cases} \quad (9)$$

其中, $x_0, x_1 \in E$, $t \in J = [t_0, t_0 + a]$, $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_0 + a$. $f: J \times E \times E \times E \rightarrow E$, $M \geq 0$, $I_k: E \rightarrow E$, $I'_k: E \rightarrow E$. $\Delta x|_{t=t_k} = x(t_k^+) - x(t_k^-)$, $x(t_k^+)$ 与 $x(t_k^-)$ 分别表示 $x(t)$ 在 $t=t_k$ 的右极限与左极限. $\Delta x'|_{t=t_k} = x'(t_k^+) - x'(t_k^-)$, $x'(t_k^+)$ 与 $x'(t_k^-)$ 分别表示 $x'(t)$ 在 $t=t_k$ 的右极限与左极限.

$$(Tx)(t) = \int_{t_0}^t k(t, s)x(s)ds,$$

$$(Sx)(t) = \int_{t_0}^{t_0+a} h(t, s)x(s)ds,$$

$$k \in C(D, R^+),$$

$$D = \{(t, s) \in J \times J, t \geq s\}, \quad h \in C(J \times J, R^+).$$

本文恒设 E 是半序 Banach 空间, 其半序由 E 中的锥 P 导出. 令 $PC^1(J, E) = \{x \mid x: J \rightarrow E, \text{ 在 } t \neq t_k \text{ 处连续, 在 } t = t_k \text{ 处左连续, } x(t_k^+), x'(t_k^+), x'(t_k^-) \text{ 存在, } k = 1, 2, \dots, m\}$, $PC^1(J, E)$ 在 $\|x\|_{PC^1} = \max\{\|x\|_{PC}, \|x'\|_{PC}\}$ 下是半序 Banach 空间^[6].

$$\|x\|_{PC} = \sup_{t \in J} \|x(t)\|, \quad \|x'\|_{PC} = \sup_{t \in J} \|x'(t)\|,$$

令 $J' = J / \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$,

$$J_0 = [t_0, t_1], J_1 = (t_1, t_2], \dots, J_m = (t_m, t_0 + a].$$

令 $A^1(J', E) = \{x | x: J \rightarrow E, x, x' \text{ 在 } J_i \text{ 上绝对连续}^{[8]}, x', x'' \text{ 在 } J_i \text{ 上几乎处处 (a.e.) 存在}, x', x'' \in L(J_i, E)\}$, 其中 $L(J, E) = \{x | x: J \rightarrow E \text{ 强可测}^{[9]}, \int_J \|x(t)\| dt < +\infty\}$. $L(J, E)$ 在范数 $\|x\| = \int_J \|x(t)\| dt$ 下为半序 Banach 空间^[9].

若 $x \in PC^1(J, E)$, 由中值定理得:

$$x(t_k) - x(t_k - h) \in h \overline{\text{co}}\{x'(t): t_k - h < t < t_k\}, h > 0,$$

容易得到左导数 $x'_-(t_k)$ 存在, 而且 $x'_-(t_k) = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-1}[x(t_k) - x(t_k - h)] = x'_-(t_k)$. 在本文中 $x'(t_k)$ 可以理解为 $x'_-(t_k)$ ^[10].

类似文献[11]中引理 3.1 证明, 可得以下引理.

引理 2 设 $x \in PC^1(J, E) \cap A^1(J', E)$, 则

$$x(t) = x(t_i^+) + (t - t_i)x'(t_i^+) + \int_{t_i}^t (t - s)x''(s)ds, \\ \forall t \in (t_i, t_{i+1}], i = 0, 1, \dots, m, \quad (10)$$

$$x(t) = x(t_0) + tx'(t_0) + \int_{t_0}^t (t - s)x''(s)ds + \\ \sum_{t_0 < t_k < t} \{[x(t_k^+) - x(t_k)] + \\ (t - t_k)[x'(t_k^+) - x'(t_k)]\}, t \in J. \quad (11)$$

定理 3 (比较定理)

设 $q \in PC^1(J, E) \cap A^1(J', E)$, 满足

$$\begin{cases} q''(t) \geq -M^2 q(t) - 2Mq'(t) - \\ N(Tx)(t), \quad a.e. t \in J, t \neq t_k, \\ \Delta q|_{t=t_k} \geq -L_k q(t_k), \\ \Delta q'|_{t=t_k} \geq -L'_k q(t_k) + ML_k q(t_k), \\ k = 1, 2, \dots, m, \\ q(t_0) \geq 0, q'(t_0) \geq 0, \end{cases} \quad (12)$$

其中, 常数 $M \geq 0, N \geq 0, 1 > L_k, L'_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m$ 满足下列不等式之一:

$$M_1 Ng_0 r^2 \leq \prod_{k=1}^m [(1 - L_k) + r_1(1 - L'_k)] \cdot \\ (\sum_{n=1}^m \prod_{k=n}^m [(1 - L_k) + r_1(1 - L'_k)] + 1)^{-1}, \quad (13)$$

$$M_2 Ng_0 + \sum_{k=1}^m L_k \leq 1, \quad (14)$$

这里

$$r = \max\{t_{i+1} - t_i : 0 \leq i \leq m\}, \\ r_1 = \min\{t_{i+1} - t_i : 0 \leq i \leq m\},$$

$$M_1 = \begin{cases} M^{-1}(e^{Ma} - 1), M > 0, \\ a, M = 0, \end{cases}$$

$$M_2 = \begin{cases} M^{-3}[(Ma - 1)e^{Ma} - 2^{-1}(Ma)^2 + 1], M > 0, \\ 3^{-1}a^3, M = 0, \end{cases}$$

则 $q(t) \geq 0, \forall t \in J$.

证明 $\forall \Phi \in P^*$, 记 $z(t) = \Phi(q(t))$, 则 $z \in PC^1(J, R^1) \cap A^1(J', R^1)$, 由(12)式得:

$$\begin{cases} z''(t) \geq -M^2 z(t) - 2Mz'(t) - \\ N(Tz)(t), \quad a.e. t \in J, t \neq t_k, \\ \Delta z|_{t=t_k} \geq -L_k z(t_k), \\ \Delta z'|_{t=t_k} \geq -L'_k z(t_k) + ML_k z(t_k), \\ k = 1, 2, \dots, m, \\ z(t_0) \geq 0, z'(t_0) \geq 0. \end{cases} \quad (15)$$

令 $\alpha(t) = z(t)e^{Mt}$, 则 $\alpha \in PC^1(J, R^1) \cap A^1(J', R^1)$, 由(15)式知 $\alpha(t_0) \geq 0, \alpha'(t_0) = z'(t_0), e^{Mt_0} + Mz(t_0) \cdot e^{Mt_0} \geq 0$ 及

$$\alpha''(t) \geq -N \int_{t_0}^t K(t, s)e^{M(t-s)} \alpha(s)ds, \\ a.e. t \in J, t \neq t_k, \quad (16)$$

$$\Delta \alpha|_{t=t_k} \geq -L_k \alpha(t_k), \quad (17)$$

$$\Delta \alpha'|_{t=t_k} \geq -L'_k \alpha'(t_k), k = 1, 2, \dots, m. \quad (18)$$

下证如果(13)式和(14)式之一满足, 则有:

$$\alpha(t) \geq 0, \forall t \in J. \quad (19)$$

情形 1 设(13)式成立, 反之(19)式不真, 即

$\exists t^* \in J$ 使得 $\alpha(t^*) < 0$, 设 $t^* \in (t_j, t_{j+1}]$, $0 \leq j \leq m$, $\lambda = \sup\{\alpha(t): t \in [t_0, t^*]\}$. 于是 $\exists i (0 \leq i \leq j)$ 使得 $\lambda = \alpha(t_i^*)$ 或 $\lambda = \alpha(\bar{t})$, $\bar{t} \in (t_i, t_{i+1}]$, 易知有 $\lambda \geq 0$, 若 $\lambda = 0$, 则 $\forall t \in [t_0, t^*], \alpha(t) \leq 0$, 由(16)~(18)式, 并利用(11)式有:

$$\alpha(t^*) = \alpha(t_0) + t^* \alpha'(t_0) + \int_{t_0}^{t^*} (t - s)\alpha''(s)ds + \\ \sum_{t_0 < t_k < t^*} [\Delta \alpha|_{t=t_k} + (t - t_k)\Delta \alpha'|_{t=t_k}] \geq 0,$$

此与 $\alpha(t^*) < 0$ 矛盾. 故 $\lambda > 0$. 从(16)式可以得到对 $a.e. t \in [t_0, t^*], t \neq t_k (k = 1, 2, \dots, j)$ 有:

$$\alpha''(t) - Ng_0 \int_{t_0}^t e^{M(t-s)} \lambda ds = \\ \begin{cases} -Ng_0 \lambda M^{-1}(e^{M(t-t_0)} - 1), M > 0, \\ -Ng_0 \lambda (t - t_0), M = 0, \end{cases} \geq -l_0 \lambda, \quad (20)$$

这里 $l_0 = M_1 Ng_0$, 当 $i < j$ 时, 由引理 2 中(10)式及(20)式知:

$$\alpha(t^*) - \alpha(t_j^+) = (t^* - t_j)\alpha'(t_j^+) + \int_{t_j}^{t^*} (t - s)\alpha''(s)ds.$$

由(17)式和(18)式知:

$$\alpha(t^*) \geq [(1-L_j) + (t^* - t_j)(1-L'_j)]\alpha(t_j) - l_0 \lambda r^2,$$

同理得:

$$\begin{aligned} \alpha(t_j) &\geq [(1-L_{j-1}) + (t_j - t_{j-1}) \cdot \\ &\quad (1-L'_{j-1})]\alpha(t_{j-1}) - l_0 \lambda r^2, \\ &\dots \\ \alpha(t_{i+1}) &\geq [(1-L_i) + (t_{i+1} - t') \cdot \\ &\quad (1-L'_i)]\alpha(t') - l_0 \lambda r^2. \end{aligned} \quad (21)$$

若 $\alpha(t_i^+) = \lambda$, 则 $t = t_i$; 或 $\alpha(\bar{t}) = \lambda$, 则 $t' = \bar{t}$.

整理(21)式得:

$$\alpha(t^*) \geq \lambda \prod_{k=i}^j [(1-L_k) + r_1(1-L'_k)] - \left\{ \sum_{n=i+1}^j \prod_{k=n}^j [(1-L_k) + r_1(1-L'_k)] + 1 \right\} l_0 \lambda r^2. \quad (22)$$

注意到 $\alpha(t^*) < 0, \lambda > 0$, 故由(14)式知:

$$\begin{aligned} l_0 r^2 &> \prod_{k=i}^j [(1-L_k) + r_1(1-L'_k)] \left\{ \sum_{n=i+1}^j \prod_{k=n}^j [(1-L_k) + \right. \\ &\quad \left. r_1(1-L'_k)] + 1 \right\}^{-1} \geq \prod_{k=1}^m [(1-L_k) + r_1(1-L'_k)] \cdot \\ &\quad \left\{ \sum_{n=1}^m \prod_{k=n}^m [(1-L_k) + r_1(1-L'_k)] + 1 \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

这与(13)式矛盾. 当 $i = j$ 时, 则有 $\bar{t} \in [t_j, t^*]$, 类似(22)式可证:

$$\begin{aligned} \alpha(t^*) - \lambda &\geq \lambda + r_1(1-L'_k)\lambda - l_0 \lambda r^2, \\ \text{从而有 } l_0 r &> 1, \text{ 显然与(13)式矛盾, 故(19)式成立.} \\ \text{情形 2 设(14)式满足而(19)式不真. 用与情形 1 相同的方法可证 } \exists t^* \in [t_{j-1}, t_j] \quad (0 \leq j \leq m) \text{ 与} \\ i(0 \leq i \leq j) \text{ 使得 } \alpha(t^*) < 0, \\ \lambda = \sup \{ \alpha(t) : t \in [t_0, t^*] \} &> 0. \end{aligned} \quad (23)$$

$\lambda = 0$ 时与情形 1 相同.

$\lambda = \alpha(t_i^+)$ 或 $\lambda = \alpha(\bar{t})$, $\bar{t} \in (t_i, t_{i+1}]$ 时, 由(21)式可知:

$$\alpha(t^*) - \lambda \geq \begin{cases} \sum_{k=i}^j r_1(1-L'_k)\lambda + \int_{t'}^{t^*} (t^* - s) \cdot \\ \quad \alpha''(s)ds + \sum_{k=i+1}^j \Delta \alpha|_{t=t_k}, i < j, \\ \sum_{k=i}^j r_1(1-L'_k)\lambda + \int_{t'}^{t^*} (t^* - s)\alpha''(s)ds, i = j, \end{cases} \quad (24)$$

其中: t' 的意义与(21)式中相同, 根据(24)式以及(16)~(18)式知:

$$\alpha(t^*) - \lambda \geq -\lambda(M_2 N g_0 + \sum_{k=1}^m L_k),$$

又由(23)式有 $M_2 N g_0 + \sum_{k=1}^m L_k > 1$. 此与(14)式矛盾, 故(19)式成立. 从而 $z(t) \geq 0, \forall t \in J$. 又因为 $\forall \phi \in P^*$ 是任意的, 所以 $q(t) \geq 0, \forall t \in J$. 证毕.

考虑二阶线性脉冲积-微分方程的初值问题.

设 $\sigma \in L(J, E), u \in PC^1(J, E)$,

$$\begin{cases} x''(t) = \sigma(t) - M^2 x(t) - \\ \quad 2Mx'(t) - N(Tx)(t), t \neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k} = I_k(u(t_k)) - L_k[x(t_k) - u(t_k)], \\ \Delta x'|_{t=t_k} = I'_k(u(t_k)) - L'_k[x(t_k) - \\ \quad u(t_k)] - M[I_k(u(t_k)) - \\ \quad L_k(x(t_k) - u(t_k))], k = 1, 2, \dots, m, \\ x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1 - Mx_0, \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{M(t_0-t)}x_0 + (t-t_0)e^{M(t_0-t)}x_1 + \\ &\quad \int_{t_0}^t (t-s)e^{M(s-t)}[\sigma(s) - N(Tx)(s)]ds + \\ &\quad \sum_{t_0 < t_k < t} e^{M(t_k-t)}\{I_k(u(t_k)) - L_k[x(t_k) - u(t_k)] + \\ &\quad (t-t_k)[I'_k(u(t_k)) - L'_k(x(t_k) - u(t_k))]\}, \end{aligned} \quad (26)$$

这里, $M, N, L_k, L'_k (k = 1, 2, \dots, m)$ 是常数.

引理 3 如果 $x \in PC^1(J, E)$ 是(26)式的解, 则 $x \in PC^1(J, E) \cap A^1(J', E)$ 是(25)的解.

引理 4 令

$$\begin{aligned} (T_1 x)(t) &= -N \int_{t_0}^t (t-s)e^{M(s-t)}(Tx)(s)ds - \\ &\quad \sum_{t_0 < t_k < t} e^{M(t_k-t)}[L_k(x(t_k)) + (t-t_k)L'_k(x(t_k))], \end{aligned}$$

其中: $M, N, L_k, L'_k (k = 1, 2, \dots, m)$ 皆为非负常数, 若

$$\gamma_1 = a^3 / 2Ng_0 + \sum_{k=1}^m (L_k + aL'_k) < 1, \quad (27)$$

$$\gamma_2 = M + a^2Ng_0 + \sum_{k=1}^m L'_k < 1, \quad (28)$$

则对 $\sigma \in L(J, E), u \in PC^1(J, E)$, 方程(25)有唯一解

$$x = (I - T_1)^{-1}(G_1\sigma + G_2u),$$

其中: I 为恒等算子, $(I - T_1)^{-1}$ 为 $(I - T_1)$ 的逆,

$$\begin{aligned} (G_1\sigma)(T) &= e^{M(t_0-t)}x_0 + te^{M(t_0-t)}x_1 + \\ &\quad \int_{t_0}^t (t-s)e^{M(s-t)}\sigma(s)ds, \end{aligned}$$

$$(G_2u)(t) =$$

$$\begin{cases} \sum_{t_0 < t_k < t} e^{M(t_k-t)}\{I_k(u(t_k)) + L_k u(t_k) + (t-t_k) \cdot \\ \quad [I'_k(u(t_k)) + L'_k u(t_k)]\}, \\ t_1 < t \leq t_0 + a, \theta, t_0 \leq t \leq t_1. \end{cases}$$

为证明方便提出下列假设:

(H₁) 设 u_0, v_0 是 IVP(9) 的下解与上解, 且 $u_0 \leq v_0$.

(H₂) $\forall u \in PC^1(J, E)$, $(Fu)(t) = f(t, u(t), (Tu)(t), (Su)(t))$ 强可测, 且 $Fu_0, Fv_0 \in L(J, E)$.

(H₃) 存在常数 $M \geq 0, N \geq 0$, 使得:

$$\forall t \in J, u_0(t) \leq u \leq \bar{u} \leq v_0(t),$$

$$(Tu_0)(t) \leq v \leq \bar{v} \leq (Tv_0)(t),$$

$(Su_0)(t) \leq w \leq \bar{w} \leq (Sv_0)(t)$ 时, 有:

$$f(t, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) - f(t, u, v, w) \geq$$

$$-M(\bar{u} - u) - N(\bar{v} - v).$$

(H₄) 常数 $L_k, 0 \leq L_k < 1$, 使得:

$$u_0(t_k) \leq x \leq \bar{x} \leq v_0(t_k) \text{ 时,}$$

$$I_k(\bar{x}) - I_k(x) \geq -L_k(\bar{x} - x), k = 1, 2, \dots, m.$$

(H₅) (13)式, (14)式, (27)式和(28)式成立.

(H₆) 存在常数 $M_0 > 0$, 使得 $\forall u \in D$ 有:

$$\int_J \|f(t, u(t), (Tu)(t), (Su)(t))\| + M^2 x(t) +$$

$$2Mx'(t) + N(Tx)(t) \| dt \leq M_0.$$

由定理 2 直接证得下面定理.

定理 4 设 X 为半序 Banach 空间, $D = [u_0, v_0]$ 为 X 中的序区间, 算子 $A: D \rightarrow X$ 满足 $u_0 \leq Au_0, v_0 \leq Av_0$. 若存在半序 Banach 空间 Y_1, Y_2 , 增算子 $B_i: D \rightarrow Y_i$ 与增算子 $C_i: Y_i \rightarrow X (i=1, 2)$, 使 $A = C_1 B + C_2 B_2$, 且对 D 中任何单调序列 $\{u_n\}, \{B_i u_n\}$ 在 Y_i 中有界且伪可分 ($i=1, 2$), 则 A 在 D 中必有最大不动点与最小不动点.

定理 5 设 E 是 Banach 空间, P 正规且满足条件 (H₁)~(H₆), 则 IVP(9) 在 $[u_0, v_0]$ 中必有最大解与最小解.

证明 对 $\forall u \in D = [u_0, v_0]$, 令

$$(B_1 u)(t) = (Fu)(t) + M^2 x(t) +$$

$$2Mx'(t) + N(Tx)(t),$$

由 (H₂), (H₃), (H₆) 知 B_1 是 $L(J, E)$ 的增算子, 从 (H₅) 知 (27) 式, (28) 式成立. 从而由引理 3, 引理 4 知方程 (26) 对 $\sigma = B_1 u$ 有唯一解 $x_u = (I - T_1)^{-1}(G_1 B_1 u + G_2 u)$, 记 $Au = x_u$, 则 A 映 D 入 $PC^1(J, E)$, 且 Au 满足 (25) 式. 由定理 3 可证 $u_0 \leq Au_0, v_0 \leq Av_0$. 令 $C_1 = (I - T_1)^{-1} G_1, B_2 = (I - T_1)^{-1} G_2, C_2 = I$, 则 $A = C_1 B_1 + C_2 B_2$. 由 $I - T_1$ 是增算子, 知 $(I - T_1)^{-1}$ 也是增算子, 可证得 C_1 是映 $L(J, E)$ 入 $PC^1(J, E)$, B_2

映 D 入 $PC^1(J, E)$ 的增算子, 由 P 正规得 D 是有界闭区间, 故 $B_1(D)$ 是 $L(J, E)$ 中的有界集, $B_2(D)$ 是 $PC^1(J, E)$ 中的有界集, 任取 D 中单调序列 $\{u_n\}$, 所以 $\{u_n\}, \{B_i u_n\}$ 分别是 $L(J, E)$ 与 $PC^1(J, E)$ 中的有界集.

下证 $\{B_i u_n\}$ 是伪可分的. 假设 $\{B_i u_n\}$ 不是伪可分的, 设 $\{B_i u_{n_i}\} \subset \{B_i u_n\}$, 对任意 $\{B_i u_{n_i}\} \subset \{B_i u_{n_i}\}$, 有 $B_i u_{n_i} \in \{B_i u_{n_i}\}$, 而且 $B_i u_{n_i} \neq \sup \{B_i u_{n_i}\}$, 任意取 $B_i u_{n_j} \in \{B_i u_{n_i}\}$, 有 $B_i u_{n_j} > B_i u_{n_i}$. 因为 B_i 是增算子, 所以 $u_{n_j} > u_{n_i}$. 由于 $\{u_n\}$ 是单调序列且 P 正规, 故 D 是有界闭区间. 又由 $\{u_n\}$ 的任意性可知, $u_n \geq \sup \{u_n\}$, 因为 $B_i u_n \geq B_i(\sup \{u_n\})$, 且 P 正规, 所以 $\{B_i u_n\}$ 是有界闭区间, 即 $\sup \{B_i u_n\}$ 存在. 由 $B_i u_{n_i}$ 的任意性可知 $B_i u_n = \sup \{B_i u_{n_i}\}$, 与假设矛盾, 所以 $\{B_i u_n\}$ 伪可分. 故 D 中任意单调序列 $\{u_n\}, \{B_i u_n\}$ 分别在 $L(J, E)$ 与 $PC^1(J, E)$ 中有界且是伪可分的.

令 $X = PC^1(J, E), Y_1 = L(J, E), Y_2 = X$, 由定理 4, 结论得证.

设 (H₂)' 为 $I_k \in C(E, E) (k=1, 2, \dots, m)$, f 在 $J \times E \times E \times E$ 上满足 Caratheodory 条件, 且 $Fu_0, Fv_0 \in L(J, E)$.

若将定理 5 中条件 (H₂) 加强为 (H₂)', 则可得更强的结果.

定理 6 将定理 5 中条件 (H₂) 改为 (H₂)', 则 IVP(9) 在 $[u_0, v_0]$ 中必有最小解 u_* 与最大解 v_* , 且存在单调列 $\{u_n\}, \{v_n\} \subset D$, 使得:

$$\|u_n - u_*\|_{pc} \rightarrow 0, \|v_n - v_*\|_{pc} \rightarrow 0.$$

证明 令 $u_n = Au_{n-1}, v_n = Av_{n-1}, n=1, 2, \dots$, 由定理 3 及 A 是增算子可以得 $u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_1 \leq v_0$, 由定理 5 的证明知 $\{B_i u_n\}, i=1, 2$ 分别在 $L(J, E)$ 与 $PC^1(J, E)$ 中有界, 由 (H₂)' 知 $\{B_i u_n\}, i=1, 2$ 收敛, 设极限分别为 x_1 与 x_2 , 令

$$u_* = (I - T_1)^{-1} G_1 x_1 + x_2,$$

$$\|G_1 B_i u_n - G_1 x_1\|_{pc} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (29)$$

又由 $A = (I - K)^{-1}(G_1 B + G_2)$ 得:

$$\|Au_n - u_*\|_{pc} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (30)$$

因为 $u_n = Au_{n-1}$, 所以

$$\|u_n - u_*\|_{pc} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (31)$$

则

$$u_n(t) \rightarrow u_*(t), n \rightarrow \infty, \\ \forall t \in [t_i, t_{i+1}), i=0,1,2,\dots,m, \quad (32)$$

由 $(H_2)'$ 可知 $(B_1 u_n)(t) \rightarrow (B_1 u_*)(t), n \rightarrow \infty, a.e. t \in J$, 代入(29)式得:

$$\|G_1 B_1 u_n - G_1 B_1 u_*\|_{pc} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (33) \\ I_k \in C(E, E) (k=1,2,\dots,m), \text{ 由(31)式和(32)式及 } G_2 \text{ 的定义可得:}$$

$$\|G_2 u_n - G_2 u_*\|_{pc} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (34)$$

由 $A = C_1 B_1 + C_2 B_2$ 及(33)式和(34)式得:

$$\|A u_n - A u_*\|_{pc} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

由(30)式得:

$$\|A u_n - u_*\|_{pc} \rightarrow 0, u_* = A u_*, u_* \in D.$$

同理, $\exists v_* \in D$ 使 $\|A v_n - v_*\|_{pc} \rightarrow 0, v_* = A v_*$, 即 u_*, v_* 分别是 IVP(9)在 D 中的最小解与最大解.

参考文献:

- [1] 张金清, 孙经先. 一个非连续增算子不动点定理及其应用[J]. 应用数学学报, 2001, 24(1):34-43.
- [2] 刘笑颖, 吴从炘. Banach 空间不连续的脉冲微分—积分方程的解与迭代解[J]. 数学学报, 2001, 44(3):469-474.
- [3] 刘笑颖, 吴从炘. 非连续弱紧增算子的不动点及其对 Banach 空间初值问题的应用[J]. 系统科学与数学, 2000, 20(2):175-180.
- [4] 孙经先. 非连续的增算子的不动点定理及其对含间断项的非线性方程的应用[J]. 数学学报, 1988, 31(1):101-107.
- [5] 刘笑颖, 吴从炘. Banach 空间不连续的脉冲微分—积分方程的周期边值问题[J]. 系统科学与数学, 2003, 23(3):374-380.
- [6] 张金清. 增算子的不动点定理及其对含间断项非线性脉冲方程的应用[J]. 数学学报, 2002, 45(6):1087-1098.
- [7] 孙经先. 非线性泛函分析序集一般原理的推广[J]. 系统科学与数学, 1990, 10(3):228-232.
- [8] 夏道行, 舒五昌, 严绍宗, 等. 泛函分析第二教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987:42.
- [9] 孙经先. 增算子的不动点定理及其对 Banach 空间含间断项的非线性方程的应用[J]. 数学学报, 1991, 34(5):665-674.
- [10] Liu Xinzhi, Guo Dajun. Periodic Boundary value problems for a class of second order impulsive integro-differential equations in Banach spaces[J]. Math Appl, 1997, 216(1):284-302.
- [11] Guo Dajun. Initial value problem for nonlinear second order impulsive integro-differential equations in Banach spaces[J]. Math Anal Appl, 1996, 200(1):1-13.

Fixed Point Theorems for Discontinuous Increasing Operators and Applications

LI Bing-bing¹, WU Xian-chao²

(1. Mathematics Staff Room, Tongji Zhejiang College, Jiaxing 314000, China;

2. Mathematics Group, Jiaxing No.1 Senior Middle School, Jiaxing 314000, China)

Abstract: In this paper, a new fixed point theorem for discontinuous increasing operator in Banach Spaces is derived. The theorem is applied to the second order discontinuous nonlinear impulsive integro-differential equations in Banach spaces, and the result about the existence of its maximal and minimal solutions is obtained. The initial value problems for second order discontinuous nonlinear impulsive integro-differential equations in Banach spaces are investigated. By establishing comparison theorems and using a fixed point theorem, the existence of maximal and minimal solutions is proved. The findings in this paper generalize and improve the relevant results presented in some well-known prestigious literatures.

Key words: increasing operators; fixed points; discontinuous impulsive integro-differential equation; initial value problem

(责任编辑 史小丽)