

Banach 空间中迭代正则化方法的收敛性分析

王佳敏, 王金平*

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 利用 Landweber-Kaczmarz 迭代算法研究非线性不适定问题. 首先, 在 Banach 空间引入 Bregman 距离, 构造合适的步长, 说明 Bregman 距离序列在迭代算法中是单调递减的. 然后, 由凸分析、对偶映射和 Fréchet 可微的性质得到迭代算法具有收敛性.

关键词: Landweber-Kaczmarz 迭代算法; 收敛性; Bregman 距离; Fréchet 可微

中图分类号: O177; O175.5 文献标志码: A 文章编号: 1001-5132 (2019) 01-0084-05

在 Hilbert 空间中, 不适定问题的正则化方法已取得了一定的成果. Hanke 等^[1]分析了 Landweber 迭代应用于非线性不适定问题的收敛性, Haltmeier 等^[2]分析了 Kaczmarz 方法解决非线性不适定方程问题. 随后, 学者们将迭代算法推广到 Banach 空间也取得一些成果. Hofmann 等^[3]利用光滑算子给出了 Tikhonov 正则化方法在 Banach 空间中的收敛速度. 随着研究的进一步深入, 在 Banach 空间中引入 Bregman 距离, 提出了非线性的 Landweber 迭代, Schöpfer 和 Kaltenbacher 等^[4-5]从各个方面对非线性的 Landweber 迭代算法进行了研究. 近年来, Jin 和 Leitão 等^[6-8]提出了 Landweber-Kaczmarz 型迭代算法, 这种迭代算法不仅收敛性好, 而且迭代速度快. 其主要思想是将非线性问题转化成线性问题来解决, 即考虑算子方程:

$$F_i(x) = y_i, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (1)$$

设 X 和 Y 是 Banach 空间, $D = \bigcap_{i=1}^{N-1} D(F_i) \neq \emptyset$,

且 F_i Fréchet 可微, $h: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ 是下半连续 p 阶真凸泛函, 初值 $x_0 \in D(\partial h)$, $\xi \in \partial h(x_0)$. 求满足下式解的问题:

$$H_{\xi_0} h(x^*, x) = \min_{x \in D(h) \cap D} \{H_{\xi_0} h(x, x_0) : F_i(x) = y_i, i = 0, \dots, N-1\}.$$

本文在前人研究基础上, 通过构造合适步长, 得到 Bregman 距离序列在迭代中的单调性, 再结

合现有的相关结果, 给出了非线性 Landweber-Kaczmarz 迭代算法在无扰动因素影响下的强收敛性.

1 预备知识

设 X 和 Y 是 Banach 空间, X^* 和 Y^* 分别是其对偶空间, 对任意的 $x \in X$, $\xi \in X^*$ 定义对偶内积 $\langle x, \xi \rangle = \langle \xi, x \rangle = \xi(x)$. $L: X \rightarrow Y$ 是有界线性算子, $L^*: Y^* \rightarrow X^*$ 是其对偶算子, 即 $\langle L^* y^*, x \rangle = \langle y^*, Lx \rangle$, 对任意的 $x \in X, y \in Y^*$ 都成立. 设零空间 $N(L) = \{x \in X : Lx = 0\}$, 如果是自反空间, 则 $N(L)^\perp = \overline{R(L^*)}$. 在实际应用中, 收集到的数据一般会受到各种因素的影响, 这种扰动数据与实际数据满足 $\|y^\delta - y\| \leq \delta$.

定义 1 设 X 是 Banach 空间, 对偶映射 $A_b: X \rightarrow 2^{X^*}$ 为 $A_b(x) = \{\xi \in X^* : \langle \xi, x \rangle = \|x\|^b, \|\xi\| = \|x\|^{b-1}\}$.

定义 2 设 X 是 Banach 空间, $h: D(h) \subset X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ 是凸泛函, $\partial h(x)$ 是齐次微分, Bregman 距离定义为 $H_\xi h(z, x) := h(z) - h(x) - \langle \xi, z - x \rangle$. 若 h 是 p 阶凸泛函, 则对任意的 $\hat{x} \in X, x \in D(\partial h)$, 都存在一个常数 a , 使得

$$H_\xi h(\hat{x}, x) \geq a \|\hat{x} - x\|^p, \quad (2)$$

且 h^* Fréchet 可微, 梯度 $\nabla h^*: X^* \rightarrow X$ 满足:

$$h^*(\xi_1) - h^*(\xi_2) - \langle \xi_1 - \xi_2, \nabla h^*(\xi_1) \rangle \leq \|\xi_1 - \xi_2\|^q / (q(2a)^{q-1}), \quad (3)$$

任意的 $\xi_1, \xi_2 \in X^*$, 其中, p 与 q 共轭, 即 $1/p + 1/q = 1$.

注 1 由次微分运算可得:

$$x = \nabla h^*(\xi) \Leftrightarrow x = \arg \min_{z \in X} \{h(z) - \langle \xi, z \rangle\}. \quad (4)$$

定义 3 设 X 是 Banach 空间, $h: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ 是下半连续真凸泛函, 其共轭泛函定义如下:

$$h^*(\xi) := \sup_{x \in X} \{\langle \xi, x \rangle - h(x)\}, \quad \xi \in X^*.$$

若 X 是自反空间, 则

$$\xi \in \partial h(x) \Leftrightarrow \partial h^*(\xi) \Leftrightarrow h^*(\xi) + h(x) = \langle \xi, x \rangle. \quad (5)$$

为了更好地讨论问题, 我们作如下假设:

(1) 存在正常数 $\kappa > 0$, 使得 $D_{2\kappa}(x_0) \subset D$, 且(1)式在 $D_{2\kappa}(x_0) \cap D(h)$ 内有解;

(2) F_i 在 D 上有界, 在 $D_{2\kappa}(x_0)$ 内 Fréchet 可微, 且 $x \rightarrow F_i''(x)$ 连续, $i = 0, \dots, N-1$;

(3) $\{F_i\}_{i=1 \leq i \leq N-1}$ 在 $D_{2\kappa}(x_0)$ 内满足切向锥条件, 即存在常数 $0 \leq \beta < 1$, 使得

$$\|F_i(x) - F_i(\hat{x}) - F_i'(\hat{x})(x - \hat{x})\| \leq \beta \|F_i(x) - F_i(\hat{x})\|,$$

对任意的 $x, \hat{x} \in D_{2\kappa}(x_0)$, $i = 0, \dots, N-1$ 成立.

2 主要结果

设 X 是 Banach 空间, 对任意的 $0 < b < \infty$, 对偶映射 $A_b^{Y_i}: Y_i \rightarrow Y_i^*$, $i = 0, \dots, N-1$ 是单射且连续. 下面考虑非线性 Landweber-Kaczmarz 迭代算法:

(1) 初值 $\xi_0 \in X^*$, $x_0 = \arg \min_{x \in X} \{h(x) - \langle \xi_0, x \rangle\}$;

(2) $\xi_{n,i+1}^\delta = \xi_{n,i}^\delta - \lambda_{n,i}^\delta F_i'(x_{n,i}^\delta)^* A_b^{Y_i}(F_i(x_{n,i}^\delta) - y_i^\delta)$, $x_{n,i+1}^\delta = \arg \min_{x \in X} \{h(x) - \langle \xi_{n,i+1}^\delta, x \rangle\}$, $i = 0, \dots, N-1$.

其中, 当 $\|F_i(x_{n,i}^\delta) - y_i^\delta\| > c\delta$ 时,

$$\lambda_{n,i}^\delta = \hat{\lambda}_{n,i}^\delta \|F_i(x_{n,i}^\delta) - y_i^\delta\|^{p-b},$$

$$\hat{\lambda}_{n,i}^\delta := \min \left\{ \frac{\lambda_0 \|F_i(x_{n,i}^\delta) - y_i^\delta\|^{p(b-1)}}{\|F_i'(x_{n,i}^\delta)^* A_b^{Y_i}(F_i(x_{n,i}^\delta) - y_i^\delta)\|^p}, \lambda_1 \right\},$$

λ_0, λ_1 是正常数, 则定义 $\xi_{n+1}^\delta = \xi_{n,N}^\delta$, $x_{n+1}^\delta = x_{n,N}^\delta$.

(3) 停止指数 n_δ 是第一个整数, 满足:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \|F_i(x_{n_\delta,i}^\delta) - y_i^\delta\|^p \leq Nc^p \delta^p.$$

注 2 当 $\delta = 0$ 时, x_n 替代 x_n^δ , y_n 替代 y_n^δ .

注 3 由 $\lambda_{n,i}$ 的定义可知, 存在常数 $K > 0$, 使得 $\|F_i'(x)\| \leq K$, 即 $\min\{\lambda_0 K^{-p}, \lambda_1\} \leq \hat{\lambda}_{n,i}^\delta \leq \lambda_1$.

引理 1^[7] 设 X 是自反的 Banach 空间, $h: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ 是下半连续真凸泛函, 则 x^* 存在且唯一.

定理 1 设 X 是 Banach 空间, $h: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ 是下半连续的 p 阶真凸函数, $p \geq 2$, 对任意的实数 $a > 0$ 满足(1)式. 若

$$H_{\xi_0} h(x^*, x_0) \leq a\kappa^p, \quad (6)$$

记 $e_1 := 1 - \beta - \frac{1}{q} \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^{q-1} > 0$. 则

(1) 对任意的解 $\bar{x} \in H_{2\kappa}(x_0) \cap H(h)$ 和任意的 n ,

则

$$H_{\xi_{n+1}} h(\bar{x}, x_{n+1}) \leq H_{\xi_n} h(\bar{x}, x_n). \quad (7)$$

(2) 对任意 $n \geq 0, i = 0, \dots, N-1$, 有 $x_{n,i} \in H_{2\kappa}(x_0)$.

证明 要证(7)式, 即证:

$$H_{\xi_n} h(\bar{x}, x_n) - H_{\xi_{n+1}} h(\bar{x}, x_{n+1}) \geq e_1 \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{n,i} \|F_i(x_{n,i}) - y_i\|^b, \quad (8)$$

$$H_{\xi_{n+1}} h(\bar{x}, x_{n+1}) - H_{\xi_n} h(\bar{x}, x_n) \leq -e_1 \|F_i(x_{n,i}) - y_i\|^b. \quad (9)$$

由 Bregman 距离和(5)式可得:

$$\begin{aligned} H_{\xi_{n+1}} h(\bar{x}, x_{n+1}) - H_{\xi_n} h(\bar{x}, x_n) &= h(\xi_{n+1}) - h(\xi_n) \\ &= \langle \xi_{n+1}, \bar{x} - x_{n+1} \rangle - \langle \xi_n, \bar{x} - x_n \rangle \\ &= h^*(\xi_{n+1}) - h^*(\xi_n) - \langle \xi_{n+1} - \xi_n, \bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

根据(4)式和(3)式可得:

$$\begin{aligned} H_{\xi_{n+1}} h(\bar{x}, x_{n+1}) - H_{\xi_n} h(\bar{x}, x_n) &= h^*(\xi_{n+1}) - h^*(\xi_n) - \langle \xi_{n+1} - \xi_n, \bar{x} \rangle \\ &= \langle \xi_{n+1}, \bar{x} - x_{n+1} \rangle - \langle \xi_n, \bar{x} - x_n \rangle \\ &= \frac{1}{q(2a)^{q-1}} \|\xi_{n+1} - \xi_n\|^q - \lambda_{n,i} < A_b^{Y_i}(F_i(x_{n,i}) - y_i), F_i'(x_{n,i})(x_{n,i} - \bar{x}) >, \end{aligned}$$

记 $T_{n,i} = F_i(x_{n,i}) - y_i$.

由切向锥条件和映射性质, 上式第 2 项估计为:

$$\begin{aligned} &< A_b^{Y_i}(F_i(x_{n,i}) - y_i), F_i'(x_{n,i})(x_{n,i} - \bar{x}) > \leq \\ &= \|T_{n,i}\|^b + \|T_{n,i}\|^{b-1} \|y_i - F_i(x_{n,i}) - F_i'(x_{n,i})(\bar{x} - x_{n,i})\| \leq (\beta - 1) \|T_{n,i}\|^b. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} H_{\xi_{n+1}} h(\bar{x}, x_{n+1}) - H_{\xi_n} h(\bar{x}, x_n) &\leq \\ &= \frac{1}{q(2a)^{q-1}} \|\xi_{n+1} - \xi_n\|^q + \lambda_{n,i} (\beta - 1) \|T_{n,i}\|^b \leq \end{aligned}$$

$$\frac{1}{q(2a)^{q-1}} \lambda_{n,i}^q \|F'_i(x_{n,i})^* A_b^{Y_i}(F_i(x_{n,i}) - y_i)\|^q + \lambda_{n,i}(\beta - 1) \|T_{n,i}\|^b.$$

上式第1项估计为:

$$\lambda_{n,i}^q \|F'_i(x_{n,i})^* A_b^{Y_i}(F_i(x_{n,i}) - y_i)\|^q \leq \lambda_{n,i} \cdot \left(\frac{\lambda_0 \|F_i(x_{n,i}) - y_i\|^{p(b-1)} \|F_i(x_{n,i}) - y_i\|^{p-b}}{\|F'_i(x_{n,i})^* A_b^{Y_i}(F_i(x_{n,i}) - y_i)\|^p} \right)^{q-1} \cdot \|F'_i(x_{n,i})^* A_b^{Y_i}(F_i(x_{n,i}) - y_i)\|^q \leq \lambda_0^{q-1} \lambda_{n,i} \|T_{n,i}\|^b.$$

因此,

$$H_{\xi_{n,i+1}} h(\bar{x}, x_{n,i+1}) - H_{\xi_{n,i}} h(\bar{x}, x_{n,i}) \leq \frac{1}{q(2a)^{q-1}} \lambda_0^{q-1} \lambda_{n,i} \|T_{n,i}\|^b + \lambda_{n,i}(\beta - 1) \|T_{n,i}\|^b = \left(\beta - 1 + \frac{1}{q} \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^{q-1} \right) \lambda_{n,i} \|T_{n,i}\|^b = -e_1 \lambda_{n,i} \|T_{n,i}\|^b.$$

以下证对任意 $n \geq 0, x_{n,i} \in H_{2\kappa}(x_0)$, 令 $x^* = \bar{x}$, 则由(6)式和(7)式可得:

$$H_{\xi_{n,i+1}} h(x^*, x_{n,i+1}) \leq H_{\xi_0} h(x^*, x_0) \leq a\kappa^p.$$

即

$$\|x_{n,i+1} - x^*\| \leq \kappa, \quad \|x^* - x_0\| \leq \kappa.$$

因此,

$$\|x_{n,i+1} - x_0\| \leq 2\kappa, \quad x_{n,i} \in H_{2\kappa}(x_0).$$

引理2 设 X 是 Banach 空间, $h: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ 是下半连续的 p 阶真凸泛函, $p \geq 2$, 对任意的实数 $a > 0$ 满足(1)式, 则算法将在有限次循环之后停止, 即 $n_\delta < \infty$.

证明 由 n_δ 定义可知, 对任意 $n < n_\delta$, 至少存在一个 $i_n \in \{0, \dots, N-1\}$ 使得 $\|F_i(x_{n,i_n}) - y_{i_n}\| > c\delta$.

因此,

$$\lambda_{n,i_n} = \hat{\lambda}_{n,i_n} \|F_i(x_{n,i_n}) - y_{i_n}\|^{p-b}, \quad \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{n,i} \|F_i(x_{n,i}) - y_i\|^b \geq \min\{\lambda_0 K^{-p}, \lambda_1\}.$$

$$\|F_{i_n}(x_{n,i_n}) - y_{i_n}\|^p \geq \min\{\lambda_0 K^{-p}, \lambda_1\} c^p \delta^p.$$

对任意的 $l < n_\delta$,

$$\sum_{n=0}^l e_1 c^p \delta^p \min\{\lambda_0 K^{-p}, \lambda_1\} \leq e_1 \sum_{n=0}^l \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{n,i} \|F_i(x_{n,i}) - y_i\|^b \leq H_{\xi_0} h(\bar{x}, x_0) - H_{\xi_{l+1}} h(\bar{x}, x_{l+1}).$$

因此,

$$e_1 c^p \delta^p \min\{\lambda_0 K^{-p}, \lambda_1\} (l+1) + H_{\xi_{l+1}} h(\hat{x}, x_{l+1}) \leq H_{\xi_0} h(\hat{x}, x_0).$$

由于对任意 $l < n_\delta$ 成立, 从而可得 $n_\delta < \infty$.

引理3 由定理1和引理2可知, 对任意 $n \geq 1$, 都存在一个常数 M , 使得对任意 $i = 0, \dots, N-1$,

$$\|F_i(x_n) - y_i\| \leq M \sum_{j=0}^i \|F_j(x_{n,j}) - y_j\|,$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_i(x_n) - y_i\| = 0.$$

证明 令 $x_n = x_{n,0}$, 得:

$$\begin{aligned} \|F_i(x_n) - y_i\| &\leq \|F_i(x_{n,i}) - y_i\| + \|F_i(x_{n,i}) - F_i(x_{n,0})\| \leq \|F_i(x_{n,i}) - y_i\| + \frac{1}{1-\beta} \sum_{j=0}^{i-1} \|F'_i(x_{n,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j})\| \leq \|F_i(x_{n,i}) - y_i\| + \frac{K}{1-\beta} \cdot \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{\|\xi_{n,j+1} - \xi_{n,j}\|}{2a} \right)^{1/(p-1)} \leq \|F_i(x_{n,i}) - y_i\| + \frac{K}{1-\beta} \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda_1 K}{2a} \right)^{1/(p-1)} \|F_j(x_{n,j}) - y_j\| \leq M \sum_{j=0}^i \|F_j(x_{n,j}) - y_j\|. \end{aligned}$$

因 M 为任意常数, 即结论可证.

定理2 设 X 是 Banach 空间, $\{\xi_n\}$ 和 $\{x_n\}$ 是算法中所定义的序列, (1)式存在解 $\dot{x} \in H_{2\kappa}(x_0) \cap H(h)$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \dot{x}\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_{\xi_n} h(\dot{x}, x_n) = 0.$$

此外, 若 $N(F'_i(x^*)) \subset N(F'_i(x))$, 则对任意的 $x \in H_{2\kappa}(x_0), i = 0, \dots, N-1$, 则 $\dot{x} = x^*$.

证明 由 $\{\xi_n\}$ 和 $\{x_n\}$ 定义知, 及 $\xi_n \in \partial h(x_n)$ 由定理1和引理2可知, 存在一个严格增的子列 $\{x_m\}$, 对任意的 $\dot{x}$ 和任意的 $k < m$, 有

$$\begin{aligned} & \left| \langle \xi_{n_m} - \xi_{n_k}, x_{n_m} - \bar{x} \rangle \right| \leq Q(H_{\xi_{n_k}} h(\bar{x} - x_{n_k}) - \\ & H_{\xi_{n_m}} h(\bar{x} - x_{n_m})). \end{aligned} \quad (10)$$

令

$$B_n = \sum_{i=0}^{N-1} \|y_i - F(x_{n,i})\|^p.$$

由(7)式和(8)式可知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0. \quad (11)$$

此外, 若 $B_n = 0$, 则 $y_i = F_i(x_{n,i}), i = 0, \dots, N-1$.

由定义可知, $x_{k,i} = x_n$ 对任意的 $k \geq n, i = 0, \dots, N-1$ 成立, 因此,

$$B_n = 0 \Rightarrow B_k = 0, k \geq n. \quad (12)$$

由(11)式和(12)式可知, 存在一个子列 $\{n_m\}$, $n_0 = 0$, n_m 是对每个 $m \geq 1$ 的第 1 个整数, 满足 $n_m \geq n_{m-1} + 1, B_{n_m} \leq B_{n_{m-1}}$.

下面将证明(11)式对假设的子列 n_m 成立. 对严格增的子列 $\{n_m\}$, 则

$$B_{n_m} \leq B_n, 0 \leq n < n_m. \quad (13)$$

当 $n < n_m$ 时,

$$\begin{aligned} & \langle \xi_{n+1} - \xi_n, x_{n_m} - \bar{x} \rangle = \\ & - \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{n,i} \langle A_b^{Y_i} (F_i(x_{n,i}) - y_i), \\ & (F'_i(x_{n,i})(x_{n_m} - \bar{x})) \rangle. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} & \left\| F'_i(x_{n,i})(x_{n_m} - \bar{x}) \right\| \leq \left\| F'_i(x_{n,i})(x_{n,i} - \bar{x}) \right\| + \\ & \left\| F'_i(x_{n,i})(x_{n_m} - x_{n,i}) \right\| \leq (1 + \beta) (\|F_i(x_{n,i}) - \\ & y_i\| + \|F_i(x_{n_m}) - F_i(x_{n,i})\|) \leq \\ & (1 + \beta) (2\|F_i(x_{n,i}) - y_i\| + \|F_i(x_{n_m}) - y_i\|). \end{aligned}$$

由映射 $A_b^{Y_i}$ 的性质及 Hölder 不等式可得:

$$\begin{aligned} & \langle \xi_{n+1} - \xi_n, x_{n_m} - \bar{x} \rangle \leq \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{n,i} \|F_i(x_{n,i}) - y_i\|^{b-1} \cdot \\ & \left\| F'_i(x_{n,i})(x_{n_m} - \bar{x}) \right\| \leq \\ & (1 + \beta) \lambda_1 \sum_{i=0}^{N-1} \|F_i(x_{n,i}) - y_i\|^{b-1} \cdot \\ & \|F_i(x_{n_m}) - y_i\| + 2(1 + \beta) \lambda_1 B_n \leq \\ & (1 + \beta) \lambda_1 R_n^q \left(\sum_{i=0}^{N-1} \|F_i(x_{n_m}) - y_i\|^p \right)^{1/p} + \\ & 2(1 + \beta) \lambda_1 B_n. \end{aligned} \quad (14)$$

由引理 3 和 Hölder 不等式可得:

$$\begin{aligned} & \|F_i(x_{n_m}) - y_i\| \leq M \sum_{j=0}^i \|F_j(x_{n_m,j}) - y_j\| \leq \\ & M(i+1)^{1/q} \left(\sum_{j=0}^i \|F_j(x_{n_m,j}) - y_j\|^p \right)^{1/p}, \\ & \sum_{i=0}^{N-1} \|F_i(x_{n_m}) - y_i\|^p \leq M^p \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^i (i+1)^{p-1} \cdot \\ & \|F_j(x_{n_m,j}) - y_j\|^p \leq \\ & M^p (N+1)^p \sum_{j=0}^{N-1} \|F_j(x_{n_m,j}) - y_j\|^p \leq \\ & M^p (N+1)^p B_{n_m}. \end{aligned}$$

由(13)式和(14)式可得:

$n \leq n_m$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \langle \xi_{n+1} - \xi_n, x_{n_m} - \bar{x} \rangle \right| \leq (1 + \eta) \lambda_1 \cdot \\ & [M(N+1) R_n^{1/q} R_{n_m}^{1/p} + 2R_n], \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \left| \langle \xi_{n_m} - \xi_{n_k}, x_{n_m} - \bar{x} \rangle \right| \leq \\ & \sum_{n=n_k}^{n_m-1} \left| \langle \xi_{n+1} - \xi_n, x_{n_m} - \bar{x} \rangle \right| \leq M_1 \sum_{n=n_k}^{n_m-1} R_n, \end{aligned}$$

其中,

$$M_1 = (1 + \eta) \lambda_1 [M(N+1) + 2].$$

由(8)式可知(11)式成立.

下证 $\dot{x} = x^*$, 可先考虑

$$\begin{aligned} & \xi_{n+1} - \xi_n = \sum_{i=0}^{N-1} (\xi_{n,i+1} - \xi_{n,i}) \in R(F'_0(x_{n,0})^*) + \dots + \\ & R(F'_{N-1}(x_{n,N-1})^*). \end{aligned}$$

因 X 是自反空间且 $N(F'_i(x^*)) \subset N(F'_i(x_{n,i}))$,

则 $N(F'_i(x_{n,i})^*) \subset N(F'_i(x^*)^*)$. 即对任意的 n , 则有

$$\xi_{n+1} - \xi_n \in \overline{R(F'_0(x^*)^*)} + \dots + \overline{R(F'_{N-1}(x^*)^*)}.$$

再由文献[7], 可得 $\dot{x} = x^*$.

3 总结

文章主要利用 Landweber-Kaczmarz 迭代算法研究非线性不适定问题. 通过适当减弱假设条件, 构造合适的步长, 得到 Bregma 距离序列在迭代算法中是单调递减的这一重要性质. 并由凸分析和偶映射循环考虑每个算子方程, 得到迭代算法具有收敛性.

参考文献:

- [1] Hanke M, Neubauer A, Scherzer O. A convergence analysis of the Landweber iteration for nonlinear ill-posed problems[J]. *Numerische Mathematik*, 1995, 72(1):21-37.
- [2] Haltmeier M, Kowar R, Leitão A, et al. Kaczmarz methods for regularizing nonlinear ill-posed equations II: Applications[J]. *Inverse Problems Imaging*, 2017, 1(3): 507-523.
- [3] Hofmann B, Kaltenbacher B, Pöschl C, et al. A convergence rates result for Tikhonov regularization in Banach spaces with non-smooth operator[J]. *Inverse Problems*, 2007, 23(3):987-1010.
- [4] Schöpfer F, Louis A K, Schuster T. Nonlinear iterative methods for linear ill-posed problems in Banach spaces[J]. *Inverse Problems*, 2006, 22(1):311-329.
- [5] Kaltenbacher B, Schöpfer F, Schuster T. Iterative methods for nonlinear ill-posed problems in Banach spaces: Convergence and applications to parameter identification problems[J]. *Inverse Problems*, 2009, 26(6):65003-65021.
- [6] Jin Q. Inexact Newton-Landweber iteration for solving nonlinear inverse problems in Banach spaces[J]. *Inverse Problems*, 2012, 28(28):1012-1020.
- [7] Jin Q, Wang W. Landweber iteration of Kaczmarz type with general non-smooth convex penalty functionals[J]. *Inverse Problems*, 2013, 29(8):1400-1416.
- [8] Leitão A, Alves M A. On Landweber-Kaczmarz method for regularizing systems of ill-posed equations in Banach spaces[EB/OL]. [2017-12-03]. <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0266-5611/28/10/104008/pdf>.
- [9] 管金林, 胡长松. Banach 空间中几种迭代算法的收敛性[D]. 黄石: 湖北师范学院, 2014.
- [10] 杜玲玲, 王金平. 巴拿赫空间中 Landweber 迭代算法的收敛性[J]. *宁波大学学报(理工版)*, 2016, 29(2):85-88.

Convergence analysis of iterative regularization methods in Banach spaces

WANG Jia-min, WANG Jin-ping*

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, we study the Landweber-Kaczmarz iterative algorithm for nonlinear ill-posed problems. We first introduce the iterative step, and then derive the sequence of Bregman distance which is monotonously decreasing in Banach space. With the convex analysis, duality mapping and Fréchet differentiable, we succeed in obtaining the convergence of the iterative algorithm.

Key words: Landweber-Kaczmarz iterative algorithm; convergence; Bregman distance; Fréchet differentiable

(责任编辑 章践立)