

Manin-Radul 超对称 KdV 方程的贝克隆变换和 非线性叠加公式及其离散化

夏爱玲, 薛玲玲*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 给出了 Manin-Radul 超对称 KdV 方程的贝克隆变换和非线性叠加公式, 由此获得了超的一孤子解和二孤子解, 构造了超的半离散系统和全离散系统, 并考虑了离散系统的连续极限.

关键词: 贝克隆变换; 非线性叠加公式; 孤子解; 离散可积系统; 超对称 KdV 方程

中图分类号: O175.29

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2019) 04-0057-06

Kupershmidt 在 1984 年提出了超 Korteweg-de Vries(KdV)方程^[1]. 随后有学者给出了 Manin-Radul 超对称 KdV(MRsKdV)方程^[2]:

$$\begin{aligned}\alpha_t &= \alpha_{xxx} + 3(\alpha\alpha')_x + 6(\alpha u)_x, \\ u_t &= u_{xxx} + 6uu_x + 3(\alpha u')_x,\end{aligned}\quad (1)$$

其中: α 和 u 分别是依赖于时间变量 t , 空间变量 x 和 Grassmann 奇变量 θ 的费米超场和玻色超场.

为方便起见, 使用记号 $f_x \equiv \partial f / \partial x$, $f_t \equiv \partial f / \partial t$ 和 $f' \equiv (Df)$. $D \equiv \partial / \partial \theta + \theta(\partial / \partial x)$ 是超算子. MRsKdV 方程(1)包含 2 种约化情形: (1)当 $\alpha = 0$ 时, 退化为 KdV 方程; (2)当 $u = 0$ 时, 退化为 Manin-Radul-Mathieu 超对称 KdV(MRMsKdV)方程:

$$\alpha_t = \alpha_{xxx} + 3(\alpha\alpha')_x.$$

值得注意的是, MRMsKdV 方程在超对称变换下保持不变, 而 Kupershmidt 提出的超 KdV 方程没有这个性质^[3]. 此外, 对于 KdV 方程, 还存在其他超的或超对称的扩展方程^[4-9].

众所周知, 达布-贝克隆变换是构造非线性系统不同形式解的有效方法之一^[10-13]. Liu^[14]首先将达布变换推广到了超对称可积系统中, 给出了 MRsKdV 方程 2 种类型的达布变换, 并且在文献[15]中迭代了初等达布变换, 获得了 Wronskian 类型的解. Shaw 等^[16]进一步对谱问题和共轭谱问题

的初等达布变换进行了迭代, 并获得了 Wronskian 型和二元型的解. 此外, MRMsKdV 方程的贝克隆变换、达布变换以及非线性叠加公式都是已知的^[14,17-19]. 除了构造解, 达布-贝克隆变换还可以用于生成可积离散系统^[20-22]. 至 2013 年, 该可积离散化方法被应用于超可积系统和超对称可积系统中^[23-28].

本文从 MRsKdV 方程已知的达布变换出发, 导出了包含 2 种约化情形的贝克隆变换, 并构造出相应的非线性叠加公式和孤子解. 此外, 利用贝克隆变换和非线性叠加公式来可积离散化势 MRsKdV 方程.

1 贝克隆变换

令 $\alpha = 2\beta_x$, $u = 2q_x$, 由式(1)得:

$$\begin{aligned}\beta_t &= \beta_{xxx} + 6\beta_x\beta'_x + 12\beta_xq_x, \\ q_t &= q_{xxx} + 6q_x^2 + 6\beta_xq'_x,\end{aligned}\quad (2)$$

即势 MRsKdV 方程.

回顾相应的 Lax 对和达布变换. 设 ψ 满足线性问题:

$$\begin{aligned}L\psi &= \lambda\psi, \\ L &= \partial_x^2 + \alpha D + u, \\ \psi_t &= A\psi,\end{aligned}$$

收稿日期: 2019-02-27.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journallg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11501312); 浙江省自然科学基金(LQ15A010002); 宁波大学王宽诚幸福基金.

第一作者: 夏爱玲(1995-), 女, 安徽阜阳人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 孤子理论与可积系统. E-mail: 976791060@qq.com

*通信作者: 薛玲玲(1986-), 女, 浙江宁波人, 讲师, 主要研究方向: 孤子理论与可积系统. E-mail: xuelingling@nbu.edu.cn

$$A = 4\partial_x^3 + 6\alpha D^3 + 6u\partial_x + 3\alpha_x D + 3u_x, \quad (3)$$

其相容性条件为:

$$L_t = [A, L],$$

等价于 MRsKdV 方程. 设 f 与 χ 是当 $\lambda = p_1^2$ 时式(3)的费米解和玻色解. 由于式(3)的初等达布变换为:

$$\psi_{[0]} = (D - \delta)\psi, \quad \delta = f' / f,$$

$$\alpha_{[0]} = -\alpha + 2\delta_x,$$

$$u_{[0]} = u + \alpha' - 2\delta(\alpha - \delta_x),$$

不能直接约化到 KdV 方程或 MRMskdV 方程, 所以还需对其迭代. 重新定义为:

$$\psi_{[1]} = (\partial_x - \Lambda D - s)\psi,$$

$$\alpha_{[1]} = \alpha + 2\Lambda_x, \quad u_{[1]} = u + 2s_x, \quad (4)$$

其中 Λ 和 s 满足:

$$f_x = \Lambda f' + sf, \quad \chi_x = \Lambda \chi' + s\chi. \quad (5)$$

当 $f\chi' \pm f'\chi \neq 0$ 时, 由式(5)解得:

$$\Lambda = \frac{f\chi_x - f_x\chi}{f\chi' - f'\chi}, \quad s = \frac{f_x\chi' - \chi_x f'}{f\chi' + f'\chi}.$$

此时, $\psi_{[1]}$ 满足:

$$L_{[1]}\psi_{[1]} = \lambda\psi_{[1]}, \quad \psi_{[1,t]} = A_{[1]}\psi_{[1]},$$

其中: $L_{[1]}$ 和 $A_{[1]}$ 是将 L 和 A 中的 α, μ 分别用 $\alpha_{[1]}, u_{[1]}$ 替代. 对上述达布变换式(4)和(5)可以作以下 2 种约化: (1)当 $\Lambda = \chi = \alpha = \alpha_{[1]} = 0$ 时, 式(4)和(5)则退化为 KdV 方程的达布变换; (2)取 $f = u = u_{[1]} = 0$, 且 s 为常数, 式(4)和(5)即约化为 MRMskdV 方程的达布变换^[19].

下面从达布变换式(4)和(5)中导出相应的贝克隆变换. 记 $\alpha_{[1]} = 2\beta_{[1,x]}$ 和 $u_{[1]} = 2q_{[1,x]}$, 由式(4)可得:

$$\Lambda = \beta_{[1]} - \beta,$$

$$s = q_{[1]} - q - p_1,$$

其中 p_1 为积分常数. 利用 f 满足式(3)及式(5)的第一个方程, 可计算得:

$$\begin{aligned} 0 = & f_{xx} + \alpha f' + uf - p_1^2 f = \\ & (s_x + u + s^2 - p_1^2 + \Lambda s')f + \\ & (\Lambda_x + \alpha + 2s\Lambda + \Lambda'\Lambda)f', \end{aligned}$$

于是

$$\Lambda_x = -\alpha - 2s\Lambda - \Lambda'\Lambda,$$

$$s_x = p_1^2 - u - s^2 - \Lambda s', \quad (6)$$

或者

$$\begin{aligned} (\beta_{[1]} + \beta)_x = & -(\beta_{[1]} - \beta)[2(q_{[1]} - q - p_1) + \\ & (\beta_{[1]} - \beta)'], \\ (q_{[1]} + q)_x = & p_1^2 - (q_{[1]} - q - p_1)^2 - \\ & (\beta_{[1]} - \beta)(q_{[1]} - q)', \end{aligned} \quad (7)$$

即为 MRsKdV 方程的空间部分的贝克隆变换.

又由于 (β, q) 和 $(\beta_{[1]}, q_{[1]})$ 是势 MRsKdV 方程的 2 组解, 则

$$\begin{aligned} (\beta_{[1]} - \beta)_t = & (\beta_{[1]} - \beta)_{xxx} + 6(\beta_{[1,x]}\beta'_{[1,x]} - \beta_x\beta'_x) + \\ & 12(\beta_{[1,x]}q_{[1,x]} - \beta_xq_x), \\ (q_{[1]} - q)_t = & (q_{[1]} - q)_{xxx} + 6(q_{[1,x]}^2 - q_x^2) + \\ & 6(\beta_{[1,x]}q'_{[1,x]} - \beta_xq'_x), \end{aligned} \quad (8)$$

即为 MRsKdV 方程的时间部分的贝克隆变换.

显然, 分别取 $\beta = \beta_{[1]} = 0$ 和 $q = q_{[1]} = 0$, 式(7)和(8)可以直接约化为 KdV 方程和 MRMskdV 方程的贝克隆变换.

利用式(7)和(8)构造 MRsKdV 方程的一孤子解. 从零解 $\beta = 0$ 和 $q = 0$ 出发, 式(7)变为:

$$\begin{aligned} \beta_{[1,x]} = & -\beta_{[1]}[2(q_{[1]} - p_1) + \beta'_{[1]}], \\ q_{[1,x]} = & p_1^2 - (q_{[1]} - p_1)^2 - \beta_{[1]}q'_{[1]}, \end{aligned}$$

解得:

$$\begin{aligned} \beta_{[1]} = & \frac{\mu + \theta p_1 \sinh c_1}{\Delta} + \frac{\theta \mu \nu c_3}{\cosh^2(P + c_1)} - \\ & \frac{\theta \mu \nu \cosh(c_1 + c_2)}{\Delta^2 \cosh c_2} (e^{c_1} + e^{-2P} \cosh c_1), \\ q_{[1]} = & p_1(1 + \tanh P) \left(1 + \frac{\theta \mu}{\Delta} \right) + \frac{\theta \nu p_1}{\Delta} \\ & \frac{\mu \nu \sinh(P + c_1 + c_2)}{\Delta \cosh P \cosh c_2}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $\Delta = \cosh P \cosh(P + c_1)$; $P = p_1 x + p(t)$; c_i 是玻色积分常数; μ 和 ν 是费米积分常数.

将式(9)代入式(8), 可得 P 的完整表达式:

$$P = p_1 x + 4p_1^3 t + c_0,$$

最后, 由 $\alpha_{[1]} = 2\beta_{[1,x]}$ 和 $u_{[1]} = 2q_{[1,x]}$ 可得 MRsKdV 方程的一孤子解.

为简便起见, 取 $c_3 = 0$, $c_2 = -(\pi/2)i - c_1$, $i^2 = -1$,

则式(9)变为:

$$\begin{aligned}\beta_{[1]} &= \frac{\mu + \theta p_1 \sinh c_1}{\Delta}, \\ q_{[1]} &= p_1(1 + \tanh P) \left(1 + \frac{\theta \mu}{\Delta} \right) + \frac{\theta \nu p_1}{\Delta} + \\ &\quad \mu \nu / (\Delta \sinh c_1),\end{aligned}\quad (10)$$

其中: μ, ν, c_1 和 P 分别用 $(1/2)e^n \mu, (1/2)e^n \nu, n$ 和 $P-n$ 替代, 取极限 $n \rightarrow +\infty$, 可得:

$$\begin{aligned}\beta_{[1]} &= (\mu + \theta p_1)(1 + \tanh P), \\ q_{[1]} &= (\mu + \theta p_1)\nu(1 + \tanh P),\end{aligned}\quad (11)$$

式(10)和(11)这 2 种形式的解都已被构造出^[15], 而式(9)是更一般化的解.

2 非线性叠加公式

下面利用达布变换和贝克隆变换来构造非线性叠加公式. 首先, 引入 $\Psi = (\psi, \psi_x, \psi', \psi'_x)^T$, 借助式(3)和(6), 将式(4)改写成矩阵形式:

$$\begin{aligned}\Psi_{[1]} &= W\Psi, \\ W &\equiv W(\Lambda, s; p_1) \equiv \\ &\begin{pmatrix} -s & 1 \\ w_{21} & -s \\ -s' & \Lambda \\ \Lambda w_{21} + (\Lambda' + 2s)s' & -(\Lambda' + 2s)\Lambda - s' \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\begin{pmatrix} -\Lambda & 0 \\ (\Lambda' + 2s)\Lambda & -\Lambda \\ -\Lambda' - s & 1 \\ w_{21} + \Lambda^2 + 2(s\Lambda)' & -\Lambda' - s \end{pmatrix} \leftarrow\end{aligned}$$

其中 $w_{21} = \lambda - p_1^2 + s^2 + \Lambda s'$. 考虑另一个达布变换:

$$\Psi_{[2]} = V\Psi, \quad V \equiv W(\Lambda_2, s_2; p_2),$$

其中 $\Lambda_2 = \beta_{[2]} - \beta$, $s_2 = q_{[2]} - q - p_2$. 由 Bianchi 可交换定理: $\Psi_{[12]} = \Psi_{[21]}$, $\beta_{[12]} = \beta_{[21]}$ 和 $q_{[12]} = q_{[21]}$, 可得相容性条件:

$$W_{[2]}V = V_{[1]}W,$$

其中

$$W_{[2]} = W(\beta_{[12]} - \beta_{[2]}, q_{[12]} - q_{[2]} - p_1; p_1),$$

$$V_{[1]} = W(\beta_{[12]} - \beta_{[1]}, q_{[12]} - q_{[1]} - p_2; p_2),$$

从而可得非线性叠加公式:

$$\beta_{[12]} = \beta - (p_1^2 - p_2^2)(\beta_{[1]} - \beta_{[2]}) /$$

$$[(q_{[1]} - q_{[2]} - p_1 + p_2)(\beta'_{[1]} - \beta'_{[2]} +$$

$$q_{[1]} - q_{[2]} - p_1 + p_2)],$$

$$q_{[12]} = q + [(p_1 + p_2)(q_{[1]} - q_{[2]}) +$$

$$(q'_{[1]} - q'_{[2]})(\beta_{[12]} - \beta)] /$$

$$(q_{[1]} - q_{[2]} - p_1 + p_2),$$

$$(12)$$

显然, 让 β 或 q 分量消失, 式(12)可分别退化为 KdV 方程和 MRMsKdV 方程的非线性叠加公式^[18].

作为应用, 我们利用该叠加公式来构造 MRsKdV 方程的解. 将 $\beta = 0$ 和 $q = 0$ 以及

$$\beta_{[1]} = (\mu_1 + p_1\theta)(1 + \tanh P_1),$$

$$q_{[1]} = (\mu_1 + p_1\theta)\nu(1 + \tanh P_1),$$

$$\beta_{[2]} = (\mu_2 + p_2\theta)(1 + \coth P_2),$$

$$q_{[2]} = p_3\theta\mu_2(1 + \coth P_2),$$

其中

$$P_i = p_i x + 4p_i^3 t + c_i, \quad i = 1, 2,$$

代入式(12)得:

$$\begin{aligned}\beta_{[12]} &= b[(\mu_2 + \theta p_2)(e^{K_1} + e^{-K_2}) - \\ &\quad (\mu_1 + \theta p_1)(e^{K_1} - e^{K_2}) - \\ &\quad \theta \mu_1 \nu (be^{K_1} + e^{K_2})] / (\cosh K_1 + b \cosh K_2) + \\ &\quad \frac{2b[p_2(1 + e^{2P_1}) - p_1(1 - e^{2P_2})]}{(p_2 - p_1)^2 (\cosh K_1 + b \cosh K_2)^2} [\mu_1 \mu_2 \nu + \\ &\quad p_1 \theta \mu_2 \nu + \theta \mu_1 \mu_2 (p_3 + p_2 - p_1)] + \\ &\quad \theta \mu_1 \nu b (e^{K_1} - e^{K_2}) [p_2 (\sinh K_1 - \sinh K_2) + \\ &\quad p_1 (\cosh K_1 - \cosh K_2)] / [(p_2 - p_1) (\cosh K_1 + \\ &\quad b \cosh K_2)^2],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_{[12]} &= b[p_3 \theta \mu_2 (e^{K_1} + e^{-K_2}) - p_1 \theta \nu (e^{K_1} - e^{K_2}) + \\ &\quad \mu_1 \nu (be^{K_1} + e^{K_2})] / (\cosh K_1 + b \cosh K_2) - \\ &\quad \frac{2be^{K_1} [p_1 \mu_2 \nu + p_3 \mu_1 \mu_2 + \theta \mu_1 \mu_2 \nu (2p_1 - p_3)]}{(p_2 - p_1) (\cosh K_1 + b \cosh K_2)} + \\ &\quad 2\theta \mu_1 \mu_2 \nu be^{K_1} [p_1 (e^{K_1} - e^{K_2}) - p_3 (\sinh K_1 - \\ &\quad \sinh K_2)] / [(p_2 - p_1) (\cosh K_1 + b \cosh K_2)^2],\end{aligned}$$

其中

$$b = (p_2 + p_1) / (p_2 - p_1),$$

$$K_1 = P_1 + P_2, \quad K_2 = P_1 - P_2,$$

由 $\alpha_{[12]} = 2\beta_{[12],x}$ 和 $u_{[12]} = 2q_{[12],x}$ 可得 MRsKdV 方程的二孤子解. 特别地, 取 $p_3 = 0$ 和 $\nu = 0$, 即得

MRMsKdV 方程的解^[17-18].

3 可积离散化

3.1 离散系统

贝克隆变换式(7)和非线性叠加式(12)可看成离散系统. 为了达到这个目的, 首先将变量写成其分量形式. 对 β, q 和 ψ 分别在 $\theta=0$ 处进行泰勒展开, 即

$$\beta = \xi + \theta w, q = v + \theta \eta, \psi = \varphi + \theta f,$$

并定义

$$\xi \equiv \xi_n(x), \xi_{[1]} \equiv \xi_{n+1}(x), w \equiv w_n(x), w_{[1]} \equiv w_{n+1}(x),$$

$$\eta \equiv \eta_n(x), \eta_{[1]} \equiv \eta_{n+1}(x), v \equiv v_n(x), v_{[1]} \equiv v_{n+1}(x),$$

从而可将空间部分的贝克隆变换式(7)改写为:

$$\begin{aligned} (\xi_{n+1} + \xi_n)_x &= -(\xi_{n+1} - \xi_n)[(w_{n+1} - w_n) + \\ &\quad 2(v_{n+1} - v_n - p_1)], \\ (w_{n+1} + w_n)_x &= -(w_{n+1} - w_n)[(w_{n+1} - w_n) + \\ &\quad 2(v_{n+1} - v_n - p_1)] + 2(\xi_{n+1} - \xi_n)(\eta_{n+1} - \eta_n - \xi_{n,x}), \\ (\eta_{n+1} + \eta_n)_x &= -(\eta_{n+1} - \eta_n)[(w_{n+1} - w_n) + \\ &\quad 2(v_{n+1} - v_n - p_1)] + (\xi_{n+1} - \xi_n)(v_{n+1} - v_n)_x, \\ (v_{n+1} + v_n)_x &= p_1^2 - (v_{n+1} - v_n - p_1)^2 - \\ &\quad (\xi_{n+1} - \xi_n)(\eta_{n+1} - \eta_n), \end{aligned} \quad (13)$$

这是一个超的半离散(微分-差分)系统. 引入 $\chi_n = (\varphi_n, \varphi_{n,x}, f_n, f_{n,x})^T$, 利用式(3)、(4)和(13)可得:

$$\begin{aligned} \chi_{n,x} &= L_n \chi_n, \\ L_n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda - 2v_{n,x} & 0 & -2\xi_{n,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\eta_{n,x} & 2\xi_{n,x} & \lambda - 2(v_n + w_n)_x & 0 \end{pmatrix}, \\ \chi_{n+1} &= M_n \chi_n, \\ M_n &= \begin{pmatrix} -h & 1 \\ l_1 & -h \\ -\gamma & \zeta \\ \zeta l_1 + (g+2h)\gamma & -(g+2h)\zeta - \gamma \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\leftarrow \begin{pmatrix} -\zeta & 0 \\ (g+2h)\zeta & -\zeta \\ -g-h & 1 \\ l_2 & -g-h \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\zeta \equiv \xi_{n+1} - \xi_n, h \equiv v_{n+1} - v_n - p_1, l_1 \equiv \lambda - p_1^2 + h^2 + \zeta \gamma,$$

$$\gamma \equiv \eta_{n+1} - \eta_n, g \equiv w_{n+1} - w_n, l_2 \equiv l_1 + g^2 + 2(\gamma \zeta + gh),$$

其相容性条件为:

$$M_{n,x} + M_n L_n - L_{n+1} M_n = 0,$$

等价于式(13). 因此式(14)可看成是半离散系统式(13)的 Lax 对.

为获得全离散系统, 需要定义:

$$\xi_n \equiv \xi_{n,m}, \xi_{n+1} \equiv \xi_{n+1,m},$$

对 η, v, w 作同样定义. 考虑式(14)第二式:

$$\chi_{n+1,m} = M_{n,m} \chi_{n,m},$$

以及另一个变换:

$$\chi_{n,m+1} = N_{n,m} \chi_{n,m},$$

其中 $N_{n,m}$ 是 $M_{n,m}$ 中的 $\xi_{n+1,m}, \eta_{n+1,m}, v_{n+1,m}, w_{n+1,m}$ 和参数 p_1 分别替换成 $\xi_{n,m+1}, \eta_{n,m+1}, v_{n,m+1}, w_{n,m+1}$ 和 p_2 , 其相容性条件为:

$$M_{n,m+1} N_{n,m} = N_{n+1,m} M_{n,m},$$

等价于可积的超的全离散(偏差分)系统:

$$\begin{aligned} \xi_{n+1,m+1} &= \xi_{n,m} - \frac{(p_1^2 - p_2^2)\bar{\xi}}{\bar{v}(\bar{w} + \bar{v})}, \\ w_{n+1,m+1} &= w_{n,m} - \frac{(p_1^2 - p_2^2)\bar{w}}{\bar{v}(\bar{w} + \bar{v})} + \\ &\quad \frac{(p_1^2 - p_2^2)(\bar{w} + 2\bar{v})}{\bar{v}(\bar{w} + \bar{v})^2} \left(\bar{\xi} \zeta - \frac{\bar{\xi} \bar{\eta}}{\bar{v}} \right), \\ v_{n+1,m+1} &= v_{n,m} + \frac{p_1 + p_2}{\bar{v}} (v_{n+1,m} - v_{n,m+1}) + \\ &\quad \frac{(p_1^2 - p_2^2)}{\bar{v}^2 (\bar{w} + \bar{v})} \bar{\xi} \bar{\eta}, \\ \eta_{n+1,m+1} &= \eta_{n,m} - \frac{(p_1^2 - p_2^2)^2}{\bar{v}^2 (\bar{w} + \bar{v})} \bar{\xi} + \frac{(p_1^2 - p_2^2)}{\bar{v} (\bar{w} + \bar{v})} \cdot \\ &\quad \left((2h - \bar{v}) \bar{\xi} - \bar{\eta} - \frac{\bar{\xi} \zeta \bar{\eta}}{\bar{w} + \bar{v}} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\zeta \equiv \xi_{n+1,m} - \xi_{n,m}, h \equiv v_{n+1,m} - v_{n,m} - p_1,$$

$$\bar{w} \equiv w_{n+1,m} - w_{n,m+1},$$

$$\bar{\xi} \equiv \xi_{n+1,m} - \xi_{n,m+1}, \bar{\eta} \equiv \eta_{n+1,m} - \eta_{n,m+1},$$

$$\bar{v} \equiv v_{n+1,m} - v_{n,m+1} - p_1 + p_2.$$

事实上, 式(15)是非线性叠加式(12)的分量形式. 若使式(15)中的 v 和 η 分量消失, 可以得到势 MRsKdV 方程的全离散化形式^[19].

3.2 连续极限

以上构造了超半离散系统式(13)和超全离散系统式(15), 对这 2 个系统取适当的连续极限, 说明可以回到势 MRsKdV 方程, 因此这 2 个系统可看成势 MRsKdV 方程的离散化形式.

对于全离散系统式(15), 考虑直连续极限. 首先, 取

$$p_2 \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty, x \equiv m / p_2,$$

并定义

$$\xi_{n,m} \equiv \xi_n(x), w_{n,m} \equiv w_n(x),$$

$$v_{n,m} \equiv v_n(x), \eta_{n,m} \equiv \eta_n(x).$$

接着, 由于 $1/p_2 \rightarrow 0$, 可作以下展开

$$\xi_{k,m+1} \equiv \xi_k \left(x + \frac{1}{p_2} \right) = \xi_k + \frac{1}{p_2} \xi_{k,x} + O \left(\frac{1}{p_2^2} \right),$$

$$k = n, n+1,$$

对 w, v 和 η 也作同样展开. 最后将这些展开式代入式(15), 领头项即给出了半离散系统式(13).

对于半离散系统式(13), 定义新的连续变量 τ 使得:

$$n \rightarrow \infty, p_1 \rightarrow \infty, n / p_1 \equiv \tau,$$

设

$$\xi_n(x) \equiv \xi(x, \tau), w_n(x) \equiv w(x, \tau),$$

$$v_n(x) \equiv v(x, \tau), \eta_n(x) \equiv \eta(x, \tau).$$

分别对 $\xi_{n+1}(x), w_{n+1}(x), v_{n+1}(x)$ 和 $\eta_{n+1}(x)$ 在 $1/p_1$ 处进行泰勒展开, 例如

$$\xi_{n+1}(x) \equiv \xi \left(x, \tau + \frac{1}{p_1} \right) = \xi + \frac{1}{p_1} \xi_\tau + \frac{1}{2p_1^2} \xi_{\tau\tau} + \frac{1}{6p_1^3} \xi_{\tau\tau\tau} + O \left(\frac{1}{p_1^3} \right).$$

为了平衡, 需定义独立变量 t , 使得:

$$\partial_\tau = \partial_x + \frac{1}{12p_1^2} \partial_t.$$

最后由式(13)的领头项可得:

$$\xi_t = \xi_{xxx} + 6\xi_x w_x + 12\xi_x v_x,$$

$$w_t = w_{xxx} - 6\xi_x \xi_{xx} + 6w_x^2 + 12w_x v_x - 12\xi_x \eta_x,$$

$$\eta_t = \eta_{xxx} + 12v_x \eta_x + 6w_x \eta_x - 6\xi_x v_{xx},$$

$$v_t = v_{xxx} + 6v_x^2 + 6\xi_x \eta_x,$$

即势 MRsKdV 方程的分量形式.

参考文献:

- [1] Kupersmidt B A. A super Korteweg-de Vries equation: An integrable system[J]. Physics Letters A, 1984, 102(5): 213-215.
- [2] Manin Y I, Radul A O. A supersymmetric extension of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy[J]. Communications in Mathematical Physics, 1985, 98(1):65-77.
- [3] Mathieu P. Supersymmetric extension of the Korteweg-de Vries equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1988, 29(11):2499-2506.
- [4] Holod P I, Pakuliak S Z. On the Superextension of the Kadomtsev-Petviashvili Equation and Finite-Gap Solutions of Korteweg-de Vries Superequations[M]. Berlin: Springer, 1989:107-116.
- [5] Geng X G, Wu L H. A new super-extension of the KdV hierarchy[J]. Applied Mathematical Letters, 2010, 23(6): 716-721.
- [6] Laberge C A, Mathieu P. $N=2$ superconformal algebra and integrable $O(2)$ fermionic extensions of the Korteweg-de Vries equation[J]. Physics Letters B, 1988, 215(4):718-722.
- [7] Labelle P, Mathieu P. A new $N=2$ supersymmetric Korteweg-de Vries equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1991, 32(4):923-927.
- [8] Tian K, Wang J P. Symbolic representation and classification of $N=1$ supersymmetric evolutionary equations[J]. Studies in Applied Mathematics, 2017, 138(4):467-498.
- [9] Babalic C N, Carstea A S. Bilinear approach to Kuperschmidt super-KdV type equations[J/OL]. [2018-10-18]. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aabda5>.
- [10] Rogers C, Schief W. Bäcklund and Darboux Transformations Geometry and Modern Applications in Soliton Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002:152-192.
- [11] Matveev V B, Salle M A. Darboux transformations and Solitons, Springer Series in Nonlinear Dynamics[M]. Berlin: Springer, 1991:29-47.
- [12] 谷超豪, 胡和生, 周子翔. 孤立子理论中的达布变换及其几何应用[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2005: 1-60.
- [13] 陈登远. 孤子引论[M]. 北京: 科学出版社, 2006:98-121.

- [14] Liu Q P. Darboux transformations for supersymmetric Korteweg-de Vries equations[J]. Letters in Mathematical Physics, 1995, 35(2):115-122.
- [15] Liu Q P, Manas M. Crum transformation and Wronskian type solution for supersymmetric KdV equation[J]. Physics Letters B, 1997, 396(1):133-140.
- [16] Shaw J C, Tu M H. Binary Darboux-Bäcklund transformation for the Manin-Radul super KdV hierarchy [J]. Journal of Mathematical Physics, 1998, 39(9):4773-4784.
- [17] Carstea A S, Ramani A, Grammaticos B. Constructing the soliton solutions for the $N=1$ supersymmetric KdV hierarchy[J]. Nonlinearity, 2001, 14(5):1419-1423.
- [18] Liu Q P, Xie Y F. Nonlinear superposition formula for $N=1$ supersymmetric KdV equation[J]. Physics Letters A, 2004, 325(2):139-143.
- [19] Xue L, Levi D, Liu Q P. Supersymmetric KdV equation: Darboux transformation and discrete systems[J/OL]. [2018-11-26]. <https://doi.org/10.1088/1751-8113/46/50/502001>.
- [20] Levi D, Benguria R. Bäcklund transformations and nonlinear differential difference equations[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, 1980, 77(9):5025-5027.
- [21] Levi D. Nonlinear differential difference equations as Bäcklund transformations[J]. Journal of Physics A (Mathematical and General), 1981, 14(5):1083-1098.
- [22] Hietarinta J, Joshi N, Nijhoff F W. Discrete Systems and Integrability[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2016:60-72.
- [23] Grahovski G G, Mikhailov A V. Integrable discretisations for a class of nonlinear Schrödinger equations on Grassmann algebras[J]. Physics Letters A, 2013, 377(45): 3254-3259.
- [24] Xue L, Liu Q P. Bäcklund-Darboux transformations and discretizations of super KdV equation[J/OL]. [2018-10-17]. <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2014.045>.
- [25] Zhou R G. A Darboux transformation of the $sl(2|1)$ super KdV hierarchy and a super lattice potential KdV equation[J]. Physics Letters A, 2014, 378(25):1816-1819.
- [26] Xue L, Liu Q P. A supersymmetric AKNS problem and its Darboux-Bäcklund transformations and discrete systems[J]. Studies in Applied Mathematics, 2015, 135(1): 35-62.
- [27] Mao H, Liu Q P. Bäcklund-Darboux transformations and discretizations of $N=2, a=2$ supersymmetric KdV equation[J]. Physics Letters A, 2018, 382(5):253-258.
- [28] Mao H, Liu Q P, Xue L. Supersymmetric Sawada-Kotera equation: Bäcklund-Darboux transformations and applications[J]. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2018, 25(3):375-386.

Bäcklund transformation, nonlinear superposition formula and discretizations for Manin-Radul super symmetric KdV equation

XIA Ailing, XUE Lingling^{*}

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo, 315211, China)

Abstract: In this paper, a Bäcklund transformation and a nonlinear superposition formula for the Manin-Radul super symmetric KdV equation are presented, which are used to construct super 1-soliton and 2-soliton solutions, respectively. In addition, super semi-discrete and fully discrete systems are derived and the continuum limits of these discrete systems are also taken into consideration.

Key words: Bäcklund transformation; nonlinear superposition formula; soliton solutions; discrete integrable systems; super symmetric KdV equation

(责任编辑 史小丽)