

基于二到六位比特编码的单量子比特丢失纠错

韩 超

(宁波大学 理学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 鉴于利用光子在光纤中传输来进行量子通信时, 最难纠正的错误是光子丢失情况, 提出一种两位逻辑比特到六位物理比特的编码方案. 当1个光子丢失时, 通过补充处于特定初始态的光子, 并执行一系列逻辑操作与投影测量便可纠正错误, 使得输出态与输入态一致. 方案在执行过程中无需辅助比特, 在一定条件下的通信效率比以往方案有所提高.

关键词: 量子编码; 量子纠错; 比特丢失; 量子通信

中图分类号: O413

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2013) 01-0110-03

量子通信因具有独特的安全性和高效性而引起人们广泛的关注. 近年来的一些实验进展, 比如量子密码术^[1-2]以及量子逻辑操作^[3-4]等都给人一种希望, 那就是量子通信的实用化就在不远的将来. 然而, 量子通信要真正被人们作为一种常规的通信方式来使用, 那么量子信息就必须实现远距离的传送, 即实现远程量子通信, 其优势才能真正地显现出来. 实现远程量子通信的瓶颈在于通信出错率随着通信方之间信道的长度增加而呈指数级的增长. 以光纤作为通信信道, 它对光子吸收和消偏振都随其长度呈指数级增长. 要发送1个光子而不被吸收, 即接收方能接收到光子, 则发送次数随距离指数增长, 即使光子到达了, 传输态的保真度也随距离指数衰减. 量子中继^[5-6]利用嵌套纯化方式可建立远距离的量子通道, 然而纯化协议的执行需要量子态达到某个特定的最低保真度, 当距离增长时就难以满足, 且实际情况中纯化操作的非完美性也决定了量子态所能达到的最大保真度, 也限制了方案的效率. 近年来, 人们针对量子比特丢失提出了一些基于量子编码的方案^[7-10], 可以利用线性器件实现量子存储器, 利用可寻址原子系统执行量子计算等. 量子信息过程中的比特丢失是最为严重的出错, 利用量子编码进行纠错无论对于量子通信还是量子计算都非常有意义.

1 编码方式

量子比特出错可用标准的量子纠错方案进行纠错, 对比特丢失进行纠错的第一步就是通过一系列的物理操作将比特丢失出错转化为普通的比特出错. 利用量子非破坏性测量(QND)得知某位置的比特丢失, 将处于特定初始态的比特放置在丢失比特的位置上, 这样就将比特丢失的错误转化成了标准的量子错误, 最后用已有的量子纠错方法如基于Calderbank-Shor-Steane (CSS)码的纠错方案^[11-12]完成整个纠错过程. 为实现这样的纠错过程, 需要的编码应满足当有1个物理比特丢失时, 码字的所有态是可区分的, 这样码字能保持编码逻辑比特的相干性. Grassl, Beth 和 Pellizzari (GBP)提出的编码^[13]满足这样的要求. Gingrich 等人利用GBP编码并通过2个辅助位实现了对单光子丢失的纠错^[7]. Vala 将1个逻辑比特编码为4个物理比特, 不需要额外的辅助位就可实现纠错^[8].

现考虑将两位逻辑比特编码为六位物理比特, 编码方式如下:

$$\begin{aligned} |00\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|000000\rangle + |111111\rangle), \\ |01\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|000011\rangle + |111100\rangle), \\ |10\rangle_L &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|001100\rangle + |110011\rangle), \end{aligned}$$

收稿日期: 2012-10-12.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://nbdxlg.paperopen.com/>

基金项目: 国家自然科学基金(11204146); 宁波大学人才基金(2006467); 宁波大学科研基金(xkl055).

作者简介: 韩 超 (1979-), 男, 湖南南县人, 博士/讲师, 主要研究方向: 量子信息. Email: hanchao@nbn.edu.cn

$$|11\rangle_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (|001111\rangle + |110000\rangle). \quad (1)$$

2 纠错过程

两比特量子系统的态可表示为 $|\psi\rangle = c_1|00\rangle_L + c_2|01\rangle_L + c_3|10\rangle_L + c_4|11\rangle_L$, 其中 $\sum_{i=1}^4 |c_i|^2 = 1$. 利用两位到六位比特编码, 则可实现对单比特丢失的纠错, 纠错过程如图 1 所示.

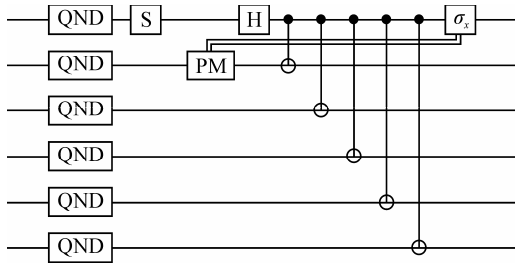


图 1 比特丢失纠错量子电路

方案以第一位量子比特丢失为例. QND 指示出错位置, 并触发光子源(S)产生 1 个处于 $|0\rangle$ 态的光子. 投影测量(PM)使得系统的混合态坍缩, 后续的 Hadamard(H)门、受控非(CNOT)门以及 σ_x 操作使得量子逻辑态得以重新构建.

为便于描述, 采用纯态概率分布的形式来表示系统状态^[7], 即 $\rho = \sum_k p_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k| = \{(\phi_1, p_1), \dots, (\phi_m, p_m)\}$, 则系统初始态可写为:

$$\rho_0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [c_1(|000000\rangle + |111111\rangle) + c_2(|000011\rangle + |111100\rangle) + c_3(|001100\rangle + |110011\rangle) + c_4(|001111\rangle + |110000\rangle)], 1 \right\}. \quad (2)$$

假设第 1 个光子丢失, 通过 QND 装置检测到错误后, 其后的单光子枪制备一个处于基态 $|0\rangle$ 的光子来替代丢失的光子, 此时系统态为:

$$\rho_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [c_1(|000000\rangle + |011111\rangle) + c_2(|000011\rangle + |011100\rangle) + c_3(|001100\rangle + |010011\rangle) + c_4(|001111\rangle + |010000\rangle)], 1 \right\}, \quad (3)$$

即:

$$\rho_1 = \{ (c_1|000000\rangle + c_2|000011\rangle + c_3|001100\rangle + c_4|001111\rangle, 1/2), (c_1|011111\rangle + c_2|011100\rangle + c_3|010011\rangle + c_4|010000\rangle, 1/2) \}, \quad (4)$$

注意到(4)式中第 2 个比特给出了 2 个纯态投影的标识, 通过对此比特进行投影测量, 可以使系统由混合态变成纯态. 如测量结果是 0, 则 ρ_1 就变成:

$$\rho_2 = \{ c_1|000000\rangle + c_2|000011\rangle + c_3|001100\rangle + c_4|001111\rangle, 1 \}. \quad (5)$$

对第 1 个比特施加 Hadamard 门操作, 则得到叠加态:

$$\rho_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [c_1(|000000\rangle + |100000\rangle) + c_2(|000011\rangle + |100011\rangle) + c_3(|001100\rangle + |101100\rangle) + c_4(|001111\rangle + |101111\rangle)], 1 \right\}. \quad (6)$$

最后以第 1 个比特为控制位, 对其余的比特分别做受控非(CNOT)门操作, 则系统态转换为:

$$\rho_4 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [c_1(|000000\rangle + |111111\rangle) + c_2(|000011\rangle + |111100\rangle) + c_3(|001100\rangle + |110011\rangle) + c_4(|001111\rangle + |110000\rangle)], 1 \right\}. \quad (7)$$

比较(7)式和(2)式可知 $\rho_4 = \rho_0$, 即比特丢失错误被纠正了.

如果对第 2 个物理比特测量的结果是 1, 那么 ρ_1 就变成:

$$\rho'_2 = \{ c_1|011111\rangle + c_2|011100\rangle + c_3|010011\rangle + c_4|010000\rangle, 1 \}. \quad (8)$$

同样, 对第 1 个比特施加 Hadamard 门操作, 然后以第 1 个比特为控制位, 对其余的比特分别做 CNOT 操作, ρ'_2 将变成:

$$\rho'_3 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [c_1(|011111\rangle + |100000\rangle) + c_2(|011100\rangle + |100011\rangle) + c_3(|010011\rangle + |101100\rangle) + c_4(|010000\rangle + |101111\rangle)], 1 \right\}. \quad (9)$$

最后对第 1 个量子比特执行 σ_x , 即比特翻转操作, 即得到:

$$\rho'_4 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} [c_1(|111111\rangle + |000000\rangle) + c_2(|111100\rangle + |000011\rangle) + c_3(|110011\rangle + |001100\rangle) + c_4(|110000\rangle + |001111\rangle)], 1 \right\}. \quad (10)$$

同样, $\rho'_4 = \rho_0$, 即实现了比特丢失的纠错.

其他位的光子丢失也可以用同样方式进行纠错, 只是测量位做相应改变即可, 若第 i 位比特丢失, 则对第 $i - (-1)^i$ 位进行投影测量.

3 效率分析

当光子在光纤中传输, 光纤吸收吸收为 α , 长度为 d , 则成功传输的概率为 $p(d) = \exp(-\alpha d)$.

对于单个光子的丢失, 上述编码方式可用来纠错, 恢复两位逻辑比特态. 若编码以及相应操作都是完美的, 那么传输距离为 d 时, 无光子丢失或只有 1 个光子丢失的概率为 $p_f = p^6 + 6p^5(1-p)$.

文献[8]中使用一位到四位的比特编码纠正单比特丢失错误, 其相应的成功概率可记为 $p'_f = p^4 + 4p^3(1-p)$. 本文方案编码了两比特信息, 因此我们用 $2p_f/6$ 和 $p'_f/4$ 做比较. 定义函数:

$$f(p) = \frac{2p_f/6}{p'_f/4} = \frac{4p^2(6-5p)}{3(4-3p)},$$

当 $p > 0.767$ 时, $f(p) > 1$, 传输效率得以提高, 即每个物理比特传输的信息要比文献[8]中的多.

4 结论

量子编码以合适的方式引进信息冗余, 将多位物理比特编码为少位逻辑比特, 提高信息的抗干扰能力, 纠正或防止量子错误. 针对比特丢失, 提出了两位到六位的量子编码, 利用 QND 装置、量子逻辑门以及光探测器推导了量子态的演化过程, 分析了光子传输成功的概率. 从研究结果来看, 提出的方案能实现在单比特丢失时, 使得输出态与输入态一致, 即完成纠错, 并且与文献[8]相比, 信息传输效率更高.

参考文献:

- [1] Wang S, Chen W, Guo J F, et al. 2 GHz clock quantum key distribution over 260 km of standard telecom fiber[J]. Opt Lett, 2012, 37(6):1008-1010.
- [2] Brida G, Cavanna A, Degiovanni I P, et al. Experimental realization of counterfactual quantum cryptography[J].

Laser Phys Lett, 2012, 9(3):247-252.

- [3] Ospelkaus C, Warring U, Colombe Y, et al. Microwave quantum logic gates for trapped ions[J]. Nature, 2011, 476:181-184.
- [4] Bermudez A, Schmidt P O, Plenio M B, et al. Robust trapped-ion quantum logic gates by continuous dynamical decoupling[J]. Phys Rev A, 2012, 85(4):40302-40308.
- [5] Briegel H J, Dür W, Cirac J I, et al. Quantum repeaters: The role of imperfect local operations in quantum communication[J]. Phys Rev Lett, 1998, 81(26):5932-5935.
- [6] Dür W, Briegel H J, Cirac J I, et al. Quantum repeaters based on entanglement purification[J]. Phys Rev A, 1998, 59(1):169-181.
- [7] Gingrich R M, Kok P, Lee H, et al. All linear optical quantum memory based on quantum error correction[J]. Phys Rev Lett, 2003, 91(21):217901-217908.
- [8] Vala J, Whaley K B, Weiss D S. Quantum error correction of a qubit loss in an addressable atomic system[J]. Phys Rev A, 2005, 72(5):52318-52322.
- [9] Wasilewski W, Banaszek K. Protecting an optical qubit against photon loss[J]. Phys Rev A, 2007, 75(4):316-325.
- [10] Lassen M, Sabuncu M, Huck A, et al. Quantum optical coherence can survive photon losses using a continuous-variable quantum erasure-correcting code[J]. Nature Photonics, 2010, 4(10):700-705.
- [11] Calderbank A R, Shor P W. Good quantum error-correcting codes exist[J]. Phys Rev A, 1996, 54(2):1098-1105.
- [12] Steane A. Multiple-particle interference and quantum error correction[J]. Proc R Soc Lond A, 1996, 452:2551-2577.
- [13] Grassl M, Beth T, Pellizzari T. Codes for the quantum erasure channel[J]. Phys Rev A, 1997, 56(1):33-38.

Quantum Error Correction for Qubit Loss via Two-to-six Qubit Encoding

HAN Chao

(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: A two-to-six qubit encoding scheme which can recover the loss of one qubit in the transmission is presented. The qubit loss is first detected using a quantum nondemolition measure and then transformed into a standard qubit error by inserting a new photon. The state of qubits is reconstructed via a sequence of one projective measurement, two single-qubit gates, and five controlled-NOT operations. In the process no ancillary qubits are required. Finally the success probability is analyzed.

Key words: quantum encoding; quantum error correction; qubit loss; quantum communication

(责任编辑 章践立)