

双分数跳-扩散 Ornstein-Uhlenback 过程下可转换债券定价

贾红霞, 薛红*

(西安工程大学 理学院, 陕西 西安 710048)

摘要: 随着金融衍生品的发展, 出现了高级金融衍生品, 可转换债券就是其中之一. 双分数布朗运动是更一般的高斯过程, 能描述更多的随机现象; 而 Ornstein-Uhlenback 过程是一类重要的移动平均过程. 本文考虑突发事件的影响, 假定股票预期收益率和股价波动率都为常数, 构建双分数跳-扩散 Ornstein-Uhlenback 过程下的模型, 应用保险精算方法, 获得可转换债券的定价公式.

关键词: 双分数布朗运动; 可转换债券; Ornstein-Uhlenback 过程; 跳-扩散过程; 保险精算

中图分类号: F830; O211

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2018) 05-0077-04

可转换债券起源于金融市场发达的西方国家, 是可以在一定时间按一定条件转换为普通股票的一种特殊企业债券, 同时具有债权和期权的特征. 近些年来, 随着金融市场等的发展, 可转换债券逐渐成为我国证券市场以及中国企业海外融资的重要金融产品, 对其合理定价也是热点研究课题, 已产生众多相关的金融市场模型以及求解方法. 在布朗运动以及分数布朗运动下, 基于偏微分方程或鞅方法的定价研究比较常见: 于萍^[1]在可转债定价中引用鞅理论, 采用鞅方法对可转债定价模型进行了分析; 潘坚等^[2]在几何布朗运动下, 考虑随机违约以及利率双重风险, 采用偏微分方程的方法进行定价, 且探析了模型中主要参数与价格的关系; Bladt 等^[3]第一次在期权定价中提出了保险精算方法, 并将定价问题转化为等价的公平保费确定问题, 更具有有一般性, 不再要求市场必须无套利、均衡、完备, 应用更广泛. 而有实证研究探析发现, 股价收益率存在非平稳性, 以及金融资产价格具备非周期性、长期记忆性等, 明显简单地利用分数布朗运动或者布朗运动的随机分析理论解决期权定价问题是不够合理的. 2006 年, Russo 等^[4]提出双分数布朗运动理论且给出了双分数布朗运动环境下的 Itô 公式, 在双分数布朗运动下, 没办法用鞅方法对期权进行定价, 适合用保险精算方法,

薛红等^[5]假定股票价格遵循双分数布朗运动, 考虑红利率, 建立了相关的金融模型, 运用其随机分析理论对所建模型求解, 并应用保险精算方法, 得到了可转换债券定价公式. 在实际金融市场中, 突发事件是无法避免的, 股票价格也可能会出现跳跃的情形, 需要用跳-扩散过程来描述, 关于跳-扩散过程下的期权定价可参考文献[6-7]. 随着期权定价的深入研究, 股票价格遵循 Ornstein-Uhlenback 过程也被逐渐引入金融市场模型, 其具有高度的灵活性和合理性, 当股票价格持续上升时, Ornstein-Uhlenback 过程能够减弱其上升趋势, 保证价格在范围内, Ornstein-Uhlenback 过程下的期权定价可参考文献[8-9].

本文在现有的研究基础上, 将金融数学模型推广到双分数 Ornstein-Uhlenback 过程, 在模型上予以创新, 使模型更加符合实际市场, 利用保险精算方法贴现, 对可转换债券定价进行研究.

1 双分数 Ornstein-Uhlenback 过程下数学模型

定义 1^[3] 中心高斯过程 $\{B_t^{H,K}, t \geq 0\}$, $0 < H < 1$, $0 < K \leq 1$ 被称为双分数布朗运动, 且满足均值为 0, 协方差为:

$$E[B_t^H B_s^H] = ((t^{2H} + s^{2H})^K - |t - s|^{2HK}) / 2^K, \\ s, t \geq 0.$$

收稿日期: 2018-01-12.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11601410); 陕西省自然科学基金基础研究计划(2016JM1031).

第一作者: 贾红霞(1994-), 女, 陕西汉中, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 随机分析与金融研究. E-mail: 1217095979@qq.com

*通信作者: 薛红(1964-), 男, 山西万荣人, 教授, 主要研究方向: 随机分析与金融研究. E-mail: xuehonghong@sohu.com

当 $K=1$ 时, $\{B_t^{H,K}, t \geq 0\}$ 退化为分数布朗运动, 参数为 H ; 特别地, 当 $K=1, H=1/2$ 时, $\{B_t^{H,K}, t \geq 0\}$ 退化为标准布朗运动.

假定股票价格 S_t , 满足随机微分方程

$$dS_t = S_t((\mu - \lambda\theta - \alpha \ln S_t)dt + \sigma dB_u^{H,K} + dJ_t), \quad (1)$$

式中: $\mu > 0$ 为股票预期收益率; $\sigma > 0$ 为股票价格波动率; $\{B_t^{H,K}, t \geq 0\}$ 为概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上参数为 H, K 的双分数布朗运动; $\alpha > 0$ 的作用在于当股票价格上升到一定高度后, 它使 S_t 有下降的趋势, 能够回到长期的均衡水平; $J_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$ 为一个复合 Poisson 过程, $\{N_t, t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的 Poisson 过程, N_t 为 $[0, t]$ 时间内股票价格发生跳跃的次数, U_i 为第 i 次跳跃的相对幅度, $\{U_i, i \geq 1\}$ 为独立同分布列且 $U_i > -1$, $\ln(1+U_i) \sim N(\ln(1+\theta) - \sigma_j^2/2, \sigma_j^2)$, θ 为 U_i 无条件数学期望, $\sigma_j > 0$ 为常数. 假定 $\{B_t^{H,K}, t \geq 0\}$, $\{N_t, t \geq 0\}$ 相互独立.

定理 1 随机微分方程(1)的解为

$$S_t = S_0 e^{-\alpha t} \exp\left\{e^{-\alpha t} \left(\int_0^t (\mu - \lambda\theta - HK\sigma^2 u^{2HK-1}) e^{\alpha u} du + \int_0^t \sigma e^{\alpha u} dB_u^{H,K} + \sum_{i=1}^{N_t} \ln(1+U_i)\right)\right\}. \quad (2)$$

证明 令 $G(t, S_t) = e^{\alpha t} \ln S_t$, 当在 $[0, t]$ 内没有发生跳跃, 由双分数 $I\hat{o}\hat{\sigma}$ [10] 公式可得

$$\begin{aligned} d(e^{\alpha t} \ln S_t) &= \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{\partial G}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} d[S_t, S_t] = \\ &= (\alpha e^{\alpha t} \ln S_t - \sigma^2 HK t^{2HK-1}) dt + e^{\alpha t} ((\mu - \lambda\theta - \alpha \ln S_t) dt + \sigma dB_t^{H,K}) = (\mu - \lambda\theta - \sigma^2 HK t^{2HK-1}) e^{\alpha t} dt + \sigma e^{\alpha t} dB_t^{H,K}, \end{aligned}$$

从而有

$$S_t = S_0 e^{-\alpha t} \exp\left\{e^{-\alpha t} \left(\int_0^t (\mu - \lambda\theta - \sigma^2 HK u^{2HK-1}) e^{\alpha u} du + \int_0^t \sigma e^{\alpha u} dB_u^{H,K}\right)\right\}.$$

假定在 $t_1 \in [0, t]$ 时刻发生了一次跳跃, 则在时间段 $[0, t_1]$ 内有

$$S_{t_1} = S_0 e^{-\alpha t_1} \exp\left\{e^{-\alpha t_1} \left(\int_0^{t_1} (\mu - \lambda\theta - \sigma^2 HK u^{2HK-1}) e^{\alpha u} du + \int_0^{t_1} \sigma e^{\alpha u} dB_u^{H,K}\right)\right\},$$

在 $[t_1, t]$ 时间段有

$$S_t = S_0 e^{-\alpha(t-t_1)} \exp\left\{e^{-\alpha(t-t_1)} \left(\int_{t_1}^t (\mu - \lambda\theta - \sigma^2 HK u^{2HK-1}) e^{\alpha u} du + \int_{t_1}^t \sigma e^{\alpha u} dB_u^{H,K}\right)\right\},$$

由(1)式得

$$S_{t_1} - S_{t_1-1/n} = (\mu - \lambda\theta - \alpha \ln S_{t_1}) \int_{t_1-1/n}^{t_1} S_u^- du + \sigma \int_{t_1-1/n}^{t_1} S_u^- dB_u^{H,K} + \int_{t_1-1/n}^{t_1} U_i S_u^- dN_u,$$

当 $n \rightarrow +\infty$, 可得 $S_{t_1} - S_{t_1-} = S_{t_1-} - U_{t_1}$, 即

$$S_{t_1} = S_{t_1-}(1+U_{t_1}) = S_0 e^{-\alpha t_1} \exp\left\{e^{-\alpha t_1} \left(\int_0^{t_1} (\mu - \lambda\theta - HK\sigma^2 u^{2HK-1}) e^{\alpha u} du + \int_0^{t_1} \sigma e^{\alpha u} dB_u^{H,K} + \ln(1+U_{t_1})\right)\right\}.$$

当跳跃次数服从 Poisson 过程时有

$$S_t = S_0 e^{-\alpha t} \exp\left\{e^{-\alpha t} \left(\int_0^t (\mu - \lambda\theta - HK\sigma^2 u^{2HK-1}) e^{\alpha u} du + \int_0^t \sigma e^{\alpha u} dB_u^{H,K} + \sum_{i=1}^{N_t} \ln(1+U_i)\right)\right\}.$$

定理得证.

定义 2 [3] 股票价格过程 $\{S_t, t \geq 0\}$ 在 $[t, T]$ 上的期望回报率 $\beta_u, u \in [t, T]$ 定义为

$$\exp\left\{\int_t^T \beta_u du\right\} = E[S_T] / S_t. \quad (3)$$

定理 2 在概率测度 P 下, $\{S_t, t \geq 0\}$ 在 $[t, T]$ 上的期望回报率满足

$$\exp\left\{\int_t^T \beta_u du\right\} = S_t e^{-\alpha(T-t)} e^{\lambda\theta(T-t) + A_T + D_T^2/2},$$

其中, $A_T = e^{-\alpha(T-t)} \int_t^T (\mu - \lambda\theta - \sigma^2 HK u^{2HK-1}) e^{\alpha u} du$,

$$D_T^2 = \text{var}(e^{-\alpha(T-t)} \int_t^T \sigma e^{\alpha u} dB_u^{H,K}).$$

证明 由定理 1 可知

$$S_T = S_t e^{-\alpha(T-t)} \exp\left\{e^{-\alpha(T-t)} \left(\int_t^T (\mu - \lambda\theta - \sigma^2 HK u^{2HK-1}) e^{\alpha u} du + \int_t^T \sigma e^{\alpha u} dB_u^{H,K} + \sum_{i=1}^{N_{T-t}} \ln(1+U_i)\right)\right\},$$

由于

$$\begin{aligned} \zeta &\triangleq e^{-\alpha(T-t)} \left(\int_t^T (\mu - \lambda\theta - \sigma^2 HK u^{2HK-1}) e^{\alpha u} du + \int_t^T \sigma e^{\alpha u} dB_u^{H,K}\right) \sim N(A_T, D_T^2), \end{aligned}$$

从而

$$S_T = S_t e^{-\alpha(T-t)} \exp\left\{\zeta + \sum_{i=1}^{N_{T-t}} \ln(1+U_i)\right\},$$

则

$$\begin{aligned} E[S_T] &= S_t e^{-\alpha(T-t)} \exp\{A_T + D_T^2/2 + \lambda\theta(T-t)\}, \\ \exp\left\{\int_t^T \beta(u) du\right\} &= E[S_T] / S_t = S_t e^{-\alpha(T-t)-1} \exp\{A_T + D_T^2/2 + \lambda\theta(T-t)\}. \end{aligned}$$

2 可转换债券定价

定义 3^[4] 假定可转换债券只允许在债券到期时刻 T 发生转换, 则可转换债券到期时的现金流量 V_T 可用公式表示为

$$V_T = \begin{cases} P, & S(T) < PC/M, \\ MS(T)/C, & S(T) \geq PC/M, \end{cases}$$

其中可转换债券在到期时刻 T 的价值为 V_T , 纯债券价值为 P , 转换价格为 C , 债券的面值为 M , T 时刻股票价格为 $S(T)$.

定理 3 双分数跳-扩散 Ornstein-Uhlenback 过程下可转换债券在 t 时刻的保险精算价格为

$$V_t = \sum_{n=0}^{+\infty} ((\lambda(T-t))^n / n!) [P e^{-\int_t^T r(u)du} \Phi(-d) \cdot \frac{MS(t)}{C} (1+\theta)^n e^{-\lambda\theta(T-t)} \Phi(d + \sqrt{D_T^2 + n\sigma_J^2})],$$

其中

$$d = (\ln \frac{MS_t}{PC} + \int_t^T r(u)du - \frac{1}{2} D_T^2 - \lambda\theta(T-t) + n \ln(1+\theta) - \frac{n}{2} \sigma_J^2) / \sqrt{n\sigma_J^2 + D_T^2}.$$

证明 令

$$A = \{S(T) e^{-\int_t^T \beta(u)du} < PC e^{-\int_t^T r(u)du} / M\},$$

$$B = \{S(T) e^{-\int_t^T \beta(u)du} \geq PC e^{-\int_t^T r(u)du} / M\}.$$

可转换债券在 t 时刻的保险精算价格为

$$V = E[P e^{-\int_t^T r(u)du} I_A] + E[\frac{MS(T)}{C} e^{-\int_t^T \beta(u)du} I_B] =$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[\lambda(T-t)]^n}{n!} (V_1 + V_2).$$

由于

$$e^{-\alpha(T-t)} \left(\int_t^T \sigma e^{au} dB_u^{H,K} \right) \sim N(0, D_T^2),$$

$$S_t \exp \left\{ \sigma e^{-\alpha(T-t)} \int_t^T e^{au} dB_u^{H,K} + \sum_{i=0}^{N(T-t)} \ln(1+U_i) - \frac{1}{2} D_T^2 - \lambda\theta(T-t) \right\} \geq \frac{PC}{M} \exp \left\{ -\int_t^T r(u)du \right\},$$

当 $N_{T-t} = n$ 时,

$$e^{-\alpha(T-t)} \left\{ \int_t^T \sigma e^{au} dB_u^{H,K} \right\} + \sum_{i=0}^n \ln(1+U_i) \sim$$

$$N(n \ln(1+\theta) - n\sigma_J^2 / 2, n\sigma_J^2 + D_T^2),$$

$$S_t \exp \left\{ e^{-\alpha(T-t)} \int_t^T \sigma e^{au} dB_u^{H,K} + \sum_{i=0}^n \ln(1+U_i) - \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} D_T^2 - \lambda\theta(T-t) \right\} \geq \frac{PC}{M} \exp \left\{ -\int_t^T r(u)du \right\},$$

取对数有

$$\ln S_t + e^{-\alpha(T-t)} \int_t^T \sigma e^{au} dB_u^{H,K} - \frac{1}{2} D_T^2 - \lambda\theta(T-t) +$$

$$\sum_{i=0}^n \ln(1+U_i) \geq \ln \frac{M}{PC} - \int_t^T r(u)du,$$

移项标准化有

$$\ln \frac{MS_t}{PC} + \int_t^T r(u)du - \frac{1}{2} D_T^2 - \lambda\theta(T-t) +$$

$$n \ln(1+\theta) - \frac{n}{2} \sigma_J^2 \geq -(e^{-\alpha(T-t)} \int_t^T \sigma e^{au} dB_u^{H,K} +$$

$$\sum_{i=0}^n \ln(1+U_i) - n \ln(1+\theta) + \frac{n}{2} \sigma_J^2),$$

$$(\ln \frac{MS_t}{PC} + \int_t^T r(u)du - \frac{1}{2} D_T^2 - \lambda\theta(T-t) +$$

$$n \ln(1+\theta) - \frac{n}{2} \sigma_J^2) / \sqrt{n\sigma_J^2 + D_T^2} \geq$$

$$-(e^{-\alpha(T-t)} \int_t^T \sigma e^{au} dB_u^{H,K} + \sum_{i=0}^n \ln(1+U_i) -$$

$$n \ln(1+\theta) + \frac{n}{2} \sigma_J^2) / \sqrt{n\sigma_J^2 + D_T^2}.$$

令

$$\xi = (e^{-\alpha(T-t)} \int_t^T \sigma e^{au} dB_u^{H,K} + \sum_{i=0}^n \ln(1+U_i) -$$

$$n \ln(1+\theta) + \frac{n}{2} \sigma_J^2) / \sqrt{n\sigma_J^2 + D_T^2},$$

则

$$A = \{\xi < -d\},$$

同理有

$$B = \{\xi \geq -d\},$$

且当 $N_{T-t} = n$ 时,

$$V_1 = E[P \exp \left\{ -\int_t^T r(u)du \right\} I_A | N_{T-t} = n] =$$

$$E[P \exp \left\{ -\int_t^T r(u)du \right\} I_{\{\xi < -d\}}] =$$

$$P \exp \left\{ -\int_t^T r(u)du \right\} \cdot \Phi(-d),$$

$$V_2 = E[\frac{MS(T)}{C} \exp \left\{ -\int_t^T \beta(u)du \right\} I_B | N_{T-t} = n] =$$

$$E[(\frac{MS_t}{C} \exp \{ e^{-\alpha(T-t)} \int_t^T \sigma e^{au} dB_u^{H,K} - \frac{1}{2} D_T^2 +$$

$$\sum_{i=0}^n \ln(1+U_i) - \lambda\theta(T-t) \}) I_{\{\xi \geq -d\}}] = \frac{MS(t)}{C} \cdot$$

$$(1+\theta)^n \exp \{-\lambda\theta(T-t)\}.$$

$$\begin{aligned}
& E[\exp\{\xi\sqrt{n\sigma_J^2 + D_T^2} - \frac{1}{2}D_T^2 - \frac{n}{2}\sigma_J^2\}I_{\{\xi \geq -d\}}] = \\
& \frac{MS(t)}{C}(1+\theta)^n \exp\{-\lambda\theta(T-t)\} \int_{-d}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \\
& \exp\{-\frac{1}{2}(x - \sqrt{n\sigma_J^2 + D_T^2})^2\} dx = \frac{MS(t)}{C} \cdot \\
& (1+\theta)^n \exp\{-\lambda\theta(T-t)\} \int_{-d-\sqrt{n\sigma_J^2 + D_T^2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \\
& \exp\{-\frac{1}{2}y^2\} dy = \frac{MS(t)}{C}(1+\theta)^n \cdot \\
& \exp\{-\lambda\theta(T-t)\} \Phi(d + \sqrt{n\sigma_J^2 + D_T^2}).
\end{aligned}$$

定理得证.

注 当 $\alpha = 0$, $\lambda = 0$ 时, $D_{t,T}^2 = \text{var}(e^{-\alpha(T-t)})$.

$\int_t^T \sigma e^{\alpha u} dB_u^{H,K} = \sigma^2(T^{2HK} - t^{2HK})$ 显而易见为双分数布朗运动下可转换债券的定价公式(详见文献[11]).

3 结论

本文在双分数跳-扩散 Ornstein-Uhlenback 过程下采用保险精算方法得到了可转换债券的定价公式, 将双分数布朗运动的增量非平稳性等特性应用于股价收益率非平稳, 而市场的完备性、均衡性也是未知的情况中, 保险精算方法对这样的市场同样适用, 且更具合理性.

参考文献:

[1] 于萍. 鞅分析在可转换债券定价中的应用[D]. 哈尔滨:

哈尔滨理工大学, 2008.

- [2] 潘坚, 肖庆宪. 基于随机违约和利率双重风险的可转换债券的定价[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2017, 42(7):138-143.
- [3] Bladt M, Rydberg T H. An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions[J]. Insurance Mathematics and Economics, 1998, 22(1):65-73.
- [4] Russo F, Tudor C. On the bifractional Brownian motion[J]. Stochastic Processes and their Applications, 2006, 116(5):830-856.
- [5] 薛红, 金宇寰. 随机利率下具有红利支付的可转换债券定价[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版), 2016, 36(3):369-371.
- [6] 李丹, 薛红. 双分数跳-扩散过程下最值期权的定价[J]. 吉林大学学报(理学版), 2016, 54(5):1001-1003.
- [7] 薛红, 王银利. 双分数跳-扩散过程下后定选择权定价[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2017, 40(1):51-56.
- [8] 闫海峰, 刘三阳. 股票价格遵循 Ornstein-Uhlenback 过程的期权定价[J]. 系统工程学报, 2003, 18(6):547-551.
- [9] 刘坚, 邓国和, 杨向群. 利率和股票价格遵循 O-U 过程的再装期权定价[J]. 工程数学学报, 2007, 24(2):237-239.
- [10] Essebaï K, Tudor C. Multidimensional bifractional Brownian motion: Ito and Tanaka formulas[J]. Stochastics and Dynamics, 2007, 7(3):365-388.
- [11] 金宇寰. 双分数布朗运动下可转换债券定价模型[D]. 西安: 西安工程大学, 2016.

Convertible bond pricing model in bi-fractional jump-diffusion Ornstein-Uhlenback process

JIA Hong-xia, XUE Hong*

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract: With the on-going development of financial derivatives, convertible bond is one of the emergence of advanced financial derivatives. The binary fractional Brownian motion is a more general Gaussian process, which can describe more random phenomena. The Ornstein-Uhlenback process is an important type of moving average process and is applied in this study. Considering the impact of emergencies, the authors assume that both the stock return and the volatility of the stock price are constant. The model under the bi-fraction jump-diffusion Ornstein-Uhlenback process is established, and the actuarial method is used to obtain the pricing formula of convertible bonds.

Key words: bi-fractional Brownian motion; convertible bonds; Ornstein-Uhlenback process; jump-diffusion process; actuarial mathematics

(责任编辑 韩 超)