

# 饱和多孔介质中悬浮颗粒一维迁移修正模型及解析解

薛传成, 王 艳\*, 刘干斌, 程冠初, 郭 华, 吴章俨

(宁波大学 岩土工程研究所, 浙江 宁波 315211)

**摘要:** 饱和多孔介质中悬浮颗粒的迁移问题备受人们关注, 研究此问题对人类各种工程作用下环境保护和探索污染迁移规律等方面具有重要意义. 本文对经典颗粒迁移模型进行修正, 在沉积动力学方程中考虑颗粒的沉积再释放, 结合短时注射的初始、边界条件, 通过 Laplace 变换及其逆变换求得其解析解, 并用数值软件计算作图验证解析解的有效性. 将短时注射条件下的解析解退化, 可得到恒定注射浓度条件下的解析解, 从而验证了结果的正确性; 最后研究了沉积系数、释放系数、注射时间和深度变化等参数对浓度曲线的影响. 结果表明, 浓度曲线的变化对释放系数更为敏感, 沉积释放效应使得穿透曲线产生“拖尾”现象.

**关键词:** 多孔介质; 一维扩散; Laplace 变换; 释放效应

**中图分类号:** TU431

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1001-5132 (2019) 01-0062-06

悬浮颗粒在地下水污染物运输中的作用越来越受到人们的关注, 因为它对于保护地下水资源免受微生物和固体颗粒结合污染物的污染至关重要. 之前许多研究致力于溶解元素和胶体运输, 而悬浮颗粒的研究则较少, 由于悬浮颗粒迁移会引起管道内部腐蚀以及油井渗透率下降等一系列问题<sup>[1-4]</sup>, 因此, 多孔介质中悬浮颗粒迁移特性研究对人类各种工程作用下环境保护和污染迁移规律等方面有重要的研究意义<sup>[5-6]</sup>.

对于多孔介质中污染物的迁移理论研究已开展较多的工作. 陈云敏等<sup>[6]</sup>假设污染物在土中迁移的主要方式是分子扩散和吸附作用, 在忽略水力传导作用的基础上建立了污染物在层状土中扩散的一维模型. Kretzschmar 等<sup>[7]</sup>、Grolimund 等<sup>[8]</sup>、Wang 等<sup>[9]</sup>、Ahfir 等<sup>[10]</sup>在稳态和饱和流动条件下, 用包括一阶沉积速率的对流弥散方程描述颗粒通过多孔介质的传输, 得出了在瞬时注入下的解析解, 并结合实验进一步探究了尺寸排除机制和流体动力学机制对饱和多孔介质中悬浮颗粒运输的影响. Tufenkli 等<sup>[11]</sup>提出了一个考虑“快”和“慢”粒子沉积的综合影响双沉积模型模型, 采用均匀

模型颗粒和捕收剂进行对照实验室实验, 以获得微生物分散沉积行为的机理. Corapcioglu 等<sup>[12]</sup>基于描述三相介质中污染物和载体运输的质量平衡方程, 考虑一阶动力学建立一个假定边界浓度恒定的模型.

综上, 目前鲜有考虑释放效应的悬浮颗粒迁移问题的研究成果, 多数研究成果都假设颗粒的沉积是不可逆过程, 忽略了颗粒沉积再释放. 而实际上, 由于多孔介质中物理和化学环境变化, 沉积在多孔介质表面的颗粒会产生释放, 所以同时考虑短时注入条件和释放效应的悬浮颗粒迁移问题的研究具有重要的理论意义和应用价值. 为此, 本文首先对颗粒迁移的经典模型进行修正, 在颗粒沉积动力学方程中考虑释放效应, 并运用 Laplace 变换和 Laplace 数值逆变换求解在短时注入情况下悬浮颗粒的一维迁移问题的解析解, 详细分析了沉积系数、释放系数、注射时间和深度变化等对浓度曲线的影响.

## 1 一维扩散模型

污染物在各向同性多孔介质中的渗透迁移取

收稿日期: 2018-03-25.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(51678311); 浙江省自然科学基金(LY19E080011); 宁波市社发重大项目(2017C510002).

第一作者: 薛传成(1994-), 男, 江苏徐州人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 污染物渗透迁移. E-mail: 785335477@qq.com

\*通信作者: 王艳(1985-), 女, 湖北随州人, 博士/副教授, 主要研究方向: 环境岩土工程. E-mail: wangyan@nbu.edu.cn

决于机械分散和吸附机制。机械分散被定义为包括通常由于多孔介质整个微细段中流体速度的变化而导致流体扩散的所有机理; 吸附机制被定义为流体经过的固体基质去除或添加所含有的污染物。流体通过半无限空间柱, 所以视为一维扩散问题, 且假设: (1)多孔介质是均相和各向同性, 且存在一维稳定流; (2)污染物载体表面的吸附为瞬时, 移动载体和固定载体上的吸附位点与水相平衡; (3)假设从液体到固体的质量传递速率为线性。所以考虑对流、弥散和颗粒释放效应的方程为<sup>[12-14]</sup>:

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} - u \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} - \frac{\rho_s}{n} \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\rho_s}{n} \frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial t} = k_d C(x,t) - k_r \frac{\rho_s}{n} \sigma(x,t), \quad (2)$$

式中:  $C$  为流体中悬浮颗粒质量浓度,  $\text{mg} \cdot \text{mL}^{-1}$ ;  $x$  为悬浮颗粒迁移位移,  $\text{cm}$ ;  $t$  为迁移过程的时间,  $\text{s}$ ;  $D$  为弥散系数,  $\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $u$  为空隙间平均渗流速度,  $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $\rho_s$  为多孔介质干体积密度;  $n$  为孔隙率;  $\sigma$  为每单位体积的多孔介质中悬浮颗粒的沉积量, 无量纲;  $k_d$  为沉积系数,  $\text{s}^{-1}$ , 其值的大小与多孔介质单个收集体的效率有关;  $k_r$  为释放系数,  $\text{s}^{-1}$ 。

短时注入情况下的初始、边界条件为<sup>[15]</sup>:

$$C(x,0) = 0, 0 \leq x < +\infty, \quad (3)$$

$$C(0,t) = \begin{cases} C_0, 0 < t < t_0, \\ 0, t > t_0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{\partial C(\infty,t)}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\sigma(x,0) = 0. \quad (6)$$

## 2 模型求解

对(1)式和(2)式中 $t$ 进行拉普拉斯变换, 并代入(3)式和(6)式中, 得:

$$s\bar{C} = D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} - u \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} - k_d \bar{C} + k_r \frac{\rho_s}{n} \bar{\sigma}, \quad (7)$$

$$\frac{\rho_s}{n} s \cdot \bar{\sigma} = k_d \bar{C} - k_r \frac{\rho_s}{n} \bar{\sigma}, \quad (8)$$

其中,  $\bar{C} = \int_0^\infty C \cdot e^{-st} dt$ ,  $\bar{\sigma} = \int_0^\infty \sigma \cdot e^{-st} dt$ 。

对(7)式和(8)式进行整理化简, 得:

$$D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} - u \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} - s \left( 1 + \frac{k_d}{s + k_r} \right) \bar{C} = 0, \quad (9)$$

而初始边界条件由拉普拉斯变换得:

$$\bar{C}(x,0) = 0, 0 \leq x < +\infty, \quad (10)$$

$$\bar{C}(0,s) = \frac{C_0}{s} (1 - e^{-t_0 s}), \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{C}(\infty,s)}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}(x,0) = 0. \quad (13)$$

求解(9)式, 结合(11)式和(12)式, 可得:

$$\bar{C} = \frac{C_0}{s} (1 - e^{-t_0 s}) \exp \left( \frac{x}{2D} \left( u - \sqrt{u^2 + 4Ds(1 + k_d/(s + k_r))} \right) \right). \quad (14)$$

根据

$$C(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{st} \bar{C}(x,s) ds, \quad (15)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\xi^2 - \theta^2/\xi^2} d\xi = e^{-2\theta}, \quad (16)$$

式中,  $\Gamma$  为指定复平面  $s$  中的给定路径。

(14)式可由(16)式表达成:

$$\frac{\bar{C}}{C_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{(1 - e^{-t_0 s})}{s} \cdot e^a \cdot \int_0^\infty \exp(-\xi^2 - a^2(1 + b^2 s(1 + k_d/(s + k_r)))/4\xi^2) d\xi, \quad (17)$$

式中,  $a = ux/(2D)$ ,  $b^2 = 4D/u^2$ 。

把(17)式代入(15)式中, 得:

$$\begin{aligned} \frac{C}{C_0} &= \frac{2e^a}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty \exp \left( -\xi^2 - \frac{a^2}{4\xi^2} \right) \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \\ &\int_{\Gamma} \exp \left[ st - a^2 b^2 s \left( 1 + \frac{k_d}{s + k_r} \right) / 4\xi^2 \right] \cdot \\ &\frac{(1 - e^{-t_0 s}) ds}{s} d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

令

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp \left[ st - a^2 b^2 s \left( 1 + \frac{k_d}{s + k_r} \right) / 4\xi^2 \right] \cdot \\ &\frac{(1 - e^{-t_0 s})}{s} ds, s + k_r = \varphi, \end{aligned}$$

则  $ds = d\varphi$ ,

$$\begin{aligned} F &= \exp \left[ -k_r t - \frac{a^2 b^2}{4\xi^2} (k_d - k_r) \right] \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \\ &\int_{\Gamma} \exp \left[ \varphi \left( t - \frac{a^2 b^2}{4\xi^2} \right) + \frac{a^2 b^2 k_d k_r}{4\xi^2 \varphi} \right] \cdot \\ &\frac{1 - e^{-t_0(\varphi - k_r)}}{\varphi - k_r} d\varphi. \end{aligned} \quad (19)$$

再令

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp \left[ \varphi \left( t - \frac{a^2 b^2}{4\xi^2} \right) + \frac{a^2 b^2 k_d k_r}{4\xi^2 \varphi} \right] \cdot \frac{1 - e^{-t_0(\varphi - k_r)}}{\varphi - k_r} d\varphi, \quad (20)$$

式中,  $\xi, \varphi$  均为虚拟变量.

由文献[16]的 29.2.15 章节:

$$F(t-b)u(t-b) = L^{-1} e^{-bs} F(s), \quad b > 0. \quad (21)$$

对(20)式整理可得:

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp \left( -\varphi \cdot \frac{a^2 b^2}{4\xi^2} \right) \cdot \exp \left( \varphi t + \frac{a^2 b^2 k_d k_r}{4\xi^2 \varphi} \right) \cdot \frac{1 - e^{-t_0(\varphi - k_r)}}{\varphi - k_r} d\varphi. \quad (22)$$

令  $L^{-1} f(s) = g(t)$ , 则

$$g(t) = L^{-1} \frac{1 - e^{-t_0(\varphi - k_r)}}{\varphi - k_r} \cdot \exp \left( \frac{\alpha^2}{\varphi} \right), \quad (23)$$

式中,  $\alpha^2 = \frac{a^2 b^2 k_d k_r}{4\xi^2}$ .

由文献[17]附录 V 中的(3)式和(24)式:

$$\frac{L^{-1}}{s + \alpha} = e^{-\alpha t}, \quad (24)$$

$$\frac{L^{-1} e^{x/s}}{s} = I_0[2\sqrt{xt}], \quad (25)$$

式中,  $I_0$  是第一类零阶修正 Bessel 函数.

由文献[16]的 29.2.28 章节:

$$L \int_0^t F_1(t-\tau) F_2(\tau) d\tau = f_1(s) \cdot f_2(s), \quad (26)$$

$$\bar{g}(\varphi) = \frac{1}{\varphi - k_r} \exp \left( \frac{\alpha^2}{\varphi} \right) - e^{t_0 k_r} \frac{e^{-t_0 \varphi}}{\varphi - k_r} \exp \left( \frac{\alpha^2}{\varphi} \right).$$

令  $\bar{g}(\varphi)$  中第 1 部分为  $\bar{g}_1(\varphi)$ , 且第 2 部分为  $\bar{g}_2(\varphi)$ , 则:

$$\bar{g}_1(\varphi) = \frac{1}{\varphi} \exp \left( \frac{\alpha^2}{\varphi} \right) + \frac{k_r}{\varphi(\varphi - k_r)} \exp \left( \frac{\alpha^2}{\varphi} \right), \quad (27)$$

$$\bar{g}_2(\varphi) = -e^{t_0 k_r} \cdot e^{-t_0 \varphi} \cdot \bar{g}_1(\varphi). \quad (28)$$

对(27)式和(28)式运用拉普拉斯逆变换得:

$$g_1(t) = I_0[2\alpha\sqrt{t}] + k_r e^{k_r t} \int_0^t e^{-k_r \tau} I_0[2\alpha\sqrt{\tau}] d\tau, \quad (29)$$

$$g_2(t) = \begin{cases} -e^{t_0 k_r} \left\{ I_0[2\alpha\sqrt{t-t_0}] + k_r e^{k_r(t-t_0)} \int_0^{t-t_0} e^{-k_r \tau} I_0[2\alpha\sqrt{\tau}] d\tau \right\}, & t > t_0, \\ 0, & t \leq t_0, \end{cases} \quad (30)$$

所以,

$$g(t) = \begin{cases} h_1(t) + h_2(t), & t \leq t_0, \\ h_1(t) + h_2(t) - h_3(t), & t > t_0. \end{cases} \quad (31)$$

由拉普拉斯变换位移性质, 令  $\beta^2 = a^2 b^2 / 4$ , 当  $t > \beta^2 / \xi^2$  时, 令  $\lambda = t - \beta^2 / \xi^2$ , 可得下式:

$$g(\lambda) = \begin{cases} h_1(\lambda) + h_2(\lambda), & t \leq t_0, \\ h_1(\lambda) + h_2(\lambda) - h_3(\lambda), & t > t_0. \end{cases} \quad (32)$$

将(32)式代入(18)式和(19)式中, 当  $t < \beta^2 / \xi^2$  时, 算式为 0, 所以  $\xi > x / (2\sqrt{Dt})$ , 即短时注入时, 悬浮颗粒在多孔介质中的质量浓度为:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{2e^a}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{Dt})}^{\infty} h_4(t) \cdot g(\lambda) d\xi, \quad (33)$$

式中,

$$\begin{aligned} h_1(t) &= I_0[2\alpha\sqrt{t}], \\ h_2(t) &= k_r e^{k_r t} \int_0^t e^{-k_r \tau} I_0[2\alpha\sqrt{\tau}] d\tau, \\ h_3(t) &= e^{t_0 k_r} [h_1(t-t_0) + h_2(t-t_0)], \\ h_4(t) &= \exp \left( -\xi^2 - \frac{a^2}{4\xi^2} \right) \cdot \exp \left[ -k_r t - \frac{a^2 b^2}{4\xi^2} (k_d - k_r) \right] \end{aligned}$$

### 3 模型验证及分析

当  $t_0 \rightarrow \infty$ , 即由短时注射退化为边界浓度恒定注入情况, 此时悬浮颗粒在多孔介质中的质量浓度为:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{2e^a}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{Dt})}^{\infty} h_4(t, \xi) [h_1(\lambda) + h_2(\lambda)] d\xi, \quad (34)$$

上式所得的解析解与文献[13]相等.

对于得到的一维扩散解析解, 假设模型参数如表 1 所示, 通过 Matlab 编写程序进行计算, 绘制污染物的穿透曲线.

表 1 模型参数<sup>[18]</sup>

| 参数                                     | 数值   |
|----------------------------------------|------|
| $C_0/(\text{mg} \cdot \text{mL}^{-1})$ | 1    |
| $u/(\text{cm} \cdot \text{s}^{-1})$    | 0.15 |
| $D/(\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1})$  | 0.04 |
| $x/\text{cm}$                          | 20   |
| $k_d/\text{s}^{-1}$                    | 0.1  |
| $k_r/\text{s}^{-1}$                    | 0.01 |
| $t_0/\text{s}$                         | 1    |

图1给出了短时注入条件下,3种不同时刻对应的质量浓度 $C$ 与距离 $x$ 的关系曲线。从图中可见,颗粒质量浓度 $C$ 随着距离 $x$ 的增大先增大到峰值,再随着距离的不断增大而减小到0,整体呈抛物线型;随着时间 $t$ 的增大( $t$ 从250 s→700 s→1 200 s)颗粒质量浓度的峰值减小,并且峰值所对应的 $x$ 值变大,这是因为随着时间变化,颗粒迁移的距离不断变长,在迁移过程中由于筛滤作用和沉积作用,多孔介质中的颗粒含量变多,对应的颗粒质量浓度峰值变小。

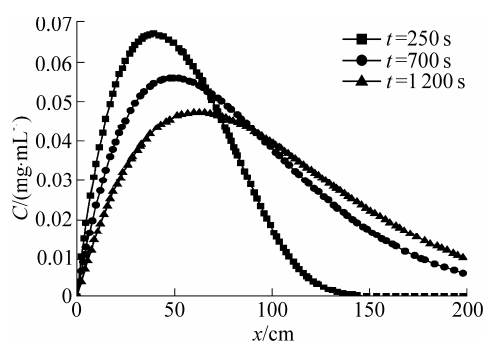


图1 在不同时刻,悬浮颗粒 $C-x$ 的关系曲线

图2为短时注射1 s时悬浮颗粒的穿透曲线。悬浮颗粒的质量浓度在前期为零,这是因为需要一些时间才能使颗粒到达观察位置(20 cm),然后颗粒质量浓度不断变大至峰值,随后降低直至为零。当沉积系数 $k_d$ 变大时,颗粒质量浓度前期增长缓慢,这是因为沉积在多孔介质中的颗粒变多,到达观察位置的浓度降低,并且对应的峰值变小,峰值对应的时刻变大;当 $k_d$ 从0.1→0.11→0.12变化时,对应的峰值分别为0.077→0.068→0.059,峰值对应的时刻分别为1 150 s→1 450 s→1 800 s,可见沉积系数对颗粒在多孔介质中渗透迁移过程具有重要影响。与图2对应的图3为改变释放系数 $k_r$

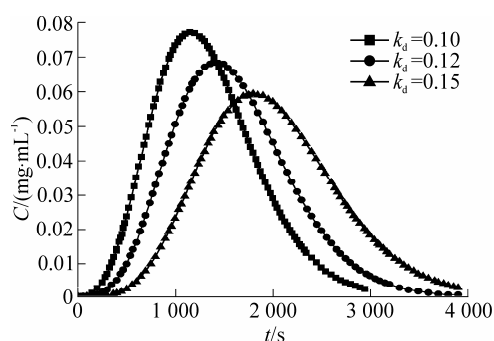


图2 随沉积系数改变,悬浮颗粒 $C-t$ 的关系曲线

情况下,颗粒质量浓度与时间的关系曲线。与图2变化规律相反,随着释放系数增大,质量浓度对应峰值变大,并且峰值对应的时刻变小;前期质量浓度增加速度变大,在更短时间内到达峰值,所以峰值对应的时刻变小。当释放系数 $k_r$ 从0.015→0.02,会发现随着深度增大,不同释放系数对应的峰值差变小,例如当 $x=5$  cm时,峰值差为0.09,当 $x=10$ , 15, 20 cm时,峰值分别为0.053, 0.048, 0.042。虽然

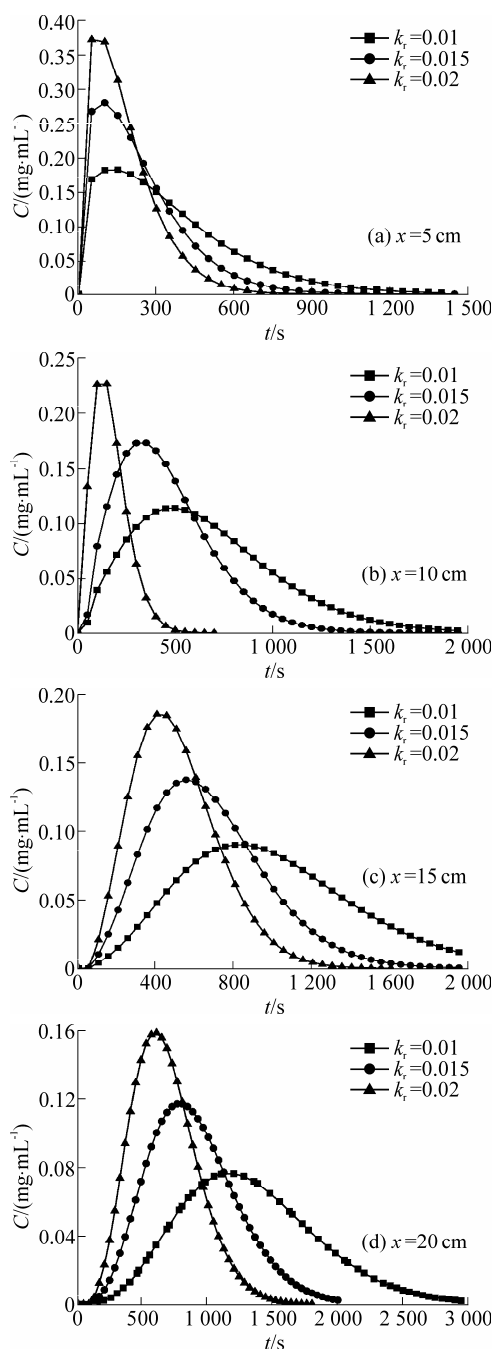


图3 不同位置随释放系数改变,悬浮颗粒 $C-t$ 关系曲线

释放系数增大会释放更多颗粒,但是随着深度增大,更多的孔隙被堵塞或者孔隙变小,颗粒迁移路径变少,同时,颗粒迁移路径变长,物理或者化学的影响变大,所以浓度峰值差变小。在  $x=5, 10$  cm 时,峰值差的变化最大,也间接说明悬浮颗粒在刚进入多孔介质时,就会由于筛滤作用在多孔介质表面及孔隙通道中发生沉积,并可能造成堵塞,悬浮颗粒在表面沉积对后面的颗粒迁移产生很大的影响,这与在土柱实验中观察到的现象类似<sup>[18]</sup>。相比于沉积系数,穿透曲线对释放系数更为敏感,在图 3(d)中,当  $k_f$  从 0.01→0.015→0.02 变化时,峰值分别为 0.077→0.117→0.159,这对研究不同颗粒种类、多孔介质的性质具有重要影响。

当深度改变时,颗粒质量浓度与时间关系曲线如图 4 所示。相较于  $x=10, 15, 20$  cm,  $x=5$  cm 时,由于此时沉积在多孔介质中的颗粒较少,质量浓度很快就到达峰值,随后质量浓度以更大的速率降低;伴随深度变大,质量浓度增加较缓,峰值也依次降低,峰值对应的时刻明显延迟。从  $x=5$  cm 到  $x=10$  cm 的曲线变化最大,这是因为水动力作用会对颗粒滞留产生显著的影响。当水动力作用较小时,颗粒的滞留主要集中在多孔介质入口处,模型参数设置的水动力作用较小,随着深度的增加,颗粒沉积量也增加,导致孔隙堵塞,渗透性降低,流出的颗粒质量浓度降低。与曲线前半部分相比,曲线在质量浓度降低部分有明显的“拖尾”现象,这是考虑了悬浮颗粒沉积再释放的过程。颗粒由于密度和尺寸或者重力作用影响沉积在多孔介质中,通过弥散缓慢进入对流区,使得渗流过程产生滞后效应,并且释放系数越大,拖尾现象越明显。

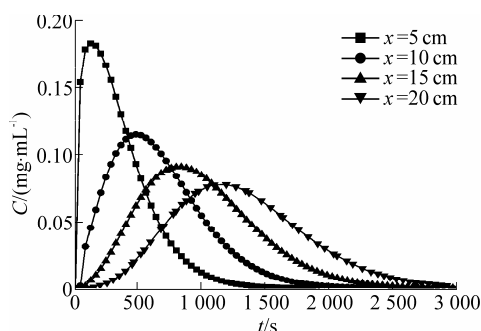


图 4 随深度  $z$  改变, 悬浮颗粒  $C-t$  关系曲线

如图 5 所示,随着注射时间  $t_0$  的增加,最大质量浓度增加,最大质量浓度对应的时刻变化不大,

图形整体呈对称性。

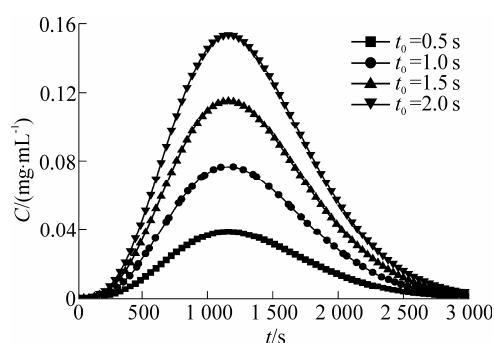


图 5 随注射时间  $t_0$  改变, 悬浮颗粒  $C-t$  关系曲线

## 4 结论

(1)通过 Laplace 变换及其逆变换,根据饱和多孔介质中考虑释放效应的颗粒迁移的一维扩散控制方程,结合短时注射的初始、边界条件,求得其解析解;并且将短时注射情况退化,得到恒定注入情况的解析解,从而验证结果的正确性。

(2)研究了沉积系数、释放系数、注射时间和深度变化对质量浓度曲线的影响。分析结果表明,沉积系数与释放系数对颗粒迁移过程具有重要影响,并且穿透曲线对释放系数更为敏感;随着释放系数的增大,质量浓度变化显著。

(3)由于水动力作用,随着深度增大,质量浓度峰值减小,对应的时刻延迟显著,并且不同释放系数对应的峰值差变小,间接表明悬浮颗粒在表面沉积对后面的颗粒迁移产生很大的影响。

(4)探究了曲线“拖尾”现象的产生原因。由于沉积再释放作用,使得渗流过程产生滞后效应,所以当释放系数越大,拖尾现象越明显。

## 参考文献:

- [1] McCarthy J E, Zachara J M. Subsurface transport of contaminants[J]. Environmental Science & Technology, 1989, 23(5):496-502.
- [2] Ryan J N, Elimelech M. Colloid mobilization and transport in groundwater[J]. Colloids & Surfaces: A Physico-chemical & Engineering Aspects, 1996, 107(95):1-56.
- [3] Saiers J E. Laboratory observations and mathematical modeling of colloid-facilitated contaminant transport in chemically heterogeneous systems[J]. Water Resources Research, 2002, 38(4):1032-1044.
- [4] Keller A A, Auset M. A review of visualization techniques of biocolloid transport processes at the pore scale under

- saturated and unsaturated conditions[J]. *Advances in Water Resources*, 2007, 30(6):1392-1407.
- [5] Abdullah W S, Alshibli K A, Al-Zou'bi M S. Influence of pore water chemistry on the swelling behavior of compacted clays[J]. *Applied Clay Science*, 1999, 15(5): 447-462.
- [6] 陈云敏, 谢海建, 柯瀚, 等. 层状土中污染物的一维扩散解析解[J]. *岩土工程学报*, 2006, 28(4):521-524.
- [7] Kretzschmar R, Barmettler K, Grolimund D, et al. Experimental determination of colloid deposition rates and collision efficiencies in natural porous media[J]. *Water Resources Research*, 1997, 33(5):1129-1137.
- [8] Grolimund D, Elimelech M, Borkovec M, et al. Transport of in situ mobilized colloidal particles in packed soil columns[J]. *Environmental Science & Technology*, 1998, 32(22):3562-3569.
- [9] Wang H, Lacroix M, Massei N, et al. Particle transport in a porous medium: Determination of hydrodispersive characteristics and deposition rates[J]. *Earth and Planetary Science*, 2000, 331(2):97-104.
- [10] Ahfir N D, Wang H Q, Benamar A, et al. Transport and deposition of suspended particles in saturated porous media: Hydrodynamic effect[J]. *Hydrogeology Journal*, 2007, 15(4):659-668.
- [11] Tufenkji N, Elimelech M. Deviation from the classical colloid filtration theory in the presence of repulsive DLVO interactions[J]. *Langmuir*, 2004, 20(25):10818-10828.
- [12] Corapcioglu M Y, Jiang S. Colloid facilitated ground-water contaminant transport[J]. *Water Resources Research*, 1993, 29(7):2215-2226.
- [13] Ogata A. *Mathematics of Dispersion with Linear Adsorption Isotherm*[M]. Washington: US Government Printing Office, 1964.
- [14] 陈星欣. 饱和多孔介质中颗粒迁移和沉积特性研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2012.
- [15] Zamani A, Maini B. Flow of dispersed particles through porous media: Deep bed filtration[J]. *Journal of Petroleum Science & Engineering*, 2009, 69(1):71-88.
- [16] Abramowitz M, Stegun I A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*[M]. 10th ed. New York: Academic Press, 1972.
- [17] Ezekoye O A. Conduction of heat in solids[J]. *Physics Today*, 1962, 15(11):74-76.
- [18] 刘泉声, 崔先泽, 张程远, 等. 粒径对多孔介质中悬浮颗粒迁移——沉积特性的影响[J]. *岩土工程学报*, 2014, 36(10):1777-1783.

## Modified model and analytical solution of one-dimensional transport of suspended particles in saturated porous media

XUE Chuan-cheng, WANG Yan\*, LIU Gan-bin, CHENG Guan-chu, GUO Hua, WU Zhang-yan

(Institution of Geotechnical Engineering, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

**Abstract:** The migration of suspended particles in saturated porous media has attracted much attention. This study is of significant importance in the aspects of environmental protection, pollution transfer, and other aspects of human engineering. The classical particle migration model was modified to take into account the deposition and re-release of particles in the sedimentation kinetics equation. Combining the initial and boundary conditions of short-term injection, the analytical solution was obtained by Laplace transform and its inverse transformation. The numerical method was used to calculate and verify the correctness of the analytical solution. The analytical solution was degenerated under short-time injection conditions to obtain an analytical solution at a constant injection concentration, verifying the correctness of the results. Finally, the influence of the parameters such as sedimentation coefficient, release coefficient, injection time and depth on the concentration curve was studied. The results indicate that the change of concentration curve is more sensitive to release factor. Due to the sediment release effect, the breakthrough curve has a “tailing” phenomenon.

**Key words:** porous media; one-dimensional diffusion; Laplace transformation; release effect

(责任编辑 章践立)