

双值噪声扰动下分数阶串联电路的随机共振现象

韩引霞

(宁波大学 科学技术学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 本文研究由被双态噪声调制的电阻、被双态噪声调制的周期输入信号以及通过分数阶微分方程描述的容阻器串联组成的简单电路的随机共振特性. 首先, 利用整数阶微分方程 Shapiro-Loginov 公式以及广义分数阶微分方程 Shapiro-Loginov 公式, 得到一组封闭的方程组; 其次, 对封闭方程组利用 Laplace 变换、逆 Laplace 变换, 推导出用分数阶微分方程描述的系统一阶矩以及稳态时响应振幅的详细表达式; 再次, 通过 Matlab 模拟, 根据稳态时响应振幅的表达式, 画出稳态时振幅随系统阶数、周期信号频率、双态噪声强度、双态噪声关联时间的变化图. 从图中发现系统表现出 2 种不同的随机共振现象——Bona fide 随机共振现象以及广义的随机共振现象.

关键词: 复分数阶容阻器; 对称性的双态噪声; Shapiro-Loginov 公式; 随机共振

中图分类号: O211.64

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2018) 05-0081-05

噪声通常对系统起着破坏作用. 然而, 人们在研究非线性系统时发现, 适量的噪声输入系统时, 系统会表现出一些新奇的特性. 随着研究的深入, 发现不只非线性系统, 线性系统在有适当的噪声添加时, 也会表现出新的现象, 随机共振现象就是其中之一. 随机共振现象首次被 Benzi 等^[1]在研究周期性冰川气候问题时发现. 随后, Fauve 等^[2]就在施密特触发器脉冲电路中首次验证了随机共振现象. 此后, 学者们在物理、化学、生物、电子、通信等等不同的领域内都发现了随机共振现象.

最初通过信噪比变化来观察系统是否存在随机共振现象, 现在随机共振现象的定义有了延伸. 只要随着噪声强度、噪声关联时间、输入信号频率的变化, 信噪比、系统一阶矩、输出信号振幅呈现非单调性的变化, 就说明系统表现出了随机共振现象. Harmer 等^[3]研究了在高斯白噪声调制下几种典型双稳态电路中的随机共振现象. 韩引霞等^[4-5]研究了三值噪声和高斯白噪声驱动下 RC 串联电路的随机共振现象和三值噪声驱动下 RLC 串联电路的随机共振现象. Bologna 等^[6]研究了电阻以非泊松双态噪声形式涨落时电路中的随机共振现象, 以及电容以非泊松双态噪声形式涨落时电路中的

随机共振现象. 而更复杂的电路系统中的随机共振现象已经在实验中被发现^[7-8]. 其他研究噪声作用的电子电路中的随机共振现象也被观察到^[9-12].

上述研究都是理想电路中的随机共振现象. 而近几十年, 人们发现许多实际的物理过程、化学反应过程、布朗粒子运动、新型材料、黏性介质等都具有记忆的特征. 整数阶微分方程没有描述此特征的功能, 而分数阶微分方程却能反映具有时间记忆性和空间相关性的系统. 因此, 人们把非理想材料建模为用分数阶微分方程表示的模型^[13-18].

电容器、电感、电阻是电子电路中经常用到的元件. 当周围环境温度发生变化时, 电阻电导率会发生涨落. 而电容器随着使用时间的延长, 其电介质会出现损耗. 因此, 电容器被 Reyes-Melo 等^[19]建模为用分数阶微分式表示的具有不同频率特性的电阻和无损耗的理想电容器的并联分数单元, 称为容阻器. 本文研究由对称性双态噪声调制的电阻和被对称性双态噪声调制振幅的周期信号以及分数阶容阻器串联组成的电路的随机共振行为.

1 含有一个分数阶容阻器的串联电路模型

考虑图 1 中有周期信号输入, 由 1 个电阻和 1

个容阻器串联的简单电路.

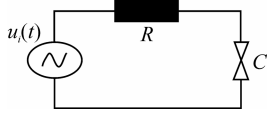


图1 电阻和容阻器的串联电路

根据基尔霍夫电压定律, 该动态电路方程为

$$RI + U_C = A_0 \sin(\omega t), \quad (1)$$

式中: $I = dq/dt$; 根据文献[4]有 $U_C(t) = \frac{\tau^\alpha}{C} \frac{d^\alpha q}{dt^\alpha}$.

随着电流流过电路的时间增长, 电阻的温度升高, 电阻的阻值发生涨落, 输入信号的振幅也发生涨落, 此时被修正过的动态电路方程变为

$$R(1 + \xi(t)) \frac{dq}{dt} + \frac{\tau^\alpha}{C} \frac{d^\alpha q}{dt^\alpha} = A_0(1 + \xi(t)) \sin(\omega t), \quad (2)$$

式中: $\tau = R'C$; $0 \leq \alpha \leq 1$, $\alpha = 0$ 时容阻器为理想电容器, $\alpha = 1$ 时容阻器为理想电阻; $\xi(t) = \{\sigma, -\sigma\}$ 是具有对称性的双态噪声, 且双态之间的转移概率 $P(\sigma) = P(-\sigma) = 1/2$. $\xi(t)$ 的统计特性符合 $\langle \xi(t) \rangle = 0$,

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \sigma^2 \exp(-\nu|t-t'|), \quad (3)$$

式中: σ 为双态噪声强度; ν 为双态噪声关联频率.

2 推导电量的一阶矩

对(2)式进行系综平均, 得到

$$R \frac{d\langle q \rangle}{dt} + R \langle \xi(t) \rangle \frac{dq}{dt} + \frac{\tau^\alpha}{C} \frac{d^\alpha \langle q \rangle}{dt^\alpha} = A_0 \sin(\omega t). \quad (4)$$

在(3)式中, 出现了除 $\langle q \rangle$ 以外的新关联项 $\langle \xi(t) dq/dt \rangle$. 为了分解此关联项, 利用整数阶 Shapiro-Loginov 公式^[20]

$$\langle \xi(t) \frac{dq}{dt} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \xi(t)q \rangle + \nu \langle \xi(t)q \rangle, \quad (5)$$

把(5)式代入(4)式, 得到

$$R \frac{d\langle q \rangle}{dt} + \frac{\tau^\alpha}{C} \frac{d^\alpha \langle q \rangle}{dt^\alpha} + R \frac{d\langle \xi(t)q \rangle}{dt} + R\nu \langle \xi(t)q \rangle = A_0 \sin(\omega t). \quad (6)$$

(6)式中含有 $\langle q \rangle$ 和 $\langle \xi(t)q \rangle$ 两个变量. 用 $\xi(t)$ 乘以(2)式的两边, 并对两边进行系综平均, 同时根据双态噪声的性质 $\xi^2 = \sigma^2$, 得到

$$R \langle \xi(t) \frac{dq}{dt} \rangle + \frac{\tau^\alpha}{C} \langle \xi(t) \frac{d^\alpha q}{dt^\alpha} \rangle + R\sigma^2 \frac{d\langle q \rangle}{dt} =$$

$$A_0 \sigma^2 \sin(\omega t). \quad (7)$$

根据分数阶 Shapiro-Loginov 公式^[21]

$$\langle \xi(t) \frac{d^\alpha q}{dt^\alpha} \rangle = e^{-\nu t} \frac{d^\alpha \langle \xi(t)q \rangle \exp(\nu t)}{dt^\alpha}, \quad (8)$$

把(5)式和(8)式代入(7)式, 得到

$$R\sigma^2 \frac{d\langle q \rangle}{dt} + \frac{\tau^\alpha}{C} e^{-\nu t} \frac{d^\alpha \langle \xi(t)q \rangle \exp(\nu t)}{dt^\alpha} + R \frac{d\langle \xi(t)q \rangle}{dt} + R\nu \langle \xi(t)q \rangle = A_0 \sigma^2 \sin(\omega t). \quad (9)$$

(6)式, (9)式中形成了关于变量 $\langle q \rangle$, $\langle \xi(t)q \rangle$ 的 2 个封闭方程组. 令 $\langle q \rangle = x_1$, $\langle \xi(t)q \rangle = x_2$, 同时对(6)式和(9)式进行 Laplace 变换^[22-25], 得到

$$\begin{cases} b_{11}X_1(s) + b_{12}X_2(s) = A_0\omega / (s^2 + \omega^2) + b_{13}x_1(0) + b_{14}x_2(0), \\ b_{21}X_1(s) + b_{22}X_2(s) = A_0\sigma^2\omega / (s^2 + \omega^2) + b_{23}x_1(0) + b_{24}x_2(0), \end{cases} \quad (10)$$

式中, $x_1(0), x_2(0)$ 为方程组初始条件. 且 $b_{11} = Rs + \tau^\alpha s^\alpha / C$, $b_{12} = R(s + \nu)$, $b_{13} = R + \tau^\alpha s^{\alpha-1} / C$, $b_{14} = R$, $b_{21} = R\sigma^2 s$, $b_{22} = R(s + \nu) + \tau^\alpha (s + \nu)^\alpha / C$, $b_{23} = R\sigma^2$, $b_{24} = R + \tau^\alpha (s + \nu)^{\alpha-1} / C$. 由(10)式得

$$X_1(s) = \frac{(b_{22} - b_{12}\sigma^2)}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \frac{A_0\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{b_{22}b_{13} - b_{12}b_{23}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} x_1(0) + \frac{b_{22}b_{14} - b_{12}b_{24}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} x_2(0), \quad (11a)$$

$$X_2(s) = \frac{(b_{11}\sigma^2 - b_{21})}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \frac{A_0\omega}{s^2 + \omega^2} + \frac{b_{21}b_{13} - b_{11}b_{23}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} x_1(0) + \frac{b_{21}b_{14} - b_{11}b_{24}}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} x_2(0). \quad (11b)$$

当系统经历很长时间的演化后, 系统对初始条件的依赖性逐渐消失. 此时, 系统就步入了稳态. 系统处于稳态时响应的均值为

$$X_1(s)_{\text{稳态}} = \frac{(b_{22} - b_{12}\sigma^2)}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \frac{A_0\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad (12a)$$

$$X_2(s)_{\text{稳态}} = \frac{(b_{11}\sigma^2 - b_{21})}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \frac{A_0\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (12b)$$

对(12)式进行逆 Laplace 变换^[22-25], 并利用 Laplace 变换的性质, 得到

$$x_1(t)_{\text{稳态}} = L^{-1} \left[\frac{(b_{22} - b_{12}\sigma^2)}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \right] \cdot A_0 \sin(\omega t) = A_0 \int h_1(t-t') \sin(\omega t') dt', \quad (13a)$$

$$x_2(t)_{\text{稳态}} = L^{-1} \left[\frac{(b_{11}\sigma^2 - b_{21})}{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}} \right] \cdot A_0 \sin(\omega t) = A_0 \int h_2(t-t') \sin(\omega t') dt', \quad (13b)$$

式中,

$$h_1(t) = L^{-1}[(b_{22} - b_{12}\sigma^2) / (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})],$$

$$h_2(t) = L^{-1}[(b_{11}\sigma^2 - b_{21}) / (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})].$$

由信号与系统理论^[26], 周期信号输入系统中, 输出信号一定也是周期信号, 且与输入信号频率相同, 则稳态时, 系统输出的信号为

$$x_1(t)_{\text{稳态}} = A \sin(\omega t + \phi), \quad (14)$$

式中: A 为输出信号振幅; ϕ 为输出信号相位. 且

$$A = A_0 \sqrt{(d_{11}^2 + d_{12}^2) / (d_{21}^2 + d_{22}^2)},$$

$$\phi = \arctan((d_{12}d_{21} - d_{11}d_{22}) / (d_{11}d_{21} + d_{12}d_{22})),$$

式中,

$$d_{11} = Rv(1 - \sigma^2) + \tau^\alpha \rho^\alpha \cos(\alpha\theta) / C,$$

$$d_{12} = R\omega(1 - \sigma^2) - \tau^\alpha \rho^\alpha \sin(\alpha\theta) / C,$$

$$d_{21} = (R\sigma\omega)^2 + \tau^\alpha \omega^\alpha / C \cdot \cos(\alpha \arcsin \omega)(Rv + \tau^\alpha \rho^\alpha \cos(\alpha\theta) / C) - (\tau^\alpha \rho^\alpha \sin(\alpha \arcsin \omega) / C - R\omega)(\tau^\alpha \rho^\alpha \sin(\alpha\theta) / C - R\omega),$$

$$d_{22} = \tau^\alpha \omega^\alpha / C \cdot \cos(\alpha \arcsin(\omega))(R\omega - \tau^\alpha \rho^\alpha \sin(\alpha\theta) / C) - R^2 \sigma^2 v \omega + (R\omega - \tau^\alpha \rho^\alpha / C \cdot \sin(\alpha \arcsin \omega))(Rv + \tau^\alpha \rho^\alpha \cos(\alpha\theta) / C),$$

$$\rho = \sqrt{\omega^2 + v^2}, \quad \theta = \arctan(\omega / v).$$

3 稳态下振幅的随机共振行为

3.1 Bona fide 随机共振现象

双态噪声强度 $\sigma = 0.3, 0.5, 0.7$ 时, 输出信号振幅 A 随输入信号频率 ω 的变化如图 2 所示.

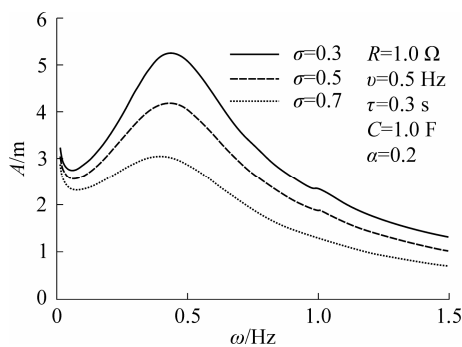


图 2 不同双态噪声强度下振幅随输入信号频率的变化

从图 2 中可以发现, ω 达到某一值时, A 出现了 1 个最大值, 即出现了 1 个波峰. 随着 ω 的变化,

A 表现波峰的现象称为 Bona fide 随机共振现象. 所以, 此系统表现出了 Bona fide 随机共振现象. 比较 3 条曲线, 可以发现随着调制信号噪声强度的增大, 单峰的峰值逐渐减低. 当 $\sigma = 0.3$ 时, 振幅的变化非常明显, 远大于初始振幅. 当 $\sigma = 0.7$ 时, 峰值时的振幅反而小于初始振幅.

图 3 所示为双态噪声频率 $v = 0.1, 0.5, 1.0$ Hz 时, A 随 ω 的变化曲线. 由图可见随着 ω 的变化, 输出 A 表现出了单峰, 即系统表现出了 Bona fide 随机共振现象. 比较 3 条曲线, 发现随着 v 的增大, 单峰峰值逐渐减低. 当 $v = 0.1$ Hz 时, 振幅变化非常明显, 峰值远大于初始振幅. 当 $v > 0.5$ Hz 时, 单峰值小于初始振幅并逐渐消失. 故只有在适当的噪声强度、噪声频率条件下, 才会出现 Bona fide 随机共振现象.

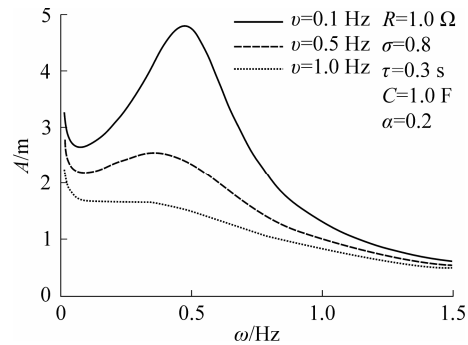


图 3 不同双态噪声频率下振幅随输入信号频率的变化

3.2 广义的随机共振现象

图 4 为容阻器阶数 $\alpha = 0.30, 0.36, 0.40$ 时 A 随 σ 的变化曲线. 当 $\alpha = 0.30, 0.36$ 时, 随着 σ 变化, A 出现 1 个单峰, 且 $\alpha = 0.30$, σ 取适当值时, A 达到最大值, 并大于初始振幅. 当 $\alpha > 0.36$ 时, 单峰减弱, 且小于初始振幅, 没有实用价值.

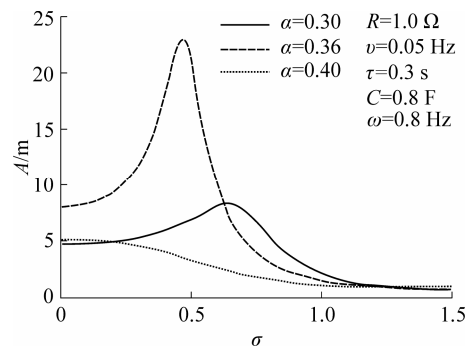


图 4 不同容阻器阶数下振幅随双态噪声强度的变化

图 5 为容阻器 $C = 0.90, 0.75, 0.50$ F 时 A 随 σ 的

变化曲线. 当 $C=0.90$ F, σ 增加到某一值时, 曲线上出现了 1 个单峰, 即出现了随机共振现象. 但是当 $C < 0.75$ F 时, 共振峰就不太明显了, 且此时的峰值小于初始振幅值.

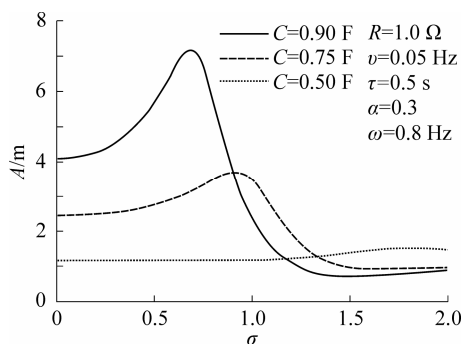


图 5 不同容阻器下振幅随双态噪声强度的变化

图 6 为 $\omega=1.00, 0.90, 0.75$ Hz 时, A 随 σ 的变化曲线. 3 条曲线上都显示出了共振峰, 且随着 ω 减小, 共振峰逐渐降低. 当 $\omega=1.00$ Hz 时, 峰值大于初始振幅; 当 $\omega < 0.90$ Hz 时, 峰值小于初始振幅.

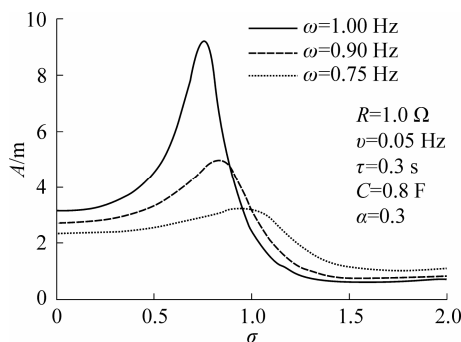


图 6 不同输入信号频率下振幅随双态噪声强度的变化

图 7 为容阻器关联时间 $\tau=0.3, 0.5, 0.8$ s 时, A 随 σ 的变化曲线. 比较 3 条曲线可以看到, 随着 σ 的变化, A 表现出了单峰. 而且随着容阻器关联时间增加, 单峰的峰值逐渐减低. 且 $\tau=0.3$ s, σ 达到某一值时, 峰值最高.

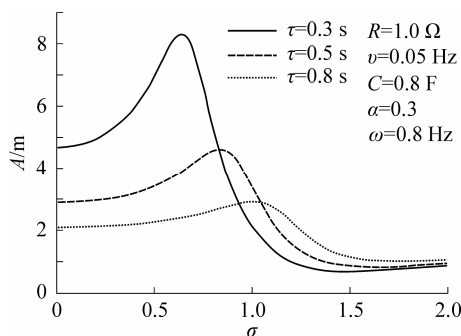


图 7 不同容阻器关联时间下振幅随双态噪声强度的变化

4 结论

研究被双态噪声调制的电阻、被双态噪声调制的周期输入信号以及分数阶微分方程描述的容阻器串联组成的简单电子电路的随机共振行为, 发现系统表现出 Bona fide 随机共振以及广义随机共振 2 种不同的随机共振现象. 当输入信号频率变化到适当值时, 输出信号振幅可以达到最大值; 当噪声参数与电子系统发生协同作用时, 输出信号振幅也可以达到最大值. 所以, 噪声在此处不是起破坏电子系统的作用, 而是把其能量转变为电路系统的能量, 提高电路系统输出效率. 在实际电路系统中, 为达到某方面的效果, 通常把若干个电容器以串联或并联方式接入电路. 由 2 个串联容阻器, 或者并联容阻器, 以及以混合方式组合的容阻器组与其他电子元件组成的电路中, 在调制周期信号和噪声驱动电路中的共振特性有待进一步研究.

参考文献:

- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1981, 14:L453-L457.
- [2] Fauve S, Heslot F. Stochastic resonance in a bistable system[J]. Physics Letters A, 1983, 97(2):5-7.
- [3] Harmer G P, Davis B R, Abbott D. A review of stochastic resonance: Circuits and measurement[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2002, 51(2):299-309.
- [4] 韩引霞. 三值噪声及热噪声共同调制下 RC 串联电路的随机共振现象[J]. 宁波大学学报(理工版), 2011, 24(2):75-78.
- [5] 韩引霞, 符强. 三值噪声调制下电路中的随机共振现象[J]. 宁波大学学报(理工版), 2013, 26(1):104-109.
- [6] Bologna M, Chandia K J, Tellini B. Stochastic resonance in a non-Possinian dichotomous process: A new analytical approach[EB/OL]. [2016-08-12]. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-5468/2013/07/P07006>.
- [7] Rowe A C H, Etchegoin P. Experimental observation of stochastic resonance in a linear electronic array[EB/OL]. [2016-10-24]. <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.64.031106>.
- [8] Sharpe J P, Sungar N, Swaney M, et al. Stochastic resonance on two-dimensional arrays of bistable oscillators in a nonlinear optical system[EB/OL]. [2016-05-07]. <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.64.031106>.

- 7.056222.
- [9] Swain R S, Gleeson J P, Kennedy M P. Influence of noise intensity on the spectrum of an oscillator[J]. IEEE Transactions on Circuits and System-II: Express Briefs, 2005, 52(11):789-793.
- [10] Gleeson J P. Phase diffusion due to low-frequency colored noise[J]. IEEE Transactions on Circuits and System-II: Express Briefs, 2006, 53(3):183-186.
- [11] Bonnin M, Corinto F. Influence of noise on the phase and amplitude of second-order oscillators[J]. IEEE Transactions on Circuits and System-II: Express Briefs, 2014, 61(3): 158-162.
- [12] Bonnin M, Traversa F, Bonani F. Influence of amplitude fluctuations on the noise-induced frequency shift of noisy oscillators[J]. IEEE Transactions on Circuits and System-II: Express Briefs, 2016, 63(7):698-702.
- [13] Noguchi T, Torikai H. Ghost stochastic resonance from an asynchronous cellular automaton neuron model[J]. IEEE Transactions on Circuits and System-II: Express Briefs, 2013, 60(2):111-115.
- [14] 俞亚娟, 王在华. 一个分数阶忆阻器模型及其简单串联电路的特性[J]. 物理学报, 2015, 64(23):369-377.
- [15] 同登科, 王瑞和. 分形油藏非 Newton 黏弹性液分数阶流动分析[J]. 中国科学, 2004, 34(1):87-101.
- [16] 陈宏善, 侯婷婷, 冯养平. 聚合物物理老化的分数阶模型[J]. 中国科学, 2010, 40(10):1267-1274.
- [17] 刁利杰, 张小飞, 陈帝伊. 分数阶并联 $RL_\alpha C_\beta$ 电路[J]. 物理学报, 2014, 63(3):421-433.
- [18] 胡丰伟, 包伯成, 武花干, 等. 荷控忆阻器等效电路分析模型及其电路特性研究[J]. 物理学报, 2013, 62(21): 404-411.
- [19] 罗丹, 陈宏善. 介电松弛的基本分数模型及其在频率域上的松弛特征[J]. 中国科学, 2014, 44(8):795-803.
- [20] Shapiro V E, Loginov V M. "Formulae of differentiation" and their use for solving stochastic equations[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 1978, 91: 563-574.
- [21] 蔚涛, 罗懋康, 华云. 分数阶质量涨落谐振子的共振行为[J]. 物理学报, 2013, 62(21):51-59.
- [22] 段俊生. 含 Caputo 分数阶导数的分数阶微分方程[J]. 天津轻工业学院学报, 2003(S1):22-24.
- [23] 王学彬. Laplace 变换方法解为分数阶微分方程[J]. 西南师范大学学报, 2016, 41(7):7-12.
- [24] Podlubny I. Fractional Differential Equations[M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [25] Gao S L, Zhang L, Liu H, et al. Random-order fractional bistable system and its stochastic resonance[J]. European Physical Journal Plus, 2017, 132(1):2.
- [26] Oppenheim A V, Willsky A S, Nawab S H. Signals and Systems[M]. 2nd ed. London: Prentice Hall, 2005.

Stochastic resonance caused by the dichotomous noise in a fractional order series circuit

HAN Yin-xia

(College of Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The characteristics of the stochastic resonance of the series circuits composed of the modulated-resistance with the symmetrical dichotomous noise, and the modulated-amplitude with the symmetrical dichotomous noise and the fractional-order cap-resistor is investigated. Firstly, by applying the interger-order Shapiro-Loginov formula and the fractional-order Shapiro-Loginov formula, a set of closed equations are obtained; Secondly, using the Laplace transform technique, the inverse Laplace transform technique and "signal and system" theory, the steady state analytic expression of the first moment of the amplitude of the output signal is derived; Lastly, by simulating the variation of the driving frequency, the fractional-order cap-resistor is fomulated. For the noise parameters in terms of the steady state amplitude of the output signal, the non-monotonic behavior of the output signal is identified. The result indicates that the Bona fide stochastic resonance and the generalized stochastic resonance phenomena occur in the fractional-order series circuits.

Key words: fractional-order cap-resistor; symmetrical dichotomous noise; Shapiro-Loginov formula; stochastic resonance

(责任编辑 韩 超)