

# 非线性问题基于 Tikhonov 正则化方法的收敛性分析

袁琼林, 王金平\*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 本文主要利用 Tikhonov 正则化方法研究非线性不适定问题, 与之前的研究所不同的是, 本文主要研究当数据和算子均被噪声破坏时, 利用 Tikhonov 正则化方法进行收敛性分析. 同时, 充分利用算子的非线性条件及解的光滑性条件, 得到其在 Banach 空间和 Hilbert 空间中的收敛率.

关键词: 变分不等式; 收敛率; Tikhonov 正则化; 源条件

中图分类号: O177.6; O175.5 文献标志码: A 文章编号: 1001-5132 (2018) 04-0099-05

考虑非线性算子方程

$$K(x) = y. \quad (1)$$

当右端数据  $y \in Y$  和算子  $K: D(K) \subseteq X \rightarrow Y$  均被噪声破坏时, 设有误差的右端数据  $y^\delta$  满足:

$$\|y - y^\delta\| \leq \delta, \delta \geq 0. \quad (2)$$

由于问题的不适定性, 方程的解不连续地依赖于方程右端的数据  $y$ , 因此, 求解方程(1)的解转化为求解下式的极小解:

$$T_\alpha(x) = \|K(x) - y^\delta\|^p + \alpha P(x), \quad (3)$$

式中, 指数  $p > 1$ ;  $P: D(K) \subseteq X \rightarrow Y$  是非负凸稳定泛函. 特别的, 当  $X, Y$  是 Hilbert 空间时, 通常取  $p = 2$ , 罚项  $P(x) = \|x - x_0\|^2$ ,  $x_0 \in X$  是一个已知的初值.

不适定问题的正则化方法的研究是目前数学物理反问题中的一个热点问题. 物理、生物、医学、地质和工程技术领域都存在着大量的不适定问题, 比如参数识别问题、非线性不适定 Hammerstein 积分方程以及求解第一类 Fredholm 积分方程等. 对于非线性不适定问题, 目前掌握得最好的正则化方法是 Tikhonov 正则化方法和迭代法.

在 Hilbert 空间和 Banach 空间中关于精确算子的经典解的收敛率已相对完善. Hein 等<sup>[1-5]</sup>对 Hilbert 空间和 Banach 空间中精确算子的 Tikhonov 正则化方法进行了大量的收敛率分析, 也得到了

很好的收敛率的结果. 但是对于噪声算子和噪声数据的研究相对较少. 而对于线性的非精确算子的研究也已经开展, 并取得了一定的成果. 对于线性的非精确算子, Lu 等<sup>[6]</sup>在 Hilbert 空间对噪声算子进行离散化, 另外一些基于最小二乘法的正则化方法采取了多参数正则化来消除噪声算子的影响.

对于非线性的噪声算子, Jin 和 Neubauer 等分别研究了在有限维空间中的 Tikhonov 正则化方法<sup>[7]</sup>和 Landweber 迭代算法<sup>[8]</sup>. Stück 等<sup>[9]</sup>定义了关于噪声算子逐点噪声有界的概念并且得到了在 Hilbert 空间中采用 Gauss-Newton 算法的收敛率.

在方程(1)中, 当右端数据和算子均被破坏的时候, 有误差的右端数据和噪声算子分别记为  $y^\delta$ ,  $K^\delta$ , 对(3)式进行改进, 考虑

$$T_\alpha(x) = \|K^\delta(x) - y^\delta\|^p + \alpha P(x), \quad (4)$$

记  $x_\alpha^\delta$  为(4)的极小解,  $x^+$  为方程(1)的极小解.

## 1 预备知识

设  $K: X \rightarrow Y$  是非线性算子, 则  $K^*: Y^* \rightarrow X^*$  是其对偶算子, 即:

$$\langle y, K(x) \rangle = \langle K^*(y), x \rangle, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y^*.$$

定义 1 对于方程(1), 如果在  $X$  中存在序列  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  使得  $K(x_n) \rightarrow y$  但  $x_n$  不收敛到  $x$ , 则称方程(1)是不适定的.

收稿日期: 2018-01-28.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journallg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 宁波大学研究生科研创新基金 (G17068).

第一作者: 袁琼林 (1993-), 女, 安徽安庆人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: 2296075044@qq.com

\*通信作者: 王金平 (1962-), 男, 湖北武汉人, 博士/教授, 主要研究方向: 积分变换与图像处理. E-mail: wangjinping@nbu.edu.cn

**定义 2** 当  $x^+$  满足:  $p(x^+) = \min\{P(x) : K(x) = y\}$ , 则称  $x^+$  为方程(1)的极小解.

如果方程(1)有解, 它一定有极小解<sup>[4]</sup>.

**定义 3** 设  $P : D(P) \subset X \rightarrow [0, \infty)$  是凸泛函,  $\partial P(x)$  是  $P$  的次微分. 布雷格曼距离  $D_\xi(\cdot, x)$  定义如下:

$$D_\xi(\hat{x}, x) = P(\hat{x}) - p(x) - \langle \xi, \hat{x} - x \rangle, \\ x, \hat{x} \in D(P), \xi \in \partial P(x).$$

若  $X$  是  $q$  阶凸空间, 则存在一个常数  $c > 0$ , 使得

$$D_\xi(\hat{x}, x) \geq c \|\hat{x} - x\|^q. \quad (5)$$

由于算子均是非线性的, 为了更好地讨论问题, 作如下假设:

(1) 存在常数  $a$  和  $\mu \in (0, p)$ , 使得

$$\|K'_\delta[x^+](x - x^+)\| \leq a \|K_\delta(x) - K_\delta(x^+)\|^\mu. \quad (6)$$

(2)  $K, K_\delta : X \rightarrow Y$  是 Fréchet 可微且其导函数  $K', K'_\delta$  为有界函数, 满足

$$\|K(x) - K_\delta(x)\| \leq \delta_K, \quad (7)$$

$$\|K'(x) - K'_\delta(x)\| \leq \delta_{K'}. \quad (8)$$

## 2 主要结果

**引理 1** 设  $M \subseteq X$ , 则存在常数  $\beta \in (0, \infty)$  和单调增的凹函数  $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , 其中,  $\phi(0) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \phi(t) = 0$ , 使得

$$\beta D_\xi(x, x^+) \leq P(x) - P(x^+) + \\ \phi(\|K(x) - K(x^+)\|^p). \quad (9)$$

**证明** 由内积性质:

$$\langle \xi, x^+ - x \rangle = \langle K'[x^+]^* \eta, x^+ - x \rangle \leq \\ \|\eta\| \|K'[x^+](x - x^+)\|,$$

在上式两边同时加上  $P(x) - P(x^+)$ , 得:

$$D_\xi(x, x^+) \leq P(x) - P(x^+) + \\ \|\eta\| \|K'[x^+](x - x^+)\|. \quad (10)$$

由于  $K$  的非线性, 有:

$$\|K(x) - K(x^+) - K'[x^+](x - x^+)\| \leq \\ \sigma D_\xi(x, x^+), \sigma > 0,$$

则由三角不等式可知:

$$\|K'[x^+](x - x^+)\| \leq \sigma D_\xi(x, x^+) + \\ \|K(x) - K(x^+)\|. \quad (11)$$

由(10)和(11)式可得:

$$(1 - \sigma) D_\xi(x, x^+) \leq P(x) - P(x^+) + \\ \|K(x) - K(x^+)\| + (\|\eta\| - 1) \|K'[x^+](x - x^+)\|.$$

又

$$\|K'[x^+](x - x^+)\| \leq c_0 \|K(x) - K(x^+)\|^p,$$

所以

$$(1 - \sigma) D_\xi(x, x^+) \leq P(x) - P(x^+) +$$

$$c_0 \|\eta\| \|K(x) - K(x^+)\|^p.$$

令  $0 < \beta = 1 - \sigma < 1$ ,  $\phi(t) = ct$ ,  $c = c_0 \|\eta\|$ ,  $c > 0$ ,  $t > 0$ , 则

$$\beta D_\xi(x, x^+) \leq P(x) - P(x^+) +$$

$$\phi(\|K(x) - K(x^+)\|^p).$$

证毕.

如果  $x^+$  满足(9)式, 则称  $x^+$  满足变分不等式, 变分不等式保证了算子  $K$  的非线性<sup>[10]</sup>.

**引理 2**  $P : D(K) \subseteq X \rightarrow Y$  为非负稳定凸泛函,  $K, K_\delta$  满足(7), (8)式, 则

$$P(x_\alpha^\delta) - P(x^+) \leq \frac{1}{\alpha} (\delta_y + \delta_K)^p -$$

$$\frac{1}{\alpha} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p.$$

**证明** 由  $x_\alpha^\delta$  的极小性可知

$$P(x_\alpha^\delta) - P(x^+) = \frac{1}{\alpha} (\|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p + \alpha P(x_\alpha^\delta)) -$$

$$P(x^+) - \frac{1}{\alpha} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p \leq$$

$$\frac{1}{\alpha} \|K_\delta(x^+) - y^\delta\|^p - \frac{1}{\alpha} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p \leq$$

$$\frac{1}{\alpha} \|K_\delta(x^+) - K(x^+) + K(x^+) - y^\delta\|^p -$$

$$\frac{1}{\alpha} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p \leq$$

$$\frac{1}{\alpha} (\delta_y + \delta_K)^p - \frac{1}{\alpha} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p.$$

**定理 1** 设  $X, Y$  是 Banach 空间,  $x^+$  满足变分不等式, 即(9)式成立, 则存在  $\alpha > 0$ ,  $\delta_y \geq 0$ ,  $\delta_K \geq 0$ , 使得  $x_\alpha^\delta \in M \subseteq X$  有

$$D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+) \leq \frac{1}{\beta} \phi(m(\delta_y + \delta_K)^p),$$

也就是说, 当  $\delta_y + \delta_K \rightarrow 0$  时, 收敛率为  $D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+) = o(\phi(m(\delta_y + \delta_K)^p))$ .

证明 由三角不等式及  $(a+b)^p \leq \max\{1, 2^{p-1}\}(a^p + b^p)$ , 有

$$\begin{aligned} \|K(x_\alpha^\delta) - K(x^+)\|^p &\leq 2^{p-1} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - K_\delta(x^+)\|^p + \\ &2^{p-1} \|K(x_\alpha^\delta) - K_\delta(x_\alpha^\delta) + K_\delta(x^+) - K(x^+)\|^p \leq \\ &4^{p-1} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p + 4^{p-1} \|K_\delta(x^+) - y^\delta\|^p + \\ &4^{p-1} \|K(x_\alpha^\delta) - K_\delta(x_\alpha^\delta)\|^p + 4^{p-1} \|K_\delta(x^+) - \\ &K(x^+)\|^p \leq 4^{p-1} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p + \\ &4^{p-1} \|K_\delta(x^+) - y^\delta\|^p + 2^{2p-1} (\delta_K)^p. \end{aligned}$$

由引理 2 及变分不等式(9)可知

$$\begin{aligned} \beta D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+) &\leq \frac{1}{\alpha} (\delta_y + \delta_K)^p - \frac{1}{\alpha} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p + \\ &\phi(4^{p-1} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p + \\ &4^{p-1} \|K_\delta(x^+) - y^\delta\|^p + 2^{2p-1} (\delta_K)^p). \end{aligned}$$

选取正则化参数  $\alpha(\delta) = \delta_y + \delta_K$ , 根据偏差原理<sup>[11]</sup>有

$$\alpha(\delta) \leq \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\| \leq c\alpha(\delta), \quad c > 1. \quad (12)$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} (\delta_y + \delta_K)^p - \frac{1}{\alpha} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p &\leq 0, \\ \phi(4^{p-1} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p + 4^{p-1} \|K_\delta(x^+) - y^\delta\|^p + \\ &2^{2p-1} (\delta_K)^p) \leq \phi(4^{p-1} (c+1) (\delta_y + \delta_K)^p + \\ &2^{2p-1} (\delta_K)^p). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \beta D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+) &\leq \phi(4^{p-1} (c+1) (\delta_y + \delta_K)^p + \\ &2^{2p-1} (\delta_K)^p). \end{aligned}$$

令  $m = \max\{4^{p-1} (c+1), 2^{2p-1}\}$ , 即有

$$D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+) \leq \frac{1}{\beta} (\phi(m(\delta_y + \delta_K)^p)),$$

也就是说, 当  $\delta_y + \delta_K \rightarrow 0$  时, 收敛率为  $D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+) = o(\phi(m(\delta_y + \delta_K)^p))$ .

定理 2 设  $X, Y$  是 Hilbert 空间,  $K, K_\delta$  满足(7), (8)式, 若:

(1)  $D(K) \cap D(K_\delta)$  是凸域,  $F$  是 Fréchet 可微的, 则存在常数  $L > 0$ , 使得

$$\begin{aligned} \|K'[x_1] - K'[x_2]\| &\leq L \|x_1 - x_2\|, \\ \forall x_1, x_2 &\in D(K) \cap D(K_\delta); \end{aligned}$$

(2)  $\exists v \in Y$ , 使得源条件  $x^+ - x_0 = K'[x^+]*v$ ,

$L\|v\| \leq 1$  成立, 则

$$\|x_\alpha^\delta - x^+\| \leq \sqrt{\frac{2}{1-L\|v\|}} (1+\|v\|)(\delta_y + \delta_K)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\| \leq ((1+\sqrt{2})\|v\| + \sqrt{2})(\delta_y + \delta_K).$$

证明 由  $K$  的 Fréchet 可微性及 Lipschitz 连续性, 得:

$$K(x_\alpha^\delta) = K(x^+) + K'[x^+](x_\alpha^\delta - x^+) + r_\alpha^\delta,$$

$$r_\alpha^\delta \leq \frac{L}{2} \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2.$$

由  $x_\alpha^\delta$  的极小性, 得:

$$\begin{aligned} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \alpha \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2 &\leq \|K_\delta(x^+) - y^\delta\|^2 + \\ &2\alpha \langle x^+ - x_0, x^+ - x_\alpha^\delta \rangle, \end{aligned}$$

其右端第一项估计为:

$$\begin{aligned} \|K_\delta(x^+) - y^\delta\|^2 &\leq 2(\|K_\delta(x^+) - K(x^+)\|^2 + \\ &\|K(x^+) - y^\delta\|^2) \leq 2(\delta_y^2 + \delta_K^2), \end{aligned}$$

第二项估计为:

$$\begin{aligned} 2\alpha \langle x^+ - x_0, x^+ - x_\alpha^\delta \rangle &= 2\alpha \langle K'[x^+]*v, x^+ - x_\alpha^\delta \rangle = \\ &2\alpha \langle v, K'[x^+](x^+ - x_\alpha^\delta) \rangle \leq \\ &2\alpha \left\langle v, K(x^+) - K(x_\alpha^\delta) + \frac{L}{2} \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2 \right\rangle \leq \\ &2\alpha \|v\| \|K(x^+) - K(x_\alpha^\delta)\| + \\ &\alpha L \|v\| \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2 \leq 2\alpha \|v\| (\delta_y + \delta_K) + \\ &2\alpha \|v\| \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\| + \alpha L \|v\| \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 + \alpha \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2 &\leq 2(\delta_y^2 + \delta_K^2) + \\ &2\alpha \|v\| (\delta_y + \delta_K) + 2\alpha \|v\| \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\| + \\ &\alpha L \|v\| \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^2 - 2\alpha \|v\| \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\| + \\ \alpha(1-L\|v\|) \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2 &\leq 2(\delta_y^2 + \delta_K^2) + \\ &2\alpha \|v\| (\delta_y + \delta_K), \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} (\|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\| - \alpha \|v\|)^2 + \\ \alpha(1-L\|v\|) \|x_\alpha^\delta - x^+\|^2 &\leq 2(\delta_y + \frac{\alpha\|v\|}{2})^2 + \end{aligned}$$

$$2(\delta_K + \frac{\alpha\|v\|}{2})^2.$$

当正则参数  $\alpha = (\delta_y + \delta_K)$  时, 有:

$$\|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\| \leq ((1 + \sqrt{2})\|v\| + \sqrt{2})(\delta_y + \delta_K),$$

$$\|x_\alpha^\delta - x^+\| \leq \sqrt{\frac{2}{1-L\|v\|}}(1 + \|v\|)(\delta_y + \delta_K)^{\frac{1}{2}}.$$

**定理 3** 设  $X, Y$  为 Banach 空间,  $K, K_\delta$  满足(7), (8)式, 以及  $\|K_\delta(x_\alpha^\delta) - K_\delta(x^+) - K'_\delta[x^+](x_\alpha^\delta - x^+)\| \leq rD_\xi(x_\alpha^\delta, x^+)$ , 并存在  $\eta \in Y^*$  且  $r\|\eta\| < 1$  使得源条件  $\xi = K'[X^+]^* \eta$  成立, 有

$$D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+) \leq$$

$$\frac{2}{1-r\|\eta\|}(\|\eta\|(c+1)(\delta_y + \delta_K) + c\delta_{K'}^{\frac{q}{q-1}}).$$

**证明** 由内积的性质知:

$$\begin{aligned} -\langle \xi, x_\alpha^\delta - x^+ \rangle &\leq \|\eta\| \|K'[x^+](x_\alpha^\delta - x^+)\| \leq \\ &\|\eta\| \|K'[x^+] - K'_\delta[x^+](x_\alpha^\delta - x^+)\| + \\ &\|\eta\| \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - K_\delta(x^+)\| + \\ &\|\eta\| \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - K_\delta(x^+) - K'_\delta[x^+](x_\alpha^\delta - x^+)\| \leq \\ &\delta_{K'} \|\eta\| \|x_\alpha^\delta - x^+\| + \|\eta\| \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - K_\delta(x^+)\| + \\ &r\|\eta\| D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+). \end{aligned}$$

由 Young 不等式  $ab \leq \frac{1}{q}a^q + \frac{q-1}{q}b^{\frac{q}{q-1}}$ , 令

$$a = (\frac{q}{2}(1-r\|\eta\|)D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+))^{\frac{1}{q}},$$

$$b = \frac{c_q^{1/q} \|\eta\| \delta_{K'}}{(\frac{2}{q}(1-r\|\eta\|))^{\frac{1}{q}}}.$$

故

$$\begin{aligned} \delta_{K'} \|\eta\| \|x_\alpha^\delta - x^+\| &\leq \delta_{K'} \|\eta\| c_q^{\frac{1}{q}} D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+)^{\frac{1}{q}} \leq \\ &\frac{1-r\|\eta\|}{2} D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+) + \frac{(q-1)c_q^{\frac{q}{q-1}} \|\eta\|^{\frac{q}{q-1}} \delta_{K'}^{\frac{q}{q-1}}}{q^{\frac{q}{q-1}} (\frac{1}{2}(1-r\|\eta\|))^{\frac{1}{q-1}}}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} -\langle \xi, x_\alpha^\delta - x^+ \rangle &\leq \frac{1+r\|\eta\|}{2} D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+) + c\delta_{K'}^{\frac{q}{q-1}} + \\ &\|\eta\| \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - K_\delta(x^+)\|, \end{aligned}$$

其中

$$c = \frac{(q-1)c_q^{\frac{1}{q-1}} \|\eta\|^{\frac{1}{q-1}}}{q^{\frac{q}{q-1}} (\frac{1}{2}(1-r\|\eta\|))^{\frac{1}{q-1}}}.$$

又由引理 2 和三角不等式可得

$$\begin{aligned} \frac{1-r\|\eta\|}{2} D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+) &\leq \\ &\frac{1}{\alpha} ((\delta_y + \delta_K)^p - \|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\|^p) + \end{aligned}$$

$$\|\eta\| (\|K_\delta(x_\alpha^\delta) - y^\delta\| + \|K_\delta(x^+) - y^\delta\|) + c\delta_{K'}^{\frac{q}{q-1}}.$$

同理, 由偏差原理选取正则参数  $\alpha(\delta) = \delta_y + \delta_K$ , 根据(12)式可得

$$\frac{1-r\|\eta\|}{2} D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+) \leq \|\eta\| (c+1)(\delta_y + \delta_K) + c\delta_{K'}^{\frac{q}{q-1}},$$

即收敛率为

$$D_\xi(x_\alpha^\delta, x^+) = o(\delta_y + \delta_K + \delta_{K'}^{\frac{q}{q-1}}),$$

$$\delta_y + \delta_K + \delta_{K'}^{\frac{q}{q-1}} \rightarrow 0.$$

### 3 结语

本文主要研究了非线性不适定方程中当右端数据和算子均被破坏时, 利用 Tikhonov 正则化方法对其进行收敛性分析. 在不同的非线性条件和源条件下得到了噪声算子在 Hilbert 空间和 Banach 空间中的正则化解收敛到精确解的收敛率.

### 参考文献:

- [1] Hein T. Tikhonov regularization in Banach spaces-improved convergence rates results[EB/OL]. [2016-05-21]. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0266-5611/25/3/035002/meta>.
- [2] Hein T. Convergence rates for regularization of ill-posed problems in Banach spaces by approximate source conditions[EB/OL]. [2016-07-10]. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0266-5611/24/4/045007/meta>.
- [3] Hein T, Hofmann B. Approximate source conditions for nonlinear ill-posed problems—chances and limitations[J]. Inverse Problems, 2009, 25(3):35003-35016.
- [4] Hofmann B, Kaltenbacher B, Pöschl C, et al. A convergence rates result for Tikhonov regularization in Banach spaces with non-smooth operators[J]. Inverse Problems, 2007, 23(3):987-1010.
- [5] Hofmann B, Mathé P, Cker H. Regularization in Hilbert

- space under unbounded operators and general source conditions[J]. *Inverse Problems*, 2009, 25(11):115013-115015.
- [6] Lu S, Pereverzev S V, Shao Y, et al. On the generalized discrepancy principle for Tikhonov regularization in Hilbert scales[J]. *Journal of Integral Equations & Applications*, 2012, 22(2010):483-517.
- [7] Jin Q, Amato U. A discrete scheme of Landweber iteration for solving nonlinear ill-posed problems[J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2001, 253(1):187-203.
- [8] Neubauer A, Scherzer O. Finite-dimensional approximation of Tikhonov regularized solutions of non-linear ill-posed problems[J]. *Numerical Functional Analysis Optimization*, 1990, 11(1/2):85-99.
- [9] Stück R, Burger M, Hohage T. The iteratively regularized Gauss-Newton method with convex constraints and applications in 4Pi microscopy[J]. *Inverse Problems*, 2011, 28(1):15012-15027.
- [10] Flemming J. Generalized Tikhonov regularization: Basic theory and comprehensive results on convergence rates [D]. Chemnitz: Technische Universität Chemnitz, 2011: 109-140.
- [11] Anzengruber S W, Hofmann B, Mathé P. Regularization properties of the sequential discrepancy principle for Tikhonov regularization in Banach spaces[J]. *Applicable Analysis*, 2014, 93(7):1382-1400.

## Convergence analysis based on Tikhonov regularization for nonlinear ill-posed problems

YUAN Qiong-lin, WANG Jin-ping\*

( Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China )

**Abstract:** In this paper, we study the convergence rates of Tikhonov regularization method for solving nonlinear ill-posed problems. Opposed to the previous research, we investigate convergence rates using the Tikhonov regularization method when both the right-hand side and the operator are given approximately with errors. We derive the convergence rates in Banach spaces or Hilbert spaces by taking full advantage of the interplay of the solution smoothness and the nonlinearity structure.

**Key words:** variational inequality; convergence rates; Tikhonov regularization; source conditions

(责任编辑 韩 超)