

弹性边界条件下斜拉索弯曲振动特性建模与索力分析

闫伟, 冯志敏, 陈跃华*, 张刚, 程鹏

(宁波大学 海运学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 针对斜拉索索力估算不准问题, 提出一种基于伽辽金原理的弹性边界条件下拉索振动特性分析模型和索力估算分析方法. 建立弹性约束边界的斜拉索弯曲振动预测模型, 采用切比雪夫级数研究振型函数, 推导拉索振动特征方程, 通过虚位移原理构建有限个自由度系统, 求解拉索振动前 n 阶固有频率和主振型, 以精确计算拉索索力; 对比分析已有文献解析求解的计算结果, 验证在固支-固支、固支-简支两种经典边界条件下应用本文方法的有效性; 改变拉索边界约束的拉伸刚度和扭转刚度, 研究其对振动特性影响的变化规律; 分析估算当拉索固有频率在 $\pm 3\%$ 范围内变化时索力的变化情况. 最后, 搭建拉索振动试验平台, 通过试验结果与计算结果对比验证本文方法的正确性. 结果表明: 当拉索边界为固支-固支时, 估算索力最大误差为 $-7.83\% \sim 8.17\%$, 当边界为固支-简支时, 估算索力最大误差为 $-6.83\% \sim 6.69\%$, 误差变化了 $-1.00\% \sim 1.48\%$. 以上分析表明, 应根据拉索两端的实际边界约束情况来计算相应的索力.

关键词: 伽辽金原理; 切比雪夫级数; 弹性边界; 约束刚度; 振动特性; 索力分析

中图分类号: O327

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2019) 02-0072-09

斜拉索在外界载荷激励作用下会产生剧烈振动, 造成拉索结构的能量损耗、疲劳破坏和机械故障, 并降低系统结构的可靠性. 在斜拉桥设计中, 索力控制着整个桥梁结构的内力分布和线型, 任何一根拉索索力变化都会直接影响到桥梁结构的安全性和稳定性, 在施工过程中必须准确测量出拉索索力.

近年来, 国内外学者在拉索索力计算研究中, 通常假设拉索两端边界为理想约束条件, 如固支或简支. 实际上, 拉索边界条件并非理想约束状态, 而是介于固支与简支之间的混合边界^[1]. 另外, 斜拉索两端分别连接在本体为弹性结构的主梁和桥塔上, 拉索段中各处索力不完全相同, 且两端的弹性支承刚度有限^[2], 必须考虑弹性支承对拉索动力特性的影响. 当考虑两端弹性边界条件时, 根据固支或简支边界条件推导出的索力计算公式通常不适用^[3]. 魏金波等^[4]采用有限元法对弹性支承拉索的动力特性进行研究, 结果表明拉索自振频率随

弹性支承刚度增大而变大. 刘文峰等^[5]考虑简支及固支与简支混合 2 种边界, 推导索力精确计算公式, 并利用数据分析得到边界条件对短拉索索力影响较为明显的结论. 林立等^[6]通过建立非齐次边界拉索力学模型, 得到固支边界条件下的频率简化方程. 廖敬波等^[7]推导两端固支边界拉索的频率计算公式, 并通过数值算例验证其合理性. 秦小平等^[8]推导固支-简支边界条件下拉索振动频率方程, 得出更为实用的近似频率计算公式. 上述研究表明拉索边界条件对拉索振动特性和索力计算的影响不可忽视, 因此, 需要寻求能真实反映拉索动力学特性的边界约束形式, 以满足实际工程分析要求.

振动频率法^[9-10]基于弦的振动特性, 通过频率与索力的显式函数关系快速计算索力, 是目前工程上应用较为普遍的索力测定方法. 通过拉索基频计算索力的有限元法^[11-12]能较好地模拟斜拉索线型、边界条件等, 但求解精度依赖于网格疏密程度, 尤其对于高阶频率和振型, 要想获得满意的精

收稿日期: 2018-10-24.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金 (51675286, 51505237); 宁波市自然科学基金 (2017A610081, 2017A610085); 宁波大学王宽诚幸福基金.

第一作者: 闫伟 (1992-), 男, 甘肃会宁人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 机械结构振动与机电控制. E-mail: yanweish@163.com

*通信作者: 陈跃华 (1986-), 男, 湖南常德人, 讲师, 主要研究方向: 船舶结构振动与噪声控制. E-mail: chen Yuehua@nbu.edu.cn

度, 往往需要花费很大的计算量^[13]. 公式计算法^[14]需要建立索力和频率之间的显式函数关系, 通常是根拉索振动微分方程确定频率特征方程, 再根据边界条件对频率特征方程求解. Robert等^[15]推导了固支边界条件下拉索频率与弦理论频率的函数关系. 方志等^[16]将拉索简化为梁的模型, 基于两端固支梁在轴向拉力作用下的横向振动方程, 通过拟合得出拉索索力计算公式. 赵子龙等^[17]采用伽辽金法计算两端固支梁的固有频率, 但未给出弹性边界条件下的求解. 在已有文献中, 索力计算大多需要重复迭代, 或者适用于特定的边界条件. 因此, 在弹性边界条件下研究拉索弯曲振动特性和索力计算分析方法具有重要的实际意义.

在现有文献研究中, 对索力的相关研究大多忽略了斜度和垂度的影响. 方志等^[18]采用频率法分析了拉索刚度、斜度、垂度以及边界条件对索力的影响, 结果表明当拉索的倾角在 $20^\circ \sim 80^\circ$ 之间变化时, 相同频率下计算出的索力误差不超过 1%, 故斜度的影响可以忽略不计. 许俊^[19]分析了垂度对拉索索力计算的影响, 结果表明垂度对短索的基频无影响, 对长索只影响基频, 但采用 2 阶以上频率进行计算时, 误差也是很小, 因此也可以忽略垂度的影响. 本文提出一种基于伽辽金原理的弹性边界条件拉索弯曲振动特性模型和索力估算分析方法. 建立不考虑斜度和垂度, 考虑抗弯刚度的拉索振动微分方程, 采用切比雪夫级数研究振型函数, 通过虚位移原理构建有限个自由度系统, 求解获得弹性约束边界条件下拉索振动前 n 阶固有频率和主振型; 通过对比分析已有文献解析求解计算结果, 验证本文方法的有效性和可靠性; 研究边界约束刚度变化对拉索振动特性影响的规律. 研究结果可为拉索弯曲振动特性的精确分析和工程应用中的索力估算提供有效的解析方法.

1 理论建模

1.1 拉索振动方程与弹性支承边界

考虑拉索在弹性边界条件下自由振动模型如图 1 所示, L 为拉索索长, 拉索左右两端分别连接拉伸约束弹簧刚度为 K_1 和 K_3 的弹簧, 以及扭转约束弹簧刚度为 K_2 和 K_4 的弹簧.

拉索的振动微分方程为^[20]:

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

式中: EI 为拉索的抗弯刚度; T 为拉索的索力; ρA 为拉索的线密度; $u(x,t)$ 为拉索各点随时间变化的位移函数.

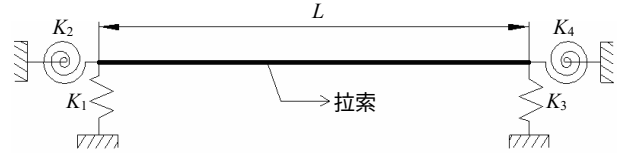


图1 弹性边界条件下拉索的振动模型

根据弹性边界约束所对应的力平衡和位移协调关系可得拉索边界约束方程为:

$$\begin{cases} u'''|_{x=0} = -k_1 u|_{x=0}, \\ u''|_{x=0} = k_2 u'|_{x=0}, \\ u'''|_{x=L} = k_3 u|_{x=L}, \\ u''|_{x=L} = -k_4 u'|_{x=L}, \end{cases} \quad (2)$$

式中,

$$k_j = K_j / EI, \quad j=1,2,3,4, \quad (3)$$

为两边界刚度无量纲化系数. 任意边界条件都可以通过调节两端弹簧刚度无量纲化系数获得.

1.2 基于伽辽金原理改进方法求解振动方程

首先采用分离变量法对(1)式求解, 位移函数 $u(x,t)$ 可分解为空间函数和时间函数的乘积, 即:

$$u(x,t) = Y(x) \sin(\omega t + \phi), \quad (4)$$

式中: $Y(x)$ 为拉索的振型函数; ω 为拉索的固有频率; ϕ 为初始相位角.

把(4)式分别代入(1)和(2)式得:

$$EIY^{(4)}(x) - TY''(x) - \rho A \omega^2 Y(x) = 0, \quad (5)$$

$$\begin{cases} Y'''|_{x=0} = -k_1 Y|_{x=0}, \\ Y''|_{x=0} = k_2 Y'|_{x=0}, \\ Y'''|_{x=L} = k_3 Y|_{x=L}, \\ Y''|_{x=L} = -k_4 Y'|_{x=L}. \end{cases} \quad (6)$$

设 $Y(x)$ 采用切比雪夫级数形式进行展开:

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n a_i T_i(x), \quad (7)$$

式中, $T_i(x)$ 表示第一类切比雪夫级数, 其表达式为:

$$T_i(x) = \cos \left(i \arccos \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) \right), \quad x \in [0, L], \quad (8)$$

$$i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

切比雪夫级数的前几项^[21]如下:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, \\ T_1(x) = \frac{2}{L}x - 1, \\ T_2(x) = 2\left(\frac{2}{L}x - 1\right)^2 - 1, \\ T_3(x) = 4\left(\frac{2}{L}x - 1\right)^3 - 3\left(\frac{2}{L}x - 1\right), \\ T_4(x) = 8\left(\frac{2}{L}x - 1\right)^4 - 8\left(\frac{2}{L}x - 1\right)^2 + 1, \\ \dots \end{cases} \quad (9)$$

递推公式为:

$$T_{i+1}(x) = 2\left(\frac{2}{L}x - 1\right)T_i(x) - T_{i-1}(x), i \geq 1. \quad (10)$$

因为振型函数(7)式不满足边界条件(6)式, 为使得(7)式满足弹性边界条件(6)式, 在(7)式的基础上构造两个辅助函数, 在此假设:

$$h(x) = x^4 \left(\frac{x}{L} - 1\right)^4, \quad (11)$$

$$g(x) = ax \left(\frac{x}{L} - 1\right)^4 + bx^4 \left(\frac{x}{L} - 1\right) + cx^2 \left(\frac{x}{L} - 1\right)^3 + dx^3 \left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 + x + \left(\frac{x}{L} - 1\right)^3, \quad (12)$$

式中:

$$a = \frac{1}{12} \frac{1}{L(2L^2k_2k_4 + 7Lk_2 + 7Lk_4 + 20)} (L^5k_3k_4 - 3L^4k_1k_4 + 8L^4k_3 - 24L^3k_2k_4 - 12L^3k_1 - 72L^2k_2k_4 - 84L^2k_2 + 36L^2k_4 - 252Lk_2 - 132Lk_4 - 180), \quad (13a)$$

$$b = -\frac{1}{12} \frac{1}{L^4(2L^2k_2k_4 + 7Lk_2 + 7Lk_4 + 20)} (3L^5k_2k_3 - L^4k_1k_2 + 12L^4k_3 + 24L^3k_2k_4 - 8L^3k_1 - 36L^2k_2 + 84L^2k_4 - 120Lk_2 - 240), \quad (13b)$$

$$c = -\frac{1}{24} \frac{1}{L^2(2L^2k_2k_4 + 7Lk_2 + 7Lk_4 + 20)} (L^6k_2k_3k_4 - 3L^5k_1k_2k_4 + 8L^5k_2k_3 + 8L^5k_3k_4 - 12L^4k_1k_2 + 64L^4k_3 - 72L^3k_2k_4 - 96L^3k_1 - 312L^2k_2k_4 - 432L^2k_2 + 288L^2k_4 - 1272Lk_2 - 552Lk_4 - 2400), \quad (13c)$$

$$d = \frac{1}{24} \frac{1}{L^3(2L^2k_2k_4 + 7Lk_2 + 7Lk_4 + 20)}.$$

$$(3L^6k_2k_3k_4 - L^5k_1k_2k_4 + 24L^5k_2k_3 + 12L^5k_3k_4 - 8L^4k_1k_2 - 8L^4k_1k_4 + 96L^4k_3 - 72L^3k_2k_4 - 64L^3k_1 - 120L^2k_2k_4 - 288L^2k_2 + 432L^2k_4 - 960Lk_2 - 240Lk_4 - 1920). \quad (13d)$$

需要说明, 此处所构造的辅助函数在数学上并不是唯一的, 选择该形式主要考虑方程(7)的形式所具有的特征, 使得辅助函数具有更加明确的物理意义. 令:

$$\Phi_i(x) = h(x)T_i(x) + g(x). \quad (14)$$

此时满足边界条件(6)式的振型函数变成:

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i(x). \quad (15)$$

由(15)式给出的 $Y(x)$ 不是方程(5)的真实解, 因此代入方程(5)时将使方程式不为 0, 但是根据虚位移原理可以使其在虚位移上所做的功为 0, 即:

$$\delta Y(x) = \sum_{i=1}^n \delta a_i \Phi_i(x), \quad (16)$$

$$\int_0^L [EIY^{(4)}(x) - TY''(x) - \rho A \omega^2 Y(x)] \cdot \delta Y(x) dx = 0, \quad (17)$$

故:

$$\int_0^L [EI \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i^{(4)}(x) - T \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i''(x) - \rho A \omega^2 \sum_{i=1}^n a_i \Phi_i(x)] \sum_{j=1}^n \delta a_j \Phi_j(x) dx = 0. \quad (18)$$

由于 δa_j 是任意的, 整理后可得方程:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (d_{ij} - \omega^2 m_{ij}) a_i = 0, \quad (19)$$

式中:

$$d_{ij} = \int_0^L [EI \Phi_i^{(4)}(x) \Phi_j(x) - T \Phi_i''(x) \Phi_j(x)] dx; \quad (20)$$

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx. \quad (21)$$

(19)式可以写成矩阵形式:

$$(\mathbf{D} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{a} = 0, \quad (22)$$

式中: $\mathbf{D}$ 为刚度矩阵; $\mathbf{M}$ 为质量矩阵; $\mathbf{a}$ 为特征向量矩阵.

这样通过虚位移原理把无限个自由度系统变成了有限个自由度系统, 求解(22)式的特征值和特征向量, 就可以得到系统前 n 阶固有频率和主振型. 频率方程为:

$$|\mathbf{D} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0. \quad (23)$$

上述拉索振动模态具体流程如图2所示。

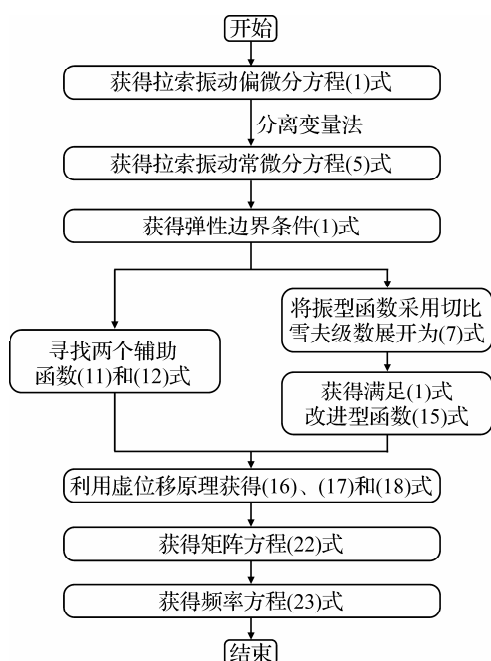


图2 拉索振动模态求解流程

1.3 索力估算分析步骤

估算弹性边界条件下索力范围的步骤如下：

步骤1 赋予索力 T 一个估算值，再根据图2流程计算固有频率；

步骤2 将步骤1中计算的固有频率值与初始设计索力对应的固有频率对比，如果两者相对误差值在区间 $[-3\%, 3\%]$ （工程上一般认为固有频率误差在 $\pm 5\%$ 范围内时满足精度要求，因为在采用振动频率法计算索力时，每次测得的固有频率存在波动，为使估算索力更精确，这里误差值选用 $\pm 3\%$ ）的两个端点处时，则此索力估算值为估算索力范围的区间端点值；

步骤3 如果步骤2中两者相对误差值在区间 $[-3\%, 3\%]$ 以外，则需重新设定估算值，依次循环步骤1和步骤2可得到估算索力的范围。

2 数值计算与比较分析

本节将分别对两端固支、固支-简支、固支-弹性约束及两端弹性约束等不同边界条件下的拉索模型进行验证和分析，并分析边界条件变化对拉索固有频率的影响。材料参数与文献[7]中参数相同： $EI=2.67 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ ， $L=8.21 \text{ m}$ ， $T=574.31 \text{ kN}$ ， $\rho A=24.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ 。

2.1 两端固支边界约束条件

对于两端固支边界条件下拉索振动特性分析，可将弹性边界约束刚度设置为无穷大（在实际计算时可用一个很大的数值来等效）。其两端固支边界约束条件下拉索的力学模型如图3所示。

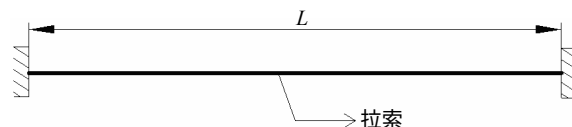


图3 两端固支边界条件下拉索的力学模型

表1给出了拉索两端固支边界约束条件下的固有频率与文献[7]的结果对比。表中可见，当固定边界的拉伸弹簧刚度及扭转弹簧刚度无量纲化系数为 1×10^4 ，即 $k_j=10^4$ ， $j=1,2,3,4$ ，此时边界弹簧刚度为 $2.67 \times 10^9 \text{ Nm} \cdot \text{rad}^{-1}$ ，再继续增大弹簧约束刚度值固有频率值将不会改变。本文计算结果与文献[7]结果吻合良好，最大误差为0.27%。图4给出了两端固支拉索对应的前3阶振型，图中曲线光滑，呈对称分布，符合两端固支拉索的振型分布。

表1 本文方法与文献[7]中频率方程计算结果对比

阶数	本文所得频率/Hz			文献[7]中频率/Hz	相对误差/%
	$k_j=10^3$	$k_j=10^4$	$k_j=10^5$		
1	11.65	11.66	11.66	11.66	0.00
2	25.17	25.34	25.34	25.31	0.12
3	42.27	42.37	42.37	42.30	0.17
4	63.47	63.54	63.54	63.37	0.27
5	88.84	88.95	88.95	88.88	0.08
6	119.11	119.32	119.32	119.02	0.25
7	153.79	154.04	154.04	153.89	0.10

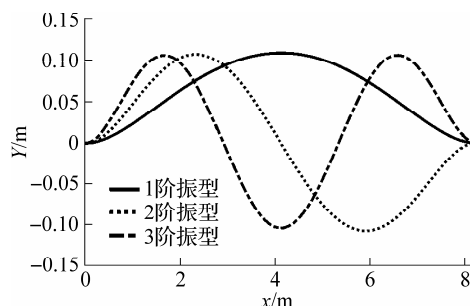


图4 两端固支拉索对应的前3阶振型

2.2 固支-简支边界约束条件

对于固支-简支边界拉索振动特性分析，可将左端弹性边界约束刚度设置为无穷大，右端拉伸弹簧刚度设置为无穷大，扭转约束弹簧刚度设置

为0, 固支-简支边界条件拉索力学模型如图5所示.

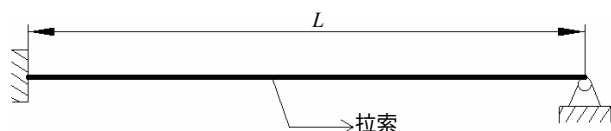


图5 固支-简支边界条件下拉索的力学模型

表2给出了固支-简支边界约束条件下拉索的固有频率与文献[8]的结果对比. 表中可见, 伽辽金模型计算结果与文献[8]相比也能较好吻合, 最大误差为0.16%, 充分说明伽辽金法在工程应用上的适用性. 图6给出了固支-简支拉索对应的前3阶振型, 图中可见, 曲线光滑, 呈不对称分布, 符合固支-简支拉索的振型分布.

表2 本文方法与文献[8]中频率方程计算结果对比

阶数	本文所得频率/Hz	文献[8]中频率/Hz	相对误差/%
1	10.62	10.62	0.00
2	23.17	23.15	0.09
3	38.98	38.94	0.10
4	58.84	58.75	0.15
5	83.08	82.98	0.12
6	112.02	111.84	0.16
7	145.61	145.44	0.11

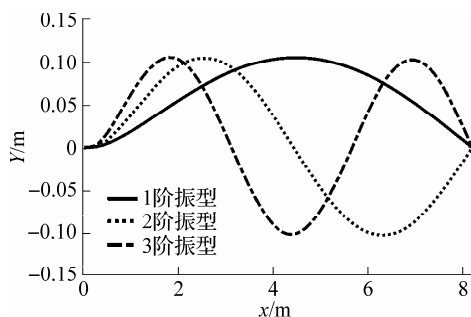


图6 固支-简支拉索对应前3阶振型

2.3 固支-弹性边界约束条件

通过调整边界约束条件以分析拉索弯曲振动特性的变化规律. 现将固支-简支边界约束右端的刚度系数由0逐渐增大至无穷大, 相当于从固支-简支边界约束向固支-固支边界约束变化. 表3给出了 k_4 变化时拉索前7阶固有频率随边界约束刚度系数变化的关系, 表中可见, 当 k_4 值从0增大到 10^4 时, 拉索的固有频率也随之相应变大. 然而弹性边界约束刚度对拉索弯曲振动特性的影响并非呈均匀分布, 当 $k_4 \leq 10$ 时, 边界约束刚度影响拉索振动固有频率较大, 呈影响敏感区; 当 $10^2 \leq$

$k_4 \leq 10^4$ 时, 约束刚度对拉索振动固有频率的影响不明显, 对于低阶频率几乎没有作用.

表3 固支-弹性边界下拉索前7阶固有频率 Hz

阶数	$k_4=0$	$k_4=10$	$k_4=10^2$	$k_4=10^3$	$k_4=10^4$
1	10.62	11.50	11.64	11.66	11.66
2	23.17	24.99	25.17	25.29	25.34
3	38.98	41.69	41.86	42.33	42.37
4	58.84	62.49	63.47	63.49	63.54
5	83.08	87.52	88.54	88.93	88.95
6	112.02	117.33	119.03	119.23	119.32
7	145.61	151.54	153.69	153.98	154.04

为更加直观地描述边界约束刚度对拉索弯曲振动特性的影响, 图7给出前3阶模态振型随一端边界约束刚度无量纲化系数变化的情况, 图中可见, 边界约束刚度改变了拉索的振动位移.

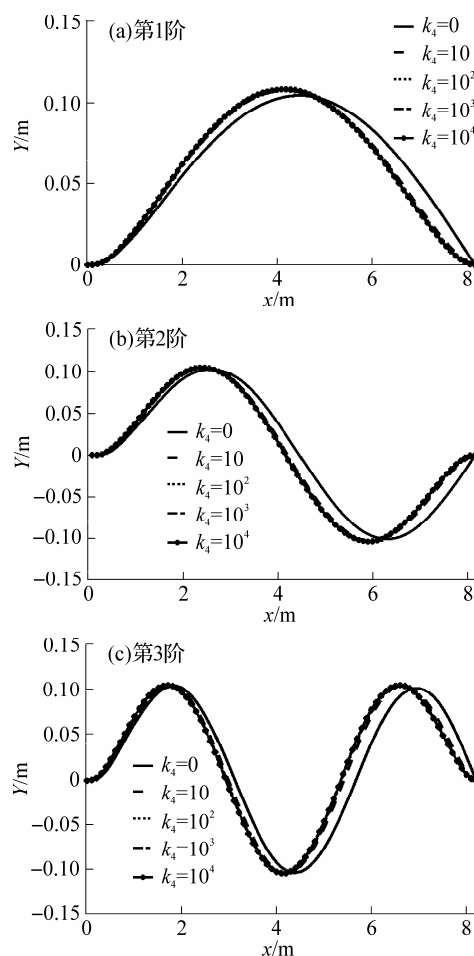


图7 固支-弹性边界约束条件下拉索前3阶振型变化

2.4 两端弹性边界约束条件

考虑斜拉索两端均为弹性边界约束情况. 若

令拉伸弹簧刚度无量纲化系数 $k'_1 = k_1 = k_3$, 扭转弹簧刚度无量纲化系数 $k'_2 = k_2 = k_4$, 表4给出了拉伸弹簧刚度无量纲化系数变化时斜拉索前7阶固有频率的变化情况. 表中可见, 当 k'_1 从1变化到10时, 固有频率变动幅度比较明显, 而 k'_1 从10变化到 10^4 时, 固有频率变动基本趋于稳定. 图8为拉索前3阶振型特性, 反映了相同的变化规律.

表4 拉伸弹簧刚度系数变化时拉索固有频率 Hz

阶数	$k'_1=1$	$k'_1=10$	$k'_1=10^2$	$k'_1=10^3$	$k'_1=10^4$
1	9.22	11.34	11.63	11.66	11.66
2	17.89	23.82	25.12	25.31	25.34
3	34.08	39.76	42.13	42.26	42.37
4	47.88	55.53	62.94	63.56	63.54
5	72.55	78.63	88.09	88.86	88.95
6	95.68	99.94	117.28	119.12	119.32
7	130.58	134.10	151.50	153.85	154.04

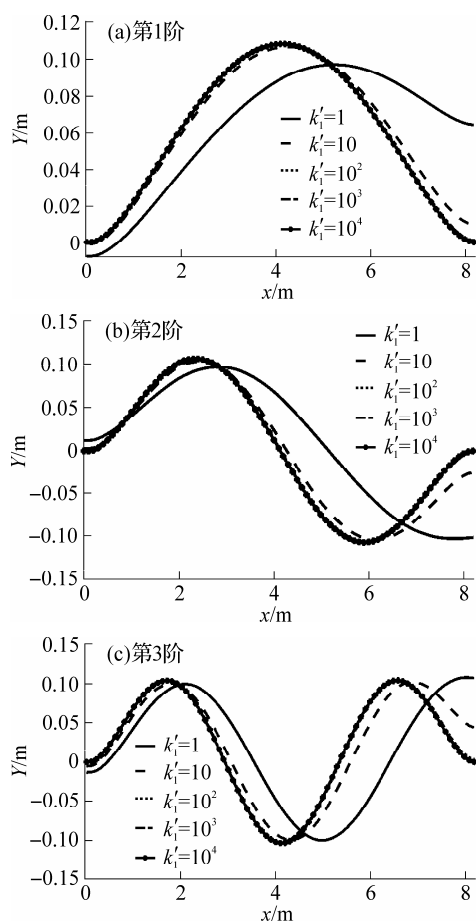


图8 拉伸弹簧刚度无量纲化系数变化时拉索前3阶振型

表5给出了扭转弹簧刚度无量纲化系数变化时斜拉索前7阶固有频率的变化情况. 当 k'_2 从1变

化到10时, 固有频率变化相对明显, 但 k'_2 从10变化到 10^4 时, 固有频率变化幅度越来越小, 对于低阶频率几乎没有影响. 图9的振型特性同样反映这一变化规律.

表5 扭转弹簧刚度系数变化时拉索固有频率 Hz

阶数	$k'_2=1$	$k'_2=10$	$k'_2=10^2$	$k'_2=10^3$	$k'_2=10^4$
1	10.63	11.45	11.64	11.66	11.66
2	24.76	25.15	25.31	25.34	25.34
3	38.60	41.41	42.22	42.32	42.37
4	58.60	62.94	63.42	63.47	63.54
5	84.23	86.88	88.69	88.91	88.95
6	116.89	118.19	119.14	119.23	119.32
7	143.14	150.42	153.55	153.96	154.04

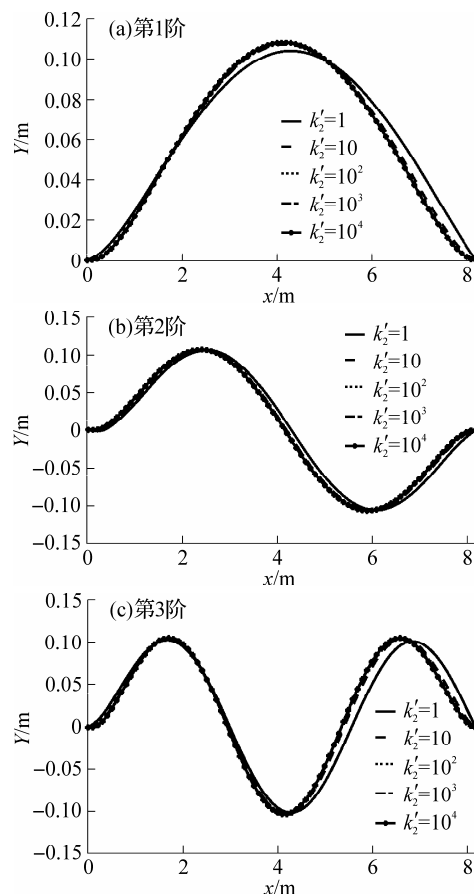


图9 扭转弹簧刚度无量纲化系数变化时拉索前3阶振型

从图8、图9振型对比分析可知, 拉伸弹簧刚度变化对斜拉索弯曲振型的影响要比扭转弹簧刚度更为明显.

2.5 边界条件变化对固有频率的影响

为分析边界条件变化对拉索固有频率的影响, 由伽辽金法计算得到一端边界约束条件由简支改

变到固支时对应固有频率的变化情况,见表6。表中可见,索力不变情况下,当两端边界由固支-简支调整到固支-固支时,拉索振动固有频率误差小于9.79%,表明边界条件对固有频率影响较明显。

表6 一端边界由简支改变到固支时固有频率变化情况

阶数	$k_4=0$		$k_4=10$		$k_4=10^2$		$k_4=10^3$		$k_4=10^4$	
	频率/	误差/	频率/	误差/	频率/	误差/	频率/	误差/	频率/	误差/
	Hz	%	Hz	%	Hz	%	Hz	%	Hz	%
1	10.62	11.50	8.29	11.64	9.60	11.66	9.79	11.66	9.79	
2	23.17	24.99	7.85	25.17	9.02	25.34	9.37	25.34	9.37	
3	38.98	41.69	6.95	41.86	7.39	42.32	8.57	42.37	8.70	

3 索力估算分析

由前面分析可知,拉索边界条件变化会导致计算固有频率存在误差,因此采用固有频率计算索力时也会存在误差。目前针对弹性边界条件下的索力计算分析,已有文献中未给出具体计算公式,为此本文提出在已知拉索固有频率的条件下,通过伽辽金方法对索力进行估算分析的方法。具体过程已在理论部分介绍。本节所采用的拉索基本参数与文献[16]中参数一致,由表7给出。

表7 基本拉索参数

索号	L/m	$m/(kg \cdot m^{-1})$	$EI/(kN \cdot m^2)$	T/kN
1	3	12.10	37.34	600
2	10	16.02	65.46	750
3	20	18.84	90.53	985
4	50	43.80	489.31	2 050
5	100	81.02	1 674.16	3 900
6	150	95.72	2 366.92	4 800
7	200	111.65	3 179.36	5 400
8	250	137.84	4 845.85	6 600
9	300	166.78	7 094.80	8 200
10	350	209.67	11 212.22	9 900

表8给出了拉索在固支-固支和固支-简支两种经典边界条件下估算出的索力变化范围以及所对应相对误差值,相对误差采用公式 $e=(T_{\min}-T) \times 100\%/T$ 或 $e=(T_{\max}-T) \times 100\%/T$, 式中 $T_{\min}$ 表示最小估算索力, $T_{\max}$ 表示最大估算索力, T 表示设计索力。由表可知,当索长为3 m时,两种边界条件下索力误差值都最大,分别为-7.83%~8.17%和-6.83%~6.69%,误差变化了-1.00%~1.48%。随着索长的增

大,索力估算误差逐渐减小,并保持在 $\pm 6\%$ 左右。另外,在固支-简支边界条件下估算出的索力误差小于固支-固支边界条件下估算出的索力误差。

表8 拉索在固支-固支边界和固支-简支边界条件下估算出的索力范围和对应的索力相对误差

索号	固支-固支边界			固支-简支边界		
	$T_{\min}/kN$	$T_{\max}/kN$	误差/%	$T_{\min}/kN$	$T_{\max}/kN$	误差/%
1	553	649	-7.83~8.17	559	643	-6.83~6.69
2	703	798	-6.27~6.40	705	797	-6.06~6.27
3	926	1 046	-5.98~6.19	927	1 045	-5.89~6.09
4	1 928	2 175	-5.95~6.09	1 929	2 175	-5.90~6.09
5	3 670	4 138	-5.89~6.10	3 670	4 140	-5.89~6.15
6	4 520	5 090	-5.83~6.04	4 517	5 093	-5.90~6.10
7	5 085	5 725	-5.83~6.01	5 083	5 728	-5.87~6.07
8	6 215	6 995	-5.83~5.98	6 210	7 000	-5.91~6.06
9	7 720	8 700	-5.85~6.09	7 725	8 705	-5.79~6.10
10	9 325	10 500	-5.81~6.06	9 320	10 505	-5.86~6.11

综上所述,在考虑拉索边界约束为简支、固支或两者组合等特殊情况下,计算得到的索力存在误差。因此在工程应用中,需根据拉索两端的实际边界约束条件来分析弯曲振动特性,以准确计算相应的索力。

4 试验平台搭建与试验结果分析

4.1 试验平台搭建

为验证本文方法的正确性与有效性,搭建拉索振动试验平台,2个基座采用螺栓连接固定在水平地面上。拉索张紧力采用溧阳市超源仪器厂YBY-10KN型拉压传感器测量,其张紧力采集系统采用东华测试技术有限公司DH3820型采集器,振动模态测试采用东华测试技术有限公司DH5922型采集器。利用力锤敲击拉索获得振动信号,通过在拉索1/4索长处安装加速度传感器测量振动信号,再将振动信号通过采集仪传输到电脑中,通过软件进行分析。

4.2 试验结果及验证

选用304不锈钢索作为试验对象,其基本参数如下:直径4 mm,弹性模量 $E=1.93 \times 10^8$ Pa,截面惯性矩 $I=1.257 \times 10^{-11}$ m⁴, $\rho A=0.081$ kg·m⁻¹, $L=8.3$ m, $T=4 081$ N。

分别在两端固支和固支-简支两种边界条件下

进行试验.表9给出了两端固支边界条件下试验结果与本文方法计算结果前10阶固有频率的对比情况.表中可见,最大相对误差为4.232%,最小相对误差为0.348%.同样,表10给出了固支-简支边界条件下试验结果与本文方法计算结果前10阶固有频率的对比情况.表中可见,最大相对误差为4.908%,最小相对误差为0.031%.通过对比分析再次验证本文边界模拟方式与理论模型的正确性.在两种边界条件下估算出的 $T_{\min}$ 均为3 840 N, $T_{\max}$ 均为4 330 N,索力相对误差均为-5.91%~6.10%,由此可见,本文方法可用于有效估算拉索索力.

表9 两端固支边界条件下固有频率对比

阶数	试验值频率/Hz	本文方法频率/Hz	相对误差/%
1	14.114	14.026	-0.619
2	27.194	28.340	4.232
3	40.548	42.095	3.815
4	55.432	56.670	2.234
5	71.174	70.200	-1.360
6	86.580	84.943	-1.890
7	98.889	98.544	-0.348
8	108.992	113.565	4.195
9	123.671	125.832	1.747
10	139.763	141.427	1.191

表10 固支-简支边界条件下固有频率对比

阶数	试验值频率/Hz	本文方法频率/Hz	相对误差/%
1	14.406	14.055	-2.430
2	27.655	28.244	2.132
3	41.221	42.186	2.343
4	56.441	56.458	0.031
5	72.495	70.379	-2.917
6	89.015	84.646	-4.908
7	100.305	98.825	-1.474
8	110.825	113.191	2.135
9	126.076	126.731	0.519
10	142.591	142.732	0.098

5 结论

通过对弹性边界条件下斜拉索弯曲振动特性进行建模分析,得出如下结论:

(1)提出了基于伽辽金原理的弹性边界条件下拉索弯曲振动模型与索力估算分析方法.在拉索

两端边界引入拉伸弹簧约束和扭转弹簧约束,其他所有边界条件均可通过调节两端弹簧刚度无量纲化系数实现振动特性分析计算,为斜拉索两端约束的工程设计与振动故障分析提供了一种有效的求解方法.

(2)分析计算了两端固支和固支-简支边界条件下拉索振动模态参数,对比已有参考文献的解析结果,结果表明,伽辽金法对于求解分析不同边界条件拉索弯曲振动特性是有效的.当边界约束条件改变时,只需调节边界约束刚度系数即可,而无需修正本文模型.

(3)拉索边界约束条件改变对索力和固有频率的影响表明:当索力不变,而拉索的一端边界约束由简支变化为固支时,拉索振动固有频率变化率低于9.79%,将拉索边界考虑为固支或简支是存在误差的;在拉索固有频率的变化率保持在 $\pm 3\%$ 以内的条件下,当边界条件为固支-固支时,拉索估算索力最大误差为-7.83%~8.17%,边界条件为固支-简支时,拉索估算索力最大误差为-6.83%~6.69%,误差变化了-1.00%~1.48%.

(4)通过搭建拉索振动试验平台,在两端固支和固支-简支两种边界条件下对拉索进行模态试验,通过试验结果与计算结果进行对比,其相对误差小于4.908%,表明本文方法在计算弹性边界条件下拉索振动模态是有效的.

参考文献:

- [1] 李国强,顾明.拉索振动、动力检测与振动控制理论[M].北京:科学出版社,2014:98-99.
- [2] Wei J B, Li G Q, Mohammad R R. Theoretical study on cable tension detection considering support vibration[C]//Transportation and Development Innovative Best Practices. Beijing: ASCE, 2008:450-455.
- [3] 甘泉.复杂边界条件下索结构的内力识别方法研究[D].广州:华南理工大学,2015.
- [4] 魏金波,李国强,蒋夏子俊.弹性支承拉索动力特性研究[J].结构工程师,2011,27(3):25-30.
- [5] 刘文峰,应怀樵,柳春图.考虑刚度及边界条件的索力精确求解[J].振动与冲击,2003,22(4):12-25.
- [6] 林立,李胡生,瞿志豪,等.考虑刚度及固支边界条件的实用索力求解方法与试验研究[J].振动与冲击,2010,29(7):221-224;227.
- [7] 廖敬波,唐光武,孟利波.固结拉索的一种近似频率计

- 算公式[J]. 振动与冲击, 2013, 32(6):149-151; 172.
- [8] 秦小平, 廖敬波, 孟利波. 固支-铰支拉索近似频率计算公式及求解条件讨论[C]//中国土木工程学会桥梁及结构工程分会. 第二十一届全国桥梁学术会议论文集(下册). 北京: 人民交通出版社, 2014:969-974.
- [9] Kim B H, Park T. Estimation of cable tension force using the frequency-based system identification method[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 304(3/5):660-676.
- [10] Ceballos M A, Prato C A. Determination of the axial force on stay cables accounting for their bending stiffness and rotational end restraints by free vibration tests[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 317(2):127-141.
- [11] Ni Y Q, Gao Z M, Zheng G. Dynamic analysis of large-diameter sagged cables taking into account flexural rigidity[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 257(2): 301-319.
- [12] 郑罡, 倪一清, 高赞明, 等. 斜拉索张力测试和参数评估的理论和应用[J]. 土木工程学报, 2005, 38(3):64-69.
- [13] Strang G, Fix G J. An Analysis of the Finite Element Method[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973:216-240.
- [14] 唐盛华, 方志. 考虑中间支撑的拉索等效索长计算方法[J]. 振动与冲击, 2013, 32(7):82-87.
- [15] Robert J L, Bruhat D, Gervais J P, et al. The measurement of cable tension by the vibratory method[J]. Bulletin de Liaison des Laboratoires des Ponts et Chaussees, 1991, 173(7):109-114.
- [16] 方志, 汪建群, 颜江平. 基于频率法的拉索及吊杆张力测试[J]. 振动与冲击, 2007, 26(9):78-82.
- [17] 赵子龙. 振动力学[M]. 国防工业出版社, 2014:174-175.
- [18] 方志, 张智勇. 斜拉桥的索力测试[J]. 中国公路学报, 1997, 10(1):51-58.
- [19] 许俊. 斜拉索索力简化计算中的精度分析[J]. 同济大学学报, 2001, 29(5):611-615.
- [20] 宋一凡. 公路桥梁动力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 1999.
- [21] 王万金, 玄志武, 张志国. 切比雪夫多项式在动态载荷识别中的应用[J]. 强度与环境, 2013, 40(6):39-44.

Modeling of bending vibration characteristics of stay cables and analysis of cable force under elastic boundary condition

YAN Wei, FENG Zhi-min, CHEN Yue-hua*, ZHANG Gang, CHENG Peng

(Faculty of Maritime and Transportation, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In order to solve the problem of inaccurate estimation of cable force, an analytical model of cable vibration characteristics based on Galerkin principle under elastic boundary conditions is presented. The vibration characteristic function of the cable is described as Chebyshev series. According to the principle of virtual displacement, the vibration characteristic equation is constructed and the n th order natural frequency and corresponding mode shapes of the cable are obtained with calculation of the cable force. By comparing with the reference results from literature, the validity of the proposed method is verified. The influence of the cable boundary constraints on cable force and vibration characteristics is studied. Cable force is analyzed and estimated when the natural frequency of the cable changes within $\pm 3\%$. Finally, a cable vibration test platform is built to verify the method by comparing the test results with the calculation results. The results show that when the cable boundary is fixed-fixed, the maximum error of estimated cable force is around -7.83% to 8.17%. When the boundary is fixed-hinged, the maximum error of estimated cable force is around -6.83% to 6.69%. The error is varied around -1.00% to 1.48%. The above analysis shows that the corresponding cable force should be calculated according to the actual boundary constraints at both ends of the cable.

Key words: Galerkin principle; Chebyshev series; elastic boundary; restrained stiffness; vibration characteristics; cable force analysis

(责任编辑 韩 超)