

随机波动率模型下含违约风险的欧式衍生产品的套期保值

黄鹏飞, 王伟*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究了含违约风险的欧式未定权益的最优套期保值问题. 假定含违约风险衍生产品的标的资产满足 Heston 随机波动率模型, 则利用局部风险最小化方法获得含违约风险衍生产品的最优套期保值策略. 此外, 还考虑了在一个特别情况下, 研究了含违约风险的欧式看涨期权的最优套期保值问题, 并通过特征函数和傅里叶反演公式给出了明确的局部风险最小化套期保值策略.

关键词: 违约风险; 局部风险最小化; 套期保值; 随机波动率

中图分类号: O211.9

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2018) 06-0104-06

许多学者认为 2008 年美国次贷危机的根源实际上是“信用危机”, 次贷危机的爆发, 就是“信用风险”的爆发. 信用风险又称为违约风险, 它是指交易中的对方不能履行契约中的义务而带来损失的一种风险. 在过去的二三十年里, 含信用风险的衍生产品已经成为全球发展最为迅猛的金融产品. 这些信用衍生产品成交活跃、成本低廉, 为金融机构投资者追求高收益带来了极大的便利; 然而这些衍生产品也是一把双刃剑, 如果应用不当, 将会给投资者带来巨额损失. 因此, 对信用衍生产品如何进行套期保值, 成了很多企业急需解决的问题. 在非完备市场中, 均值方差套期保值和风险最小套期保值是目前最流行的 2 种套期保值策略. Föllmer 和 Sonderman^[1]首次以风险最小化准则作为未定权益套期保值的目标, 提出了风险最小套期保值策略的概念. Schweizer^[2]进一步考虑风险资产在原始测度下不是鞅的情况, 提出了局部风险最小套期保值策略的概念, 并研究了它与 Follmer-Schweizer 分解之间的关系. Qian 等^[3]考虑了市场中股票的价格动态依赖于市场经济状态, 在不同的经济状态下, 风险资产满足不同的价格过程, 他们用马尔可夫调制过程来刻画风险资产价格, 并获得了该金融模型下单位连结人寿保险合同的最小套期保值策略. Pansera^[4]假定时间为离

散的, 得到了支付过程的局部风险最小套期保值策略, 并进一步研究了权益连结保险产品的套期保值. Lee 等^[5]假定市场中标的资产价格满足跳扩散过程, 且投资者比一般市场交易人员拥有更多的内部信息, 考虑了该金融模型下局部风险最小套期保值问题. 在国内方面, 李勇等^[6]提出了一个 Copula 和波动率相结合的风险最小套期保值方法. 郭建华等^[7]研究了风险资产价格满足跳扩散时风险最小化套期保值问题.

本文中, 笔者假定波动率满足 Heston 随机波动率模型, 并考虑该随机波动率模型下含违约风险的欧式未定权益的风险最小化套期保值问题. 此外, 还进一步考虑了含违约风险的欧式看涨期权, 并给出了局部风险最小化套期保值策略的明确解.

1 金融市场模型

假定市场中有 2 种资产可以交易, 分别是风险资产和无风险债券. 令 B_t 和 S_t 分别表示风险资产和无风险债券在时刻 t 的价格, 它们满足如下的方程:

$$dB_t = rB_t dt, \quad (1)$$

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sqrt{\sigma_t} dW_t), \quad (2)$$

其中, r 为无风险利率; μ 为风险资产的预期回报

收稿日期: 2017-09-21.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 教育部人文社科基金(15YJA910004, 18YJC910012); 浙江省自然科学基金(LY17G010003).

第一作者: 黄鹏飞(1992-), 男, 湖北襄阳人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: hotop2015@163.com

*通信作者: 王伟(1982-), 男, 安徽安庆人, 博士/副教授, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: wangwei2@nbu.edu.cn

率; σ_t 为风险资产在 t 时刻的波动率, 满足如下均值回归模型:

$$d\sigma_t = \alpha(\tilde{m} - \sigma_t)dt + \beta\sqrt{\sigma_t}dW_{2t}, \quad (3)$$

其中, $\alpha, \tilde{m}, \beta$ 是个常值. 令 $\tilde{S}_t = S_t e^{-rt}$ 表示风险资产 S 在 t 时刻的贴现价格过程, 则由(1)式可知:

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t(\mu - r)dt + \sqrt{\sigma_t}\tilde{S}_t dW_{1t}. \quad (4)$$

$$\text{定义 } M_t = \int_0^t \tilde{S}_u \sqrt{\sigma_u} dW_{1u}, A_t = \int_0^t \tilde{S}_u(\mu - r)du, \text{ 则} \\ \tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + M_t + A_t. \quad (5)$$

令 τ 表示违约时间, $H_t = I_{\{\tau \leq t\}}$ 表示违约过程, 假定违约强度 λ_t 满足如下随机微分方程:

$$d\lambda_t = \kappa(\tilde{\theta} - \lambda_t)dt + \delta dW_{3t}, \quad (6)$$

其中, $\kappa, \tilde{\theta}, \delta$ 是个常值. 此外, 我们假定布朗运动 $W_t = (W_{1t}, W_{2t}, W_{3t})$ 满足如下方程:

$$\hat{\zeta}_t = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{pmatrix} t.$$

令 $\mathcal{F}_t^H = \sigma(H_u, 0 \leq u \leq t)$, $\mathcal{F}_t^\lambda = \sigma(\lambda_u, 0 \leq u \leq t)$, $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_{1u}, W_{2u}, W_{3u}, 0 \leq u \leq t)$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^\lambda \vee \mathcal{F}_t^W$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^H$. 另外, 我们采用文献[8]的假设, 违约时间 τ 的条件分布满足如下:

$$P(\tau > t | \mathcal{F}_t) = e^{-\int_0^t \lambda_u du}, t \in [0, T], \quad (7)$$

其中, P 表示原始测度.

2 风险最小化套期保值策略

在非完备市场中, 金融衍生产品的卖空方利用自融资策略是不能够完全对冲衍生产品空头寸风险的. 目前, 有关非完备市场的最优套期保值研究方面, 研究人员提出了多种最优套期保值策略, 风险最小套期保值策略是其中之一, 也是最流行的一种方法. 本节中, 笔者将介绍有关风险最小化套期保值和局部风险最小化套期保值的一些定义和结果, 更多这方面内容可参考文献[9].

定义 1 一个组合 $\varphi = (\xi, \eta)$ 称为策略, 则满足:

(1) ξ 是可逆过程;

(2) $E_p[\int_0^T \xi_u^2 d[S, S]_u] < \infty$;

(3) η 是适应的;

(4) $\tilde{V}_t = \xi_t \tilde{S}_t + \eta_t$, 其中, $\tilde{V}_t, \xi_t, \eta_t$ 分别表示 t 时刻投资组合价值的贴现过程、持有风险资产的数量和持有无风险资产的数量.

定义 2 令 H 为一个未定权益, 若存在一投资

组合策略 $\varphi = (\xi, \eta)$, 使得 $V(T) = H$, 其中, $V(T) = \eta_T B_T + \xi_T S_T$, 则称 φ 为可容许策略.

为介绍局部风险最小化套期保值方法, 首先定义累积成本过程为:

$$C_t = \tilde{V}_t - \int_0^t \xi_u d\tilde{S}_u.$$

定义 3 如果累积成本过程 C_t 在原始测度 P 下是鞅, 则策略 φ 称为均值自融资的.

定义 4 假定 X 为半鞅, M 是初值为 0 的平方可积局部鞅, A 是平方可积的有限变差过程, 则 X 的典则分解可写为 $X = X_0 + M + A$. 假定 H 是一个未定权益, φ 是 H 可容许策略, 称 φ 为伪局部风险最小化套期保值策略, 如果满足: (1) φ 是均值自融资的; (2) 累积成本过程 $C(\varphi)$ 与 M 强正交.

定义 5 一个鞅测度 Q^* 与 P 等价, 如果在任意测度 P 下, 与 M 正交的平方可积鞅 L 在测度 Q^* 仍是鞅, 则称 Q^* 为最小鞅测度.

下面的引理 1 可见 Schweizer^[9]中的定理 3.3 或参考文献[10].

引理 1 假定半鞅 X 的典则分解中 M, A 满足:

(1) 对于 $\forall 0 \leq t \leq T$, $\langle M \rangle_t$ 是 P-a.s 严格增的;

(2) A 是 P-a.s 连续的;

(3) A 关于 $\langle M \rangle$ 是绝对连续的, 此条件也等价于存在一个可料过程 α_t 使得 $A_t = \int_0^t \alpha_s d\langle M \rangle_s$, 及满足 $E_p[\int_0^T \alpha d\langle M \rangle] < \infty$, 则称 H 可容许策略 φ 是局部风险最小化套期保值策略, 如果满足: (1) φ 是均值自融资的; (2) 累积成本过程 $C(\varphi)$ 与 M 强正交.

此外, 由上面定义 4 和引理 1 可知, 如果(5)式中的 M, A 满足引理 1 中的条件 1, 2, 3, 则伪局部风险最小化套期保值策略就是局部风险最小化套期保值策略.

3 最小鞅测度

因为金融市场中只有一个风险资产可以交易, 而市场中风险源的个数超过市场中可交易风险资产的个数, 所以市场是非完备的, 故等价鞅测度不是唯一的. 由文献[9]可知, Follmer-Schweizer 分解是得到局部最小化套期保值策略的有力工具, 而最小鞅测度又在 Follmer-Schweizer 分解中起着重要作用, 因此我们首先给出最小鞅测度的表达式.

命题 1 令 $\zeta_t = \frac{\mu - r}{\sqrt{\sigma_t}}$, 最小鞅测度 Q^* 满足:

$$\frac{dQ^*}{dP} \Big|_{\mathcal{G}_t} = Z_t = \exp \left\{ -\int_0^t \zeta_u dW_{1u} - \frac{1}{2} \int_0^t \zeta_u^2 du \right\}. \quad (8)$$

证明 由 Itô 公式可知:

$$d(Z_t \tilde{S}_t) = Z_t d\tilde{S}_t + \tilde{S}_t dZ_t + d\langle Z, \tilde{S} \rangle_t, \quad (9)$$

结合式(3)可得:

$$d(Z_t \tilde{S}_t) = Z_t dM_t + Z_t \tilde{S}_t (\mu - r) dt - Z_t \tilde{S}_t \zeta_t dW_{1t} - Z_t \tilde{S}_t \zeta_t \sqrt{\sigma_t} dt, \quad (10)$$

因为 $\zeta_t = (\mu - r) / \sqrt{\sigma_t}$, 故 $d(Z_t \tilde{S}_t) = Z_t dM_t - Z_t \tilde{S}_t \cdot \zeta_t dW_{1t}$, 则 $Z_t \tilde{S}_t$ 是一个 P 鞅, 于是 $\tilde{S}_t$ 是一个 Q^* 鞅, 故 Q^* 是一个等价鞅测度.

下面证明 Q^* 是最小鞅测度. 令 L_t 是一个 P 鞅, 则利用 Itô 公式可得:

$$d(Z_t L_t) = L_t dZ_t + Z_t dL_t + d\langle Z, L \rangle_t, \quad (11)$$

又因为 $dZ_t = -\zeta_t Z_t dW_{1t} = -\frac{\zeta_t Z_t}{\sqrt{\sigma_t} \tilde{S}_t} dM_t$, 则

$$d(Z_t L_t) = L_t dZ_t + Z_t dL_t - \frac{\zeta_t Z_t}{\sqrt{\sigma_t} \tilde{S}_t} d\langle L, M \rangle_t, \quad (12)$$

因为 L 是一个正交于 M 的 P 鞅, 则

$$d(Z_t L_t) = L_t dZ_t + Z_t dL_t.$$

另外, 又由于 Z_t, L_t 都是 P 鞅, 故 $Z_t L_t$ 是 P 鞅, 因此 L_t 是 Q^* 鞅, 由定义 5 可知 Q^* 是最小鞅测度.

命题 2 在最小鞅测度 Q^* 下,

$$\hat{W}_{1t} = W_{1t} + \int_0^t \zeta_u du, \quad (13)$$

$$\hat{W}_{2t} = W_{2t} + \rho_{12} \int_0^t \zeta_u du, \quad (14)$$

$$\hat{W}_{3t} = W_{3t} + \rho_{13} \int_0^t \zeta_u du, \quad (15)$$

且 $\{\hat{W}_{it}, i=1,2,3\}$ 在测度 Q^* 下是标准的布朗运动.

证明 由(8)式和 Girsanov 定理即可获得命题 2, 另外, 再由命题 2, 可以把(2), (3), (6)式写成如下:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{\sigma_t} S_t d\hat{W}_{1t}, \quad (16)$$

$$d\sigma_t = \alpha(m - \sigma_t) dt + \sqrt{\sigma_t} \beta d\hat{W}_{2t}, \quad (17)$$

$$d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t) dt + \delta d\hat{W}_{3t}, \quad (18)$$

其中, $m = \tilde{m} - \frac{\rho_{12}\beta(\mu-r)}{\alpha}$, $\theta_t = \tilde{\theta} - \frac{\rho_{13}\delta(\mu-r)}{\kappa\sqrt{\sigma_t}}$.

4 含违约风险衍生产品的最优套期保值策略

含违约风险的欧式衍生产品的承诺支付是 $\psi(S_T)$, 然而一旦有违约发生, 则衍生产品的卖方仅仅只支付其中的一部分, 即 $\varpi\psi(S_T)$, 其中, $0 <$

$\varpi < 1$ 表示回收率. 当 $\tau \leq T$ 时, 意味着衍生产品的卖方发生违约, 则该衍生产品的买方仅仅能获得 $\varpi\psi(S_T)$; 当 $\tau > T$ 时, 则无违约发生, 因此衍生产品的买方可获得 $\psi(S_T)$.

令 $V(t)$ 表示 t 时刻含违约风险的欧式衍生产品在最小鞅测度 Q^* 下的价值, 则由风险中性定价原理可知:

$$V(t) = E_{Q^*} [e^{-r(T-t)} (\psi(S_T) I_{\{\tau > T\}} + \varpi\psi(S_T) I_{\{\tau \leq T\}}) | \mathcal{G}_t], \quad (19)$$

由上式可知:

$$V(t) = \varpi E_{Q^*} [e^{-r(T-t)} \psi(S_T) | \mathcal{G}_t] + (1 - \varpi) E_{Q^*} [e^{-\int_t^T r du} \psi(S_T) I_{\{\tau > T\}} | \mathcal{G}_t], \quad (20)$$

利用条件期望的平滑性或直接由文献[11]中的附录可得:

$$E_{Q^*} [e^{-\int_t^T (r + \lambda_u) du} \psi(S_T) I_{\{\tau > T\}} | \mathcal{G}_t] = I_{\{\tau > t\}} E_{Q^*} [e^{-\int_t^T (r + \lambda_u) du} \psi(S_T) | \mathcal{G}_t]. \quad (21)$$

为了方便, 令

$$V_1(t, S_t, \sigma_t) = E_{Q^*} [e^{-r(T-t)} \psi(S_T) | \mathcal{G}_t], \quad (22)$$

$$V_2(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) = E_{Q^*} [e^{-\int_t^T (r + \lambda_u) du} \psi(S_T) | \mathcal{G}_t], \quad (23)$$

则 $V(t) = \varpi V_1(t, S_t, \sigma_t) + (1 - \varpi) I_{\{\tau > t\}} V_2(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)$. 定义:

$$\tilde{V}_1(t, S_t, \sigma_t) = e^{-rt} V_1(t, S_t, \sigma_t), \quad (24)$$

$$\tilde{V}_2(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) = e^{-\int_t^T (r + \lambda_u) du} V_2(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t), \quad (25)$$

则根据(24)和(25)式可知 $\tilde{V}_1(t, S_t, \sigma_t)$ 和 $\tilde{V}_2(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)$ 是 Q^* 鞅.

为符号表述方便, 用 $f_t, f_s, f_\sigma, f_\lambda$ 表示 $f(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)$ 关于 $t, S_t, \sigma_t, \lambda_t$ 的一阶导数; $f_{ss}, f_{\sigma\sigma}, f_{\lambda\lambda}$ 表示 $f(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)$ 关于 S_t, σ_t, λ_t 的二阶导数; $f_{\sigma\lambda}$ 表示 $f(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)$ 关于 σ_t, λ_t 各求一阶导数, $f_{s\sigma}$ 表示 $f(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)$ 关于 S_t, σ_t 各求一阶导数, $f_{s\lambda}$ 表示 $f(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)$ 关于 S_t, λ_t 各求一阶导数.

则对 $\tilde{V}_1(t, S_t, \sigma_t)$ 和 $\tilde{V}_2(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)$ 用 Itô 公式可得:

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_1(t, S_t, \sigma_t) &= \tilde{V}_{1t}(t, S_t, \sigma_t) dt + \tilde{V}_{1s}(t, S_t, \sigma_t) \cdot \\ &\quad (rS_t dt + \sqrt{\sigma_t} S_t d\hat{W}_{1t}) + \frac{1}{2} \tilde{V}_{1ss}(t, S_t, \sigma_t) \sigma_t S_t^2 dt + \\ &\quad \tilde{V}_{1\sigma}(t, S_t, \sigma_t) (\alpha(m - \sigma_t) dt + \beta \sqrt{\sigma_t} d\hat{W}_{2t}) + \\ &\quad \frac{1}{2} \tilde{V}_{1\sigma\sigma}(t, S_t, \sigma_t) \beta^2 \sigma_t dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_{12} \tilde{V}_{1s\sigma}(t, S_t, \sigma_t) S_t \sigma_t \beta dt. \quad (26) \\
d\tilde{V}_2(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) = & \tilde{V}_{2t}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) dt + \tilde{V}_{2s}(t, S_t, \\
& \sigma_t, \lambda_t)(rS_t dt + \sqrt{\sigma_t} S_t d\hat{W}_{1t}) + \frac{1}{2} \tilde{V}_{2ss}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) \cdot \\
& \sigma_t S_t^2 dt + \tilde{V}_{2\sigma}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)(\alpha(m - \sigma_t) dt + \\
& \beta \sqrt{\sigma_t} d\hat{W}_{2t}) + \frac{1}{2} \tilde{V}_{2\sigma\sigma}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) \beta^2 \sigma_t dt + \\
& \tilde{V}_{2\lambda}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)(\kappa(\theta - \lambda_t) dt + \delta d\hat{W}_{3t}) + \\
& \frac{1}{2} \tilde{V}_{2\lambda\lambda}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) \delta^2 dt + \rho_{12} \tilde{V}_{2s\sigma}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) \cdot \\
& \sigma_t S_t \beta dt + \rho_{13} \tilde{V}_{2s\lambda}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) S_t \sqrt{\sigma_t} \delta dt + \\
& \rho_{23} \tilde{V}_{2\sigma\lambda}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) \beta \delta \sqrt{\sigma_t} dt. \quad (27)
\end{aligned}$$

因为 $\tilde{V}_1(t, S_t, \sigma_t)$ 和 $\tilde{V}_2(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)$ 是鞅, 则上面两式的漂移项系数为 0, 故

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_1(t, S_t, \sigma_t) = & \tilde{V}_1(0, S_0, \sigma_0) + \int_0^t \tilde{V}_{1s}(u, S_u, \sigma_u) \cdot \\
& \sqrt{\sigma_u} S_u d\hat{W}_{1u} + \int_0^t \tilde{V}_{1\sigma}(u, S_u, \sigma_u) \beta \sqrt{\sigma_u} d\hat{W}_{2u}, \quad (28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_2(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) = & \tilde{V}_2(0, S_0, \sigma_0, \lambda_0) + \int_0^t \tilde{V}_{2s}(u, S_u, \\
& \sigma_u, \lambda_u) \sqrt{\sigma_u} S_u d\hat{W}_{1u} + \tilde{V}_{2\sigma}(u, S_u, \sigma_u, \lambda_u) \beta \cdot \\
& \sqrt{\sigma_u} d\hat{W}_{2u} + \int_0^t \tilde{V}_{2\lambda}(u, S_u, \sigma_u, \lambda_u) \delta d\hat{W}_{3u}. \quad (29)
\end{aligned}$$

定理 1 含违约风险的欧式衍生产品的局部风险最小套期保值策略 $\varphi^* = (\xi^*, \eta^*)$ 满足如下:

$$\begin{aligned}
\xi_t^* = & \varpi(V_{1s}(t, S_t, \sigma_t) + \rho_{12} \beta V_{1\sigma}(t, S_t, \sigma_t) / S_t) + \\
& (1 - \varpi) I_{\{\tau > t\}} \cdot (V_{2s}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) + \\
& (\rho_{12} \beta \sqrt{\sigma_t} V_{2\sigma}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) + \\
& \rho_{13} \delta V_{2\lambda}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)) / (\sqrt{\sigma_t} S_t)), \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\eta_t^* = \tilde{V}(t) - \xi_t^* \tilde{S}_t. \quad (31)$$

证明 令 $\tilde{V}(t)$ 表示 t 时刻含违约风险的欧式衍生产品价值的现值. 我们首先假定 $\tilde{V}(t) = V(0) + \int_0^t \xi_u^* d\tilde{S}_u + L_t$ 分解存在, 其中, L_t 和 M_t 是 P 正交鞅, 此分解的存在性可见下面的注 1, 则

$$\langle \tilde{V}, \tilde{S} \rangle_t = \int_0^t \xi_u^* d\langle \tilde{S} \rangle_u + \langle L, \tilde{S} \rangle_t.$$

又因 L_t 和 M_t 是 P 正交鞅, 故 $\langle L, \tilde{S} \rangle_t = \langle L, M \rangle_t + \langle L, A \rangle_t = 0$, 于是

$$\xi_t^* = \frac{d\langle \tilde{V}, \tilde{S} \rangle_t}{d\langle \tilde{S} \rangle_t}.$$

注意 $\tilde{V}(t) = \varpi \tilde{V}_1(t) + (1 - \varpi) I_{\{\tau > t\}} \tilde{V}_2(t)$, 故

$$\xi_t^* = \frac{\varpi d\langle \tilde{V}_1, \tilde{S} \rangle_t + (1 - \varpi) I_{\{\tau > t\}} d\langle \tilde{V}_2, \tilde{S} \rangle_t}{d\langle \tilde{S} \rangle_t} = \frac{\varpi d\langle \tilde{V}_1, \tilde{S} \rangle_t + (1 - \varpi) I_{\{\tau > t\}} d\langle \tilde{V}_2, \tilde{S} \rangle_t}{d\langle \tilde{S} \rangle_t}, \quad (32)$$

利用(4)式, (28)~(29)式分别可得:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{V}_1, \tilde{S} \rangle_t = & \int_0^t \tilde{V}_{1s}(u, S_u, \sigma_u) \sigma_u \tilde{S}_u du + \\
& \rho_{12} \int_0^t \tilde{V}_{1\sigma}(u, S_u, \sigma_u, \lambda_u) \sqrt{\sigma_u} \tilde{S}_u \beta du, \quad (33)
\end{aligned}$$

$$\langle \tilde{S} \rangle_u = \int_0^t \sigma_u \tilde{S}_u^2 du, \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{V}_2, \tilde{S} \rangle_t = & \int_0^t \tilde{V}_{2s}(u, S_u, \sigma_u, \lambda_u) \sigma_u \tilde{S}_u du + \\
& \rho_{12} \int_0^t \tilde{V}_{2\sigma}(u, S_u, \sigma_u, \lambda_u) \sigma_u \tilde{S}_u \beta du + \\
& \rho_{13} \int_0^t \tilde{V}_{2\lambda}(u, S_u, \sigma_u, \lambda_u) \sqrt{\sigma_u} \tilde{S}_u \delta du, \quad (35)
\end{aligned}$$

则再结合(32)~(34)式和(45)式, 即可得:

$$\begin{aligned}
\xi_t^* = & \varpi(V_{1s}(t, S_t, \sigma_t) + \rho_{12} \beta V_{1\sigma}(t, S_t, \sigma_t) / S_t) + \\
& (1 - \varpi) I_{\{\tau > t\}} \cdot (V_{2s}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) + \\
& (\rho_{12} \beta \sqrt{\sigma_t} V_{2\sigma}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) + \\
& \rho_{13} \delta V_{2\lambda}(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t)) / (\sqrt{\sigma_t} S_t)).
\end{aligned}$$

另外, 由定义 1 可知:

$$\eta_t^* = \tilde{V}(t) - \xi_t^* \tilde{S}_t. \quad (36)$$

值得注意 $L_t + \tilde{V}(0) = \tilde{V}(t) - \int_0^t \xi_u^* d\tilde{S}_u = C_t$, 且 L_t 与 M_t 是 P 正交鞅, 可得 C_t 与 M_t 是 P 正交鞅. 再由定义 4 可知, (ξ_t^*, η_t^*) 是含违约风险衍生产品的伪局部风险最小化套期保值策略. 为验证该策略还是一个局部风险最小化套期保值策略, 需证明引理 1 中的 3 个条件, 首先因为 $\langle M \rangle_t = \int_0^t \sigma_u \tilde{S}_u^2 du$, 故 $\langle M \rangle_t$ 是 P -a.s 严格增的, 另外由 $A_t = \int_0^t \tilde{S}_u (\mu - r) du$ 可知 A_t 是连续的. 又因为 $\alpha_t = dA_t / d\langle M \rangle_t = (\mu - r) / (\sigma_t \tilde{S}_t)$, 故

$$\begin{aligned}
E\left[\int_0^t \alpha_u dM_u\right] &= E\left[\int_0^t \alpha_u^2 d\langle M \rangle_u\right] = \\
E\left[\int_0^t \frac{(\mu - r)^2}{\sigma_u} du\right] &< \infty.
\end{aligned}$$

于是, 我们根据引理 1 即可得到由(30)式和(31)式所定义的 (ξ_t^*, η_t^*) 是局部风险最小化套期保值策略.

注 1 在定理 1 中, 假定 $\tilde{V}(t) = V(0) + \int_0^t \xi_u^* d\tilde{S}_u + L_t$, 对于此分解的存在性可采用与文献[12]相同的方法证明.

若违约强度 $\lambda_t = \lambda$, 则 $\rho_{13} = 0$. 此外, 从定理 1 中的(22)式和(23)式可得如下结果:

$$V_2(t, S_t, \sigma_t, \lambda_t) = e^{-\lambda(T-t)} V_1(t, S_t, \sigma_t), \quad (37)$$

再结合(37)式和定理 1, 经过简单计算可得下面的注 2.

注 2 当违约强度为常值时, 即 $\lambda_t = \lambda$, 则定理 1 中的结果可简化为如下:

$$\xi_t^* = (\varpi + (1 - \varpi) I_{\{\tau > t\}} e^{-\lambda(T-t)}) (V_{1s}(t, S_t, \sigma_t) +$$

$$\rho_{12}\beta V_{1\sigma}(t, S_t, \sigma_t) / S_t) .$$

$$\eta_t^* = \tilde{V}(t) - \xi_t^* \tilde{S}_t .$$

注 3 若违约在 t 时刻之前发生, 在 t 时刻之后不发生违约, 即 $\tau < t$; 或者金融衍生产品不发生违约风险, 即 $\varpi = 1$. 由定理 1 可得如下结果:

$$\xi_t^* = V_{1s}(t, S_t, \sigma_t) + \rho_{12}\beta V_{1\sigma}(t, S_t, \sigma_t) / S_t ,$$

$$\eta_t^* = \tilde{V}(t) - \xi_t^* \tilde{S}_t .$$

5 欧式脆弱期权

本节中, 我们考虑一个特别例子, 即含违约风险的欧式衍生产品——欧式脆弱期权. 欧式脆弱期权在期权到期时刻 T 的承诺支付是 $(S_T - K)^+$, 其中, K 是执行价格. 如果在 T 时刻, 期权的卖方发生违约, 则期权的买方只能得到承诺支付的一部分, 即 $\varpi(S_T - K)^+$. 为了结果不那么复杂, 我们假定违约强度是一个常值, 即 $\lambda_t = \lambda$. 对于执行价格为 K , 到期日为 T 的欧式看涨期权, 则

$$V_1(t, S_t, \sigma_t) = E_{Q^*}[e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ | \mathcal{G}_t] . \quad (38)$$

为了方便, 我们通过测度变换引入一个新的测度 Q_S^* , 它被定义为如下:

$$\frac{dQ_S^*}{dQ^*} \Big|_{\mathcal{G}_T} = \frac{S_T}{E_{Q^*}[S_T]} .$$

因此, (38)式可以写成如下:

$$V_1(t, S_t, \sigma_t) = S_t P_1(t, T, S, \sigma, \ln K) - Ke^{-r(T-t)} P_2(t, T, S, \sigma, \ln K) , \quad (39)$$

这里,

$$P_1(S, \sigma, T, \ln K) = Q^*(\ln S_T \geq \ln K | S_t = S, \sigma_t = \sigma) , \quad (40)$$

$$P_2(S, \sigma, T, \ln K) = Q_S^*(\ln S_T \geq \ln K | S_t = S, \sigma_t = V) . \quad (41)$$

令 $F_1(t, T, \ln S, \sigma, \varphi) = E_{Q_S^*}[e^{i\varphi \ln S_T} | \ln S_t = \ln S, \sigma_t = \sigma]$ 表示 t 时刻 $\ln S_T$ 在测度 Q_S^* 下的条件特征函数,

$F_2(t, T, \ln S, \sigma, \varphi) = E_{Q^*}[e^{i\varphi \ln S_T} | \ln S_t = \ln S, \sigma_t = \sigma]$, 表示 t 时刻 $\ln S_T$ 在测度 Q^* 下的条件特征函数. 利用 Heston^[13]的结果可得:

$$F_j(t, T, \ln S, \sigma, \varphi) = e^{C_j(T-t, \varphi) + D_j(T-t, \varphi)\sigma + i\varphi \ln S} , \quad (42)$$

其中

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, b_1 = \kappa - \rho_{12}\beta, b_2 = \kappa ,$$

$$C_j(u, \varphi) = iru\varphi + (\alpha m / \beta^2) \{ (b_j - i\rho_{12}\beta\varphi + q)u - 2\ln[(1 - ge^{qu}) / (1 - g)] \} ,$$

$$D_j(u, \varphi) = \frac{b_j - i\rho_{12}\beta\varphi + q}{\beta^2} \left[\frac{1 - e^{qu}}{1 - ge^{qu}} \right] ,$$

$$g = \frac{b_j - i\rho_{12}\beta\varphi + q}{b_j - i\rho_{12}\beta\varphi - q} ,$$

$$q = \sqrt{(i\rho_{12}\beta\varphi - b_j)^2 - \beta^2(2ix_j\varphi - \varphi^2)} ,$$

$$P_j(t, T, S, \sigma, \ln K) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\varphi \ln K} F_j(t, T, \ln S, \sigma, \varphi)}{i\varphi} \right] d\varphi . \quad (43)$$

由(39)式可得:

$$\frac{\partial V_1(t, S_t, \sigma_t)}{\partial S} = P_1(t, T, S, \sigma, \ln K) + S \frac{\partial P_1(S, V, T, \ln K)}{\partial S} ,$$

$$T, \ln K) / \partial S - Ke^{-r(T-t)} \frac{\partial P_2(S, V, T, \ln K)}{\partial S} . \quad (44)$$

因为

$$\frac{\partial P_j(S, V, T, \ln K)}{\partial S} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}[(e^{-i\varphi \ln K} (\partial F_j(\ln S, \sigma, t, \ln K)) / \partial S) / (i\varphi)] d\varphi . \quad (45)$$

且根据(42)式可得:

$$\frac{\partial F_j(\ln S, \sigma, t, \ln K)}{\partial S} =$$

$$(i\varphi - 1) S^{i\varphi - 1} e^{C_j(T-t, \varphi) + D_j(T-t, \varphi)\sigma} , \quad (46)$$

则

$$V_{1s}(t, S_t, \sigma_t) = \frac{\partial V_1(t, S_t, \sigma_t)}{\partial S} = P_1(S, V, T, \ln K) +$$

$$\frac{S}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}[(e^{-i\varphi \ln K} (i\varphi - 1) S^{i\varphi - 1} .$$

$$e^{C_1(T-t, \varphi) + D_1(T-t, \varphi)\sigma}) / (i\varphi)] d\varphi - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\pi} .$$

$$\int_0^\infty \operatorname{Re}[(e^{-i\varphi \ln K} (i\varphi - 1) S^{i\varphi - 1} .$$

$$e^{C_2(T-t, \varphi) + D_2(T-t, \varphi)\sigma}) / (i\varphi)] d\varphi . \quad (47)$$

另外, 采用同样方法可得:

$$V_{1\sigma}(t, S_t, \sigma_t) = \frac{S}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}[(e^{-i\varphi \ln K} D_1(T-t, \varphi) \cdot$$

$$F_1(\ln S, \sigma, t, \ln K)) / (i\varphi)] d\varphi - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\pi} .$$

$$\int_0^\infty \operatorname{Re}[(e^{-i\varphi \ln K} D_2(T-t, \varphi) F_2(\ln S, \sigma, t, \ln K)) / (i\varphi)] d\varphi . \quad (48)$$

结合注 2, (47)式和(48)式, 可得含违约风险的欧式看涨期权的局部风险最小化套期保值策略.

6 结论

文章考虑了随机波动率模型下含违约风险的

最优套期保值问题。我们假定市场中的风险资产价格满足 Heston 随机波动率模型, 且违约强度满足均值回归模型。由于所考虑的金融市场是非完备的, 因此等价鞅测度不是唯一的。我们首先考虑了最小鞅测度问题, 接着利用 Föllmer-Schweizer 分解获得了含违约风险的欧式未定权益的局部风险最小化套期保值策略, 最后通过已经得到的结果, 研究含违约风险的欧式看涨期权的最优套期保值问题, 并利用特征函数和傅里叶反演公式获得了局部风险最小化套期保值策略。

参考文献:

- [1] Föllmer H, Sondermann D. Hedging of Non-redundant Contingent Claims[M]//Hildenbrand W, Mas-Colell A. Contributions to Mathematical Economics. North-Holland: Elsevier, 1986:205-223.
- [2] Schweizer M. Hedging of Options in a General Semimartingale Model[D]. Switzerland, Zurich: ETH, 1988.
- [3] Qian L Y, Yang H L, Wang R M. Locally risk-minimizing hedging strategies for unit-linked life insurance contracts under a regime switching Levy model[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2011, 6(6):1185-1202.
- [4] Pansera J. Discrete-time local risk minimization of payment processes and applications to equity-linked life-insurance contracts[J]. Insurance Mathematics and Economics, 2012, 50(1):1-11.
- [5] Lee K, Song S. Insiders' hedging in a jump diffusion model[J]. Quantitative Finance, 2007, 7(5):537-545.
- [6] 李勇, 方兆本, 韦勇凤. 风险最小化套期保值比例估计: 基于 RV-Coupla 模型[J]. 数理统计与管理, 2015, 34(2): 340-348.
- [7] 郭建华, 肖庆宪. 跳扩散结构下风险最小化动态套期保值策略研究[J]. 运筹与管理, 2011, 20(2):145-151.
- [8] Jarrow R A, Yu F. Counter party risk and the pricing of defaultable securities[J]. Journal of Finance, 2001, 56(5): 1765-799.
- [9] Schweizer M. A Guided Tour through Quadratic Hedging Approaches[M]//Option Pricing, Interest Rates and Risk Management, Cambridge University Press, 2001:538-574.
- [10] Vandaele N, Vanmaele M. A locally risk-minimizing hedging strategy for unit-linked life insurance contracts in a Levy process financial market[J]. Insurance Mathematics and Economics, 2008, 42(3):1128-1137.
- [11] Su X N, Wang W S. Pricing options with credit risk in a reduced form model[J]. Journal of the Korean Statistical Society, 2012, 41:437-444.
- [12] Lee K, Protter P. Hedging claims with feedback jumps in the price process[J]. Communications on Stochastic Analysis, 2008, 2(1):125-143.
- [13] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. The Review of Financial Studies, 1993, 6(2):327-343.

Hedging for European contingent claims with default risk based on a stochastic volatility model

HUANG Peng-fei, WANG Wei*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: An optimal hedging problem of the European contingent claims with default risk is probed in this work. The underlying asset of the European contingent claims with default risk is assumed to fit a Heston stochastic volatility model. Using the local risk minimization method, we obtain an explicit closed-form solution for the optimal hedging strategies of the European contingent claims with default risk. Further, we consider a special case, in which a problem of hedging for a European call option with default risk is considered. Explicit expressions for the local risk minimization hedging strategies are derived using the characteristic functions and Fourier inversion formula.

Key words: default risk; local risk minimization; hedging; stochastic volatility

(责任编辑 章踐立)