

势 Korteweg-de Vries 方程的暗方程分类

陈 觅, 李 彪*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 通过要求势 Korteweg-de Vries (KdV) 方程和线性扩展方程具有高阶对称, 获得了势 KdV 方程的完整的暗方程标量分类: 8 类具有若干自由参数的相互独立的暗方程. 然后通过一个直接假设方法, 获得了势 KdV 方程的 8 类暗方程的递归算子.

关键词: 暗方程; 势 Korteweg-de Vries 方程; 递归算子

中图分类号: O175.29

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2019) 01-0080-04

目前的天文观测表明, 宇宙中可见的重子物质仅占宇宙总能量组成的 4% 左右, 看不见的暗物质占 23%, 而宇宙中占能量组成 73% 的成分是以看不见的暗能量形式存在的^[1-3]. 类比于宇宙学中暗物质与暗能量的概念, Kupershmidt^[4] 在非线形方程研究中提出了暗方程的概念, 其基本思想为:

给定 2 个动力系统 X 和 Y :

$$(X) \quad u_t = X(u), \quad (1)$$

$$(Y) \quad u_t = Y(u), \quad (2)$$

寻找它们具有下面形式的所有线性扩展 X^{ext} 和 Y^{ext} :

$$(X^{\text{ext}}) \quad u_t = X(u), \quad v_t = A_1(u), \quad (3)$$

$$(Y^{\text{ext}}) \quad u_t = Y(u), \quad v_t = A_2(u), \quad (4)$$

这里 v 是一个向量, 且 $A_j(u), j=1,2$ 是只与 u 有关而与 v 无关的矩阵线性微分算子. 根据交换性:

$$[X, Y] = 0, \quad (5)$$

$$[X^{\text{ext}}, Y^{\text{ext}}] = 0, \quad (6)$$

可获得所研究系统的暗方程, 即线性扩展方程.

这些方程在思想上类似于给定系统线性化得到的结果, 或者研究外部线性波如何与给定系统特解的相互作用. 根据线性扩展方程(5)和(6), 对给定的可积模型(1)和(2)给出完整的分类很有意义.

对 Korteweg-de Vries (KdV) 方程, 文献[4]给出了一个完整的标量分类. 大多数暗方程与物理模型密切相关, 如 KdV 方程的对称方程, Lax 对的时间部分, 超 KdV 方程的玻色化^[5], 超对称玻色超场的

玻色化, Manin-Radul 超对称费米超场的玻色化^[6-7]. 在 Kupershmidt 提出非线性方程暗方程的概念并给出了暗 KdV 方程的分类后, 有学者得到了暗的修正 KdV 方程的分类, 并计算了两类暗修正 KdV 系统的递归算子^[8-9]. 这种暗方程分类的方法在非线形科学的理论及应用中有重要意义^[10-14]. 文献[15]研究了势 KdV 方程的可积性; 文献[16]获得了奇异孤子、冲击波和势 KdV 方程的其他的解; 文献[5]研究了一维和二维空间势 KdV 方程; 文献[6]研究了 sine-Gordon 方程, 修正 KdV 方程和势 KdV 方程的可积性.

本文通过求势 KdV 方程和线性扩展方程具有高阶对称, 获得势 KdV 方程完整的暗方程标量分类. 暗方程可能是可积的, 因为其线性, 且存在更高阶的对称, 这意味着暗方程可能存在无限多的高阶对称, 只需找到暗方程的递归算子或主对称就能保证暗方程存在无限多的高阶对称.

1 势 KdV 方程的暗方程

事实上, 在 Kupershmidt 对暗方程的定义中, 式(2)和(4)分别是式(1)和式(3)的高阶对称, 因此意味着原始模型(1)和其扩展式(3)都是可积的. 对于势 KdV 方程:

$$u_t = u_{xxx} + 3u_x^2, \quad (7)$$

其对称方程如下:

收稿日期: 2018-06-22.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金 (11775121, 11435005); 宁波大学王宽诚幸福基金.

第一作者: 陈觅 (1991-), 女, 河南商丘人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 非线性偏微分方程. E-mail: 1732756730@qq.com

*通信作者: 李彪 (1971-), 男, 湖南会同人, 教授, 主要研究方向: 数学物理与数学机械化. E-mail: libiao@nbu.edu.cn

$$\sigma_t^u = \sigma_{xxx}^u + 6u_x \sigma_x^u. \quad (8)$$

势 KdV 方程的五阶对称方程为:

$$\sigma^u = u_{xxxxx} + 10u_x u_{xxx} + 5u_{xx}^2 + 10u_x^3. \quad (9)$$

基于高阶对称性理论, 本文假设势 KdV 方程 (7) 的线性齐次扩展方程的形式为:

$$v_t = c_1 v_{xxx} + c_2 v_{xx} u + c_3 v_x u_x + c_4 v_x u^2 + c_5 v u_{xx} + c_6 v u_x u + c_7 v u^3, \quad (10)$$

方程 (7) 的五阶对称扩展方程为:

$$\begin{aligned} \sigma^v = & d_1 v_{xxxxx} + d_2 v_{xxx} u + d_3 v_{xx} u_x + d_4 u^2 + \\ & d_5 v_{xx} u_{xx} + d_6 u u_x v_{xx} + d_7 v_{xx} u^3 + d_8 v_x u_{xxx} + \\ & d_9 v_x u_{xx} u + d_{10} v_x u_x^2 + d_{11} v_x u_x u^2 + d_{12} v_x u^4 + \\ & d_{13} v u_{xxx} + d_{14} v u_{xx} + d_{15} v u_{xx} u_x + d_{16} v u_{xx} + \\ & d_{17} v u_x^2 u + d_{18} v u_x u^3 + d_{19} v u^5, \end{aligned} \quad (11)$$

方程 (7) 和 (10) 被称为暗的势 KdV 系统. 通过求解 $c_i (i=1, 2, \dots, 7)$, $d_j (j=1, 2, \dots, 19)$, 使得 σ^v 满足对称方程 (12), 进而可推导出式 (10) 的所有独立模型.

$$\begin{aligned} \sigma_t^v = & c_1 \sigma_{xxx}^v + c_2 \sigma_{xx}^v u + c_3 v_{xx} \sigma^u + c_4 \sigma_x^v u_x + c_5 \sigma_x^v u^2 + \\ & c_3 \sigma_x^u v_x + 2c_4 v_x u \sigma_x^u + c_5 \sigma_x^v u_{xx} + c_6 \sigma_x^v u_x u + c_7 \sigma_x^v u^3 + \\ & c_5 v \sigma_{xx}^u + c_6 \sigma_x^u v u + c_6 \sigma_x^u v u_x + 3c_7 v \sigma^u, \end{aligned} \quad (12)$$

将式 (9)、(11)、(7) 和 (10) 一起代入式 (12), 得到 58 个含有 26 个参量 $c_i (i=1, 2, \dots, 7)$ 和 $d_j (j=1, 2, \dots, 19)$ 的复杂超定非线性代数方程组.

通过符号计算软件 Maple 对上述方程组进行分析和计算, 可以得到 9 类方程. 比较 9 类方程的系数关系, 发现有 2 类可以归结到同一个含有参数的方程中去, 所以本文得到 8 类独立的暗的势 KdV 模型. 这里只列出 v_t 及其相关的五阶对称性 σ^v 的扩展方程.

第 1 类暗方程:

$$v_t = a v u_{xx} + 2v_x u_x, \quad (13)$$

$$\sigma^v = 2v_x u_{xxx} + 6v_x u_x^2 + a v u_{xxxx} + 6a v u_{xx} u_x, \quad (14)$$

其中 a 是自由参数.

第 2 类暗方程:

$$v_t = b v_{xxx}, \quad (15)$$

$$\sigma^v = c v_{xxxxx}, \quad (16)$$

其中 b 和 c 是自由参数.

对于第 2 类暗势 KdV 系统扩展, 有一些自由参数. 显然, 这样的分解系统可用于任何矢量场的任意系统. 对于第 2 类暗势 KdV 系统退化到

$$v_t = m \partial^{2n-1} v, n \in N, m = c/b, \quad (17)$$

所有这些都是自对偶扩展.

第 3 类暗方程:

$$v_t = -6v_x u_x - 2v_{xxx}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sigma^v = & -4v_{xxxxx} - 20v_{xxx} u_x - 20v_{xx} u_{xx} - \\ & 10v_x u_{xxx} - 106v_x u_x^2. \end{aligned} \quad (19)$$

第 4 类暗方程:

$$v_t = 3v_x u_x + v_{xxx}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma^v = & v_{xxxxx} + 5v_{xxx} u_x + 5v_{xx} u_{xx} + \\ & 10v_x u_{xxx} + 106v_x u_x^2. \end{aligned} \quad (21)$$

这是势 KdV 方程对称对偶方程, 对称对偶耦合系统也是所有可积系统的有意义的暗扩张.

第 5 类暗方程:

$$v_t = 6v_x u_x + v_{xxx}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sigma^v = & v_{xxxxx} + 10v_{xxx} u_x + 10v_{xx} u_{xx} + \\ & 10v_x u_{xxx} + 30v_x u_x^2. \end{aligned} \quad (23)$$

第 6 类暗方程:

$$v_t = 3v_x u_x + 3v u_{xx} + v_{xxx}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma^v = & v_{xxxxx} + 5v_{xxx} u_x + 10v_{xx} u_{xx} + 10v_x u_{xxx} + \\ & 10v_x u_x^2 + 5v u_{xxxx} + 20v u_{xx} u_x. \end{aligned} \quad (25)$$

第 7 类暗方程:

$$v_t = 6v_x u_x + 6v u_{xx} + v_{xxx}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \sigma^v = & v_{xxxxx} + 10v_{xxx} u_x + 20v_{xx} u_{xx} + 20v_x u_{xxx} + \\ & 30v_x u_x^2 + 10v u_{xxxx} + 60v u_{xx} u_x. \end{aligned} \quad (27)$$

第 8 类暗方程:

$$v_t = 6v_x u_x + 3v u_{xx} + 4v_{xxx}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sigma^v = & 16v_{xxxxx} + 40v_{xxx} u_x + 60v_{xx} u_{xx} + 50v_x u_{xxx} + \\ & 30v_x u_x^2 + 15v u_{xxxx} + 30v u_{xx} u_x. \end{aligned} \quad (29)$$

2 暗势 KdV 方程的递归算子

一般来说, 具有高阶对称的方程可能有无穷多的高阶对称. 找到方程的一个递归算子或一个主对称就可以证明该方程具有无穷多的高阶对称. 计算给定可积系统的递归算子是相当困难的. 很多研究都专注于基于 Lax 算子的相关理论, 利用 Lax 算子平方的特征函数方程来构造递归算子^[17-19], 亦或使用哈密顿算子来实现^[20]. 本文给出了一种构造递归算子的简捷方法, 进而利用提出的直接假设方法获得 8 类暗方程的递归算子, 用递归算子验证了这几类方程具有七阶对称性.

第 1 类暗方程的一阶对称是:

$$\sigma_1^u = u_x, \quad (30)$$

表 1 递归算子

类	$\mathcal{R}_{21}$	$\mathcal{R}_{22}$
1	$2v_x - u\partial_x^{-1}v_x - \partial_x^{-1}v_{xx} + \partial_x^{-1}uv_x$	$2u_x + u\partial_x^{-1}u_x - \partial_x^{-1}u_{xx} - \partial_x^{-1}uu_x + \partial_{xx}$
2	0	$m\partial_{xx}$
3	$2v_x + av\partial_x$	0
4	$-8v_x - 2u\partial_x^{-1}v_x - 2\partial_x^{-1}v_{xx} + 2\partial_x^{-1}uv_x$	$4u_x + 2u\partial_x^{-1}u_x - 2\partial_x^{-1}u_{xx} - 2\partial_x^{-1}u_xu - 2\partial_{xx}$
5	$4v_x - 2\partial_x^{-1}v_{xx}$	$4u_x - 2\partial_x^{-1}u_{xx} + \partial_{xx}$
6	$v_x - u_x\partial_x^{-1}v + 2v\partial_x$	$2u_x - u_x\partial_x^{-1}u + (u_{xx} + uu_x)\partial_x^{-1} + \partial_{xx}$
7	$2v_x + 4v\partial_x$	$4u_x + 2u_{xx}\partial_x^{-1} + \partial_{xx}$
8	$2v_x + 3v\partial_x$	$4u_x + 4\partial_{xx}$

$$\sigma_1^v = v_x. \quad (31)$$

其三阶对称是:

$$\sigma_3^u = u_{xxx} + 3u_x^2, \quad (32)$$

$$\sigma_3^v = -2v_{xxx} - 6v_x u_x. \quad (33)$$

其五阶对称是:

$$\sigma_5^u = u_{xxxxx} + 10u_x u_{xxx} + 5u_{xx}^2 + 10u_x^3, \quad (34)$$

$$\sigma_5^v = -4v_{xxxxx} - 20v_{xxx}u_x - 20v_{xx}u_{xx} - 10v_x u_{xxx} - 10v_x u_x^2. \quad (35)$$

根据对称性理论和势 KdV 性质, 本文假设强对称算子 $\mathcal{R}$ 形式为:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{11} & 0 \\ \mathcal{R}_{21} & \mathcal{R}_{22} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

势 KdV 方程的递推算子是:

$$\mathcal{R}_{11} = \partial_{xx} + 4u^2 + 4u_x + \partial^{-1}u, \quad (37)$$

和

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{21} = & (b_1v_x + b_2uv) + (b_3v_{xx} + b_4uv_x + b_5u_xv + \\ & b_6u^2v)\partial_x^{-1} + 4u^2 + (b_7v_x + b_8vu)\partial_x^{-1}u + \\ & (b_9u^2 + b_{10}u_x)\partial_x^{-1}v + b_{11}v\partial_x^{-1}u_x + b_{12}v\partial_x + \\ & b_{13}u\partial_x^{-1}v_x + b_{14}u\partial_x^{-1}uv + b_{15}\partial_x^{-1}v_{xx} + b_{16}\partial_x^{-1}uv_x + \\ & b_{17}\partial_x^{-1}u^2v + b_{18}\partial_x^{-1}u_xv + b_{19}v\partial_x^{-1}u^2. \end{aligned} \quad (38)$$

$\mathcal{R}_{22}$ 和 $\mathcal{R}_{21}$ 类似, 只需用 k_i 代替 $\mathcal{R}_{21}$ 中的 b_i , 其中 b_i 和 k_i ($i=1,2,3,\dots,19$) 是未确定参量.

根据强对称性的定义, 我们有:

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} \sigma_1^u \\ \sigma_1^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_3^u \\ \sigma_3^v \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} \sigma_5^u \\ \sigma_5^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_7^u \\ \sigma_7^v \end{pmatrix}. \quad (40)$$

进而使用 Maple 软件进行计算, 得到:

$$\mathcal{R}_{21} = 2v_x - u\partial_x^{-1}v_x - \partial_x^{-1}v_{xx} + \partial_x^{-1}uv_x, \quad (41)$$

$$\mathcal{R}_{22} = 2u_x - u\partial_x^{-1}u_x - \partial_x^{-1}u_{xx} + \partial_x^{-1}uu_x + \partial_{xx}. \quad (42)$$

接下来需要验证强对称算子是暗方程的递归算子. 我们可以用递归算子的定义进行验证, 限于篇幅, 不在文中写出验证过程. 其实, 利用上述递归算子, 可以简单验证:

$$\mathcal{R} \begin{pmatrix} \sigma_5^u \\ \sigma_5^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_7^u \\ \sigma_7^v \end{pmatrix}. \quad (43)$$

从得到第 1 类暗势 KdV 方程的递归算子可知, 这类暗方程具有无穷多的高阶对称. 用同样的方法, 可以得到 8 类暗方程的递归算子(表 1).

3 结语

本文主要研究了势 KdV 系统的暗方程分类. 研究表明: 共有 8 类暗势 KdV 方程, 其中有些暗方程包含了对称方程、对称对偶方程等特殊方程. 进而通过一个直接假设方法, 构造了 8 类暗势 KdV 方程的递归算子, 意味着这些暗方程具有无穷多对称, 也是可耦合系统. 由于暗 pKdV 和暗 KdV 系统的发现, 人们可以对各相关问题作进一步探索, 特别是与暗方程紧密相关的超系统、超对称系统和其他非对耦系统. 本文构造暗方程和相应递归算子的方法也适用于其他非线性方程. 同时, 讨论了非线性方程的线性齐次扩展, 在后续工作中我们将研究线性非齐次或非线性扩展. 此外, 广义暗方程的显式解可以通过对称约化、达布变换、广田双线性、贝克隆变换等方法获得. 对暗方程的求解将在后续工作中研究.

参考文献:

- [1] 蔡荣根, 周宇峰. 暗物质与暗能量研究新进展[J]. 中国基础科学, 2010, 12(3):3-9.
- [2] Perlmutter S, Turner M S, White M. Constraining dark energy with SNe Ia and large-scale structure[J]. Physical Review Letters, 1999, 83:670-673.
- [3] Silk J. Challenges in cosmology from the big bang to dark energy, dark matter and galaxy formation[J]. Nuclear Physics, 1988, 310:669-692.
- [4] Kupershmidt B A. Dark equations[J]. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2001, 8(3):363-445.
- [5] Wazwaz A M. Analytic study on the one and two spatial dimensional potential KdV equations[J]. Chaos, 2008, 36: 175-181.
- [6] Tran D T, Kamp P H V D, Quispel G R W. Involutivity of integrals of sine-Gordon, modified KdV and potential KdV maps[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2010, 44(29):1651-1659.
- [7] Fordy A P, Gibbons J. Factorization of operators I: Miura transformations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1980, 21(10):2508-2510.
- [8] Xiong N, Lou S Y, Li B, et al. Classification of dark modified KdV equation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2017, 68:13-20.
- [9] 陈玉福, 张鸿庆. 微分方程递归算子的一种推广[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(11):1143-1148.
- [10] Liu H, Li J, Zhang Q. Lie symmetry analysis and exact explicit solutions for general Burgers equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 228: 1-9.
- [11] Huang L L, Chen Y. Nonlocal symmetry and exact solutions of the (2+1)-dimensional modified Bogoyavlenskii-Schiff equation[J]. Chinese Physics B, 2016, 25(6):63-70.
- [12] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. New York: Springer, 1998:75-238.
- [13] Li B, Li Y Q, Chen Y. Finite symmetry transformation groups and some exact solutions to (2+1)-dimensional cubic nonlinear Schrödinger equation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2009, 51:773-776.
- [14] Tian S F, Zhou S W, Jiang W Y, et al. Analytic solutions, Darboux transformation operators and super symmetry for a generalized one-dimensional time-dependent Schrödinger equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218:7308-7321.
- [15] Hone A N W, Kamp K P H, Quispel G R W, et al. Integrability of reductions of the discrete Korteweg-de Vries and potential Korteweg-de Vries equations[EB/OL]. [2018-03-16]. <https://www.researchgate.net/publication/258728367>.
- [16] Wang G W, Xu T Z, Ebadi G, et al. Singular solitons, shock waves, and other solutions to potential KdV equation[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 76:1059-1068.
- [17] Fokas A S. Symmetries and integrability[J]. Studies in Applied Mathematics, 1987, 77(3):253-299.
- [18] Fokas A S, Santini P M. Recursion operators and bi-Hamiltonian structures in multidimensions II[J]. Communications in Mathematical Physics, 1988, 116: 449-474.
- [19] Tian K L, Zhu X M, He J S. On recursion operator of the q-KP hierarchy[J]. Communications in Theoretical Physics, 2016, 63(3):325-328.
- [20] Symes W. Relations among generalized Korteweg-de Vries systems[J]. Journal of Mathematical Physics, 1979, 20(4):721-725.

Classification of dark potential Korteweg-de Vries equation

CHEN Mi, LI Biao^{*}

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, we obtain a complete scalar classification for dark potential Korteweg-de Vries (pKdV) equation system by requiring the existence of higher order differential polynomial symmetries. There exist eight independent classes of dark pKdV equation with some free parameters. The recursion operators of dark pKdV equations are then constructed using a direct assumption method.

Key words: dark equation; potential Korteweg-de Vries equation; recursion operator

(责任编辑 史小丽)