

一类爱因斯坦 Finsler 度量的若干性质研究

王利平, 李本伶*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 爱因斯坦度量是 Ricci 曲率常数的度量以及比爱因斯坦度量更一般的弱爱因斯坦度量, 在理论物理中有重要的意义. 本文研究一类称为广义 (α, β) -度量的 Finsler 度量, 首先得到广义 (α, β) -度量 $F = \alpha\phi(b^2, s)$ 在共形条件下的 Ricci 曲率; 其次证明当 $F = \alpha\phi(b^2, s)$ 是弱爱因斯坦度量, 且 $\phi = \phi(b^2, s)$ 是关于 s 的二次多项式时, F 必定是 Ricci 平坦爱因斯坦 Finsler 度量; 最后根据 Ricci 平坦 Finsler 度量的定义直接得出 F 是 Ricci 平坦 Finsler 度量的等价方程.

关键词: 广义 (α, β) -度量; Ricci 曲率; 爱因斯坦度量; 弱爱因斯坦度量; Ricci 平坦度量

中图分类号: O186

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2019) 04-0068-05

在 Finsler 几何中, 刻画爱因斯坦空间一直是一个重要的问题. Finsler 几何是没有二次型限制的黎曼几何, 文献[1]详细介绍了研究黎曼几何的方法及其研究成果. Finsler 几何中一个特殊的度量是 Randers 度量^[2], 由代表引力场的黎曼度量 $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ 和代表电磁场的 1-形式 $\beta = b_i(x)y^i$ 组成. Randers 度量的代数式是 $F = \alpha + \beta$, 作为一类典型的 Finsler 度量, Bao^[3] 和 Robles^[4] 刻画了 Randers 度量的爱因斯坦空间.

Finsler 几何中不少度量是由黎曼度量 $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ 和 1-形式 $\beta = b_i(x)y^i$ 定义, 如 (α, β) -度量 $F = \alpha\phi(s)$ 和广义 (α, β) -度量 $F = \alpha\phi(b^2, s)$. 广义 (α, β) -度量是 (α, β) -度量的推广^[5], 其表达式为:

$$F = \alpha\phi(b^2, s), \quad s = \beta / \alpha,$$

这里 $\phi(b^2, s)$ 是一个 C^∞ 正定函数, $b = \|\beta_x\|_\alpha$ 表示 β 关于 α 的模长.

近年来, 人们对广义 (α, β) -度量以及其中的爱因斯坦度量的相关研究已取得若干结果. 如文献[6]给出了刻画 Douglas 型 Ricci 平坦 (α, β) -度量的方程; 文献[7]得到了非 Douglas 型 Ricci 平坦 (α, β) -度量的方程; 文献[8]构造出一些具有常

Ricci 曲率的广义 (α, β) -度量; 文献[9]得到了 (α, β) -度量在 $\phi(s)$ 关于 s 的指数形式时是爱因斯坦 Finsler 度量的充要条件; 文献[10-11]研究了 2 类具有特殊形式的射影平坦广义 (α, β) -度量.

本文在共形条件下研究了广义 (α, β) -度量的 Ricci 曲率和弱爱因斯坦度量的等价方程. 这里得到的方程对进一步研究爱因斯坦型广义 (α, β) -度量和 Ricci 平坦广义 (α, β) -度量具有重要意义. 基于该结果, 可以用适当的方法在共形条件下找到更多的 Ricci 平坦广义 (α, β) -度量和弱爱因斯坦广义 (α, β) -度量.

1 预备知识

定义 1 设 TM 是 n 维微分流形 M 上的切丛, 若 TM 上的函数 $F = F(x, y) : TM \setminus \{0\} \rightarrow [0, \infty)$ 满足以下条件, 则称 F 为 M 上的一个 Finsler 度量.

- (1) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$;
- (2) $F(x, y)$ 在 $TM \setminus \{0\}$ 上是 C^∞ 函数;
- (3) 对任意向量 $y \neq 0$, 矩阵

$$g_{ij}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x, y) = \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j} \text{ 是正定的.}$$

定义 2 设 $F = F(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中开域 U 上的

Finsler 度量, F 的测地线 $x(t)$ 满足以下方程:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2G^i(x(t), \frac{dx}{dt}) = 0,$$

其中

$$G^i = (1/4)g^{il}\{[F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l} y^i\}, \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1},$$

则称函数 $G^i = G^i(x, y)$ 为 $F = F(x, y)$ 的测地系数. 如果 F 的测地系数是直线, 那么 F 就称为局部射影平坦 Finsler 度量, 此时, F 的测地系数满足:

$$G^i = P y^i, \quad P = P(x, y),$$

称为 F 的射影因子, 且其是关于 y 的正定一次齐次函数.

定义 b_{ij} 是 1-形式 β 关于黎曼度量 α 的共变导数, 为了简便, 记

$$r_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji}), \quad s_{ij} = \frac{1}{2}(b_{ij} - b_{ji}),$$

$$s^i_j = a^{ik} s_{kj}, \quad s_j = b_k s^k_j, \quad s_0 = s_j y^j,$$

$$s^i_0 = s^i_j y^j, \quad s^i = a^{ij} s_j, \quad r_i = b^j r_{ji}, \quad r = b^i r_i,$$

$$r^i_j = a^{ik} r_{kj}, \quad r^i = a^{ij} r_j,$$

$$r_{00} = r_{ij} y^i y^j, \quad r_0 = r_i y^i.$$

Yu 等^[5]已经得到广义 (α, β) -度量的测地系数

G^i :

$$\begin{aligned} G^i = & {}^a G^i + \alpha Q s^i_0 + y^i \{ \Theta(-2\alpha Q s_0 + r_{00} + \\ & 2\alpha^2 R r) + \alpha \Omega(r_0 + s_0) \} / \alpha + \\ & \{ \Psi(-2\alpha Q s_0 + r_{00} + 2\alpha^2 R r) + \\ & \alpha \Pi(r_0 + s_0) \} b^i - \alpha^2 R(r^i + s^i), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 ${}^a G^i$ 是 α 的测地系数, 且

$$Q = \frac{\phi_2}{\phi - s\phi_2}, \quad R = \frac{\phi_1}{\phi - s\phi_2},$$

$$\Pi = \frac{(\phi - s\phi_2)\phi_{12} - s\phi_1\phi_{22}}{(\phi - s\phi_2)[\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22}]},$$

$$\Theta = \frac{(\phi - s\phi_2)\phi_2 - s\phi\phi_{22}}{2\phi[(\phi - s\phi_2) + (b^2 - s^2)\phi_{22}]},$$

$$\Omega = \frac{2\phi_1}{\phi} - \frac{s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2}{\phi} \Pi,$$

$$\Psi = \frac{\phi_{22}}{2[\phi - s\phi_2 + (b^2 - s^2)\phi_{22}]}.$$

文献[8,12]在满足条件:

$$b_{ij} = \tilde{c} a_{ij} \quad (2)$$

下已得到研究广义 (α, β) -度量的相关结果. 本文考虑式(2), 且黎曼度量 α 是一个爱因斯坦度量, 即在表达式(2)和式(12)的条件下研究爱因斯坦广义 (α, β) -度量.

为了方便研究, 需要用到以下引理.

引理 1 如果 β 是闭的且关于 α 共形, 即满足式(2), 那么下列式子成立:

$$s_0 = s^i_0 = s^i = 0, \quad r^i = \tilde{c} b^i,$$

$$r_0 = \tilde{c} \alpha s, \quad r_{00} = \tilde{c} \alpha^2, \quad r = \tilde{c} b^2, \quad (3)$$

以上结果可以由式(2)直接得到.

引理 2 设 $F = \alpha\phi(b^2, s)$ 是流形 M 上的广义 (α, β) -度量, $s = \beta / \alpha$, 且 β 满足式(2), 则 F 和黎曼度量 α 的测地系数有如下关系:

$$G^i = {}^a G^i + T^i, \quad (4)$$

其中

$$T^i = \tilde{c} \alpha X y^i + \tilde{c} \alpha^2 E b^i,$$

这里 E 和 X 分别由式(6)和(7)给出.

式(2)是一类特殊情况, 人们在初步探索一些几何量的几何性质时, 通常会先考虑式(2).

证明 由引理 1 可得测地系数 G^i 的表达式为:

$$\begin{aligned} G^i = & {}^a G^i + \alpha \tilde{c} [\Theta(1 + 2b^2 R) + s \Omega] y^i + \\ & \alpha^2 \tilde{c} [\Psi(1 + 2b^2 R) + s \Pi - R] b^i, \end{aligned} \quad (5)$$

把 $R, \Pi, \Theta, \Omega, \Psi$ 代入式(5), 并令

$$E = \frac{2\phi_{12}s - 2\phi_1 + \phi_{22}}{2(b^2 - s^2)\phi_{22} - 2s\phi_2 + 2\phi}, \quad (6)$$

$$X = \frac{\phi_2 + 2s\phi_1}{2\phi} - E \frac{s\phi + (b^2 - s^2)\phi_2}{\phi}, \quad (7)$$

可得式(4).

为了简洁, 作如下约定:

$$X_1 = \frac{\partial X}{\partial b^2}, \quad X_{12} = \frac{\partial^2 X}{\partial b^2 \partial s},$$

$$X_2 = \frac{\partial X}{\partial s}, \quad X_{22} = \frac{\partial^2 X}{\partial s \partial s},$$

表达式 $E_1, E_{12}, E_2, E_{22}, \phi_1, \phi_{12}, \phi_2, \phi_{22}$ 同样定义.

Finsler 几何中 $T_x M$ 上一系列线性变换

$$R_y = R^i_k dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}$$

是黎曼曲率(d 表示外微分符号). 其中

$$\begin{aligned} R^i_k &= 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^m \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^m \partial y^k} + \\ & 2G^m \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^m \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^m} \frac{\partial G^m}{\partial y^k} = \\ & \left\{ \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ks} \Gamma^s_{jl} - \right. \\ & \left. \Gamma^s_{jk} \Gamma^i_{ls} \right\} y^j y^l, \end{aligned}$$

这里 $\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k}$, G^i 是 F 的测地系数.

文献[13]给出了黎曼曲率张量的另外形式:

$$\begin{aligned} R^i_k &= {}^\alpha R^i_k + 2T^i_{|k} - T^i_{|j,k} y^j + \\ & 2T^j T^i_{j,k} - T^i_{j,k} T^j_{j,k}, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 ${}^\alpha R^i_k$ 表示黎曼度量 α 的黎曼曲率; “.” 和 “|” 分别表示关于黎曼度量 α 的垂直共变导数和水平共变导数.

Ricci 曲率是黎曼曲率的迹, 即 Ricci 曲率为:

$$\begin{aligned} Ric &= {}^\alpha Ric + 2T^i_{|i} - T^i_{|j,i} y^j + \\ & 2T^j T^i_{j,i} - T^i_{j,i} T^j_{j,i}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 ${}^\alpha Ric$ 表示黎曼度量 α 的 Ricci 曲率.

定义 3 设 F 是 n 维流形 M 上的 Finsler 度量, 若 F 的 Ricci 曲率满足以下方程:

$$Ric = (n-1) \left(\frac{3\theta}{F} + \sigma \right) F^2, \quad (10)$$

则称 F 为弱爱因斯坦度量, 其中 $\sigma = \sigma(x)$ 是标量函数, $\theta = \theta_i y^i$ 是 1-形式. 若式(10)中 $\theta = 0$, 则 F 称为爱因斯坦度量, 即

$$Ric = (n-1) \sigma F^2, \quad (11)$$

如果式(11)中 σ 是常数, 那么这个常数 σ 称为 F 的 Ricci 常数; 如果式(11)中 $\sigma = 0$, 那么 F 称为 Ricci 平坦度量, 它也是特殊的爱因斯坦度量.

如果存在函数 $\kappa = \kappa(x)$ 使得黎曼度量 α 的 Ricci 曲率满足:

$${}^\alpha Ric = (n-1) \kappa \alpha^2, \quad (12)$$

那么这个黎曼度量是爱因斯坦度量.

2 主要定理及其证明

根据定义知, 弱爱因斯坦度量是一个 Finsler 度量 F 的 Ricci 曲率满足表达式(10)的一类度量. 因此, 命题 1 首先计算出广义 (α, β) -度量的 Ricci

曲率, 基于命题 1 和定理 1 得到: 如果 $\phi(b^2, s)$ 是关于 s 的二次多项式, 且 F 是弱爱因斯坦度量, 那么 F 一定是 Ricci 平坦度量; 定理 2 构造出广义 (α, β) -度量在共形条件下是 Ricci 平坦 Finsler 度量的等价方程.

利用式(9)可直接计算共形条件下广义 (α, β) -度量的 Ricci 曲率.

命题 1 若 $F = \alpha \phi(b^2, s)$ 是 n 维流形 M 上的广义 (α, β) -度量, 且 β 和 α 分别满足式(2)和(12), 则 F 的 Ricci 曲率表达式为:

$$\begin{aligned} Ric &= (n-1) \kappa \alpha^2 + \tilde{c}^2 \{ (b^2 - s^2)^2 (2EE_{22} - E_2^2) + \\ & (b^2 - s^2) [2(n-1)EX_2 + 4E^2 - 2sEE_2 - \\ & 2sE_{12} + 4E_1 - E_{22}] + (n-1) \cdot \\ & [2EXs + 2X^2 - 2sX_1 - X_2 + 2E] \} \alpha^2 + \\ & 2\tilde{c}_1 E \alpha^2 - \tilde{c}_0 [(b^2 - s^2)E_2 + \\ & 2sE + (n-1)X] \alpha, \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\tilde{c}_0 = \tilde{c}_{|i} y^i, \quad \tilde{c}_1 = \tilde{c}_{|i} b^i.$$

证明以上命题需要用到如下等式:

$$\beta_{|k} = r_{0k} + s_{0k}, \quad b^2_{|k} = 2(r_k + s_k), \quad b^i_{|k} = r^i_k + s^i_k,$$

$$(b_i - y_i s / \alpha) \delta^i_j = (b_j - y_j s / \alpha),$$

$$\partial r_j / \partial y^m = \partial r^m_j / \partial y^m = \partial \tilde{c}_j / \partial y^m = 0,$$

$$\delta^i_j \delta^j_i = n, \quad r_{0k} b^k = \tilde{c} \alpha s, \quad r_k b^k = \tilde{c} b^2,$$

$$s_k = (r_{0k} + s_{0k}) / \alpha, \quad \partial y^m / \partial y^m = n,$$

$$\partial y_j / \partial y^i = a_{ji},$$

$$r^k_k = n \tilde{c}, \quad \partial \alpha / \partial y^m = y_m / \alpha,$$

$$\partial r_{j0} / \partial y^m = r_{jm},$$

$$s_k = s_{0k} = s^k_k = 0.$$

命题 1 的证明 运用以上等式直接计算可以得到:

$$T^i_{|i} = \tilde{c}^2 (2b^2 E_1 + nE + sE_2 + 2sX_1 + X_2) \alpha^2 +$$

$$\tilde{c}_1 E \alpha^2 + \tilde{c}_0 X \alpha,$$

$$y^j T^i_{|j,i} = \tilde{c}^2 [(b^2 - s^2)(2sE_{12} + E_{22}) +$$

$$(n+1)(2sX_1 + X_2) + 2(sE_2 + E) + 4E_1 s^2] \alpha^2 +$$

$$\tilde{c}_0 [(b^2 - s^2)E_2 + 2Es + (n+1)X] \alpha,$$

$$T^j T^i_{,ji} = \tilde{c}^2 \{ (b^2 - s^2)^2 EE_{22} + (b^2 - s^2) [sEE_2 +$$

$$(n+1)EX_2 + E_2X] + (n+3)sEX +$$

$$2b^2E^2 + (n+1)X^2\} \alpha^2,$$

$$T^i_{,j} T^j_{,i} = \tilde{c}^2 \{ 4X^2 + 2[(b^2 - s^2)E_2 + 4sE]X +$$

$$4(b^2 - s^2)EX_2 + [(b^2 - s^2)E_2 + 2sE]^2\} \alpha^2,$$

其中 $\tilde{c}_0 = \tilde{c}_i y^i$, $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_i b^i$; E, X 分别在式(6)和(7)中给出.

结合式(9)和(12)可以直接得到 Ricci 曲率的表达式:

$$\mathbf{Ric} = (n-1)\kappa\alpha^2 + \tilde{c}^2 \{ (b^2 - s^2)^2 (2EE_{22} - E_2^2) +$$

$$(b^2 - s^2)[2(n-1)EX_2 + 4E^2 -$$

$$2sEE_2 - 2sE_{12} + 4E_1 - E_{22}] + (n-1) \cdot$$

$$[2EXs + 2X^2 - 2sX_1 - X_2 + 2E]\} \alpha^2 +$$

$$2\tilde{c}_1 E\alpha^2 - \tilde{c}_0[(b^2 - s^2)E_2 +$$

$$2sE + (n-1)X]\alpha.$$

在 $\phi(s)$ 是次数高于 2 的多项式函数的条件下, Cheng 等^[14]证明了 (α, β) -度量 $F = \alpha\phi(s)$ 是爱因斯坦度量的充分必要条件是 F 为 Ricci 平坦度量. 文献[15]中得到多项式类型的广义 (α, β) -度量是射影平坦的等价条件. 受此启发, 假设 $\phi(b^2, s)$ 是关于 s 的二次多项式函数, 利用式(10)和(13)得出广义 (α, β) -度量 F 在式(2)条件下是弱爱因斯坦度量的等价方程, 通过分析此等价方程得到 F 是 Ricci 平坦 Finsler 度量.

定理 1 设 $F = \alpha\phi(b^2, s)$ 是 n 维流形 M 上的广义 (α, β) -度量, β 和 α 分别满足式(2)和(12), 且 $\phi(b^2, s)$ 是关于 s 的二次多项式, 如果 F 是弱爱因斯坦度量, 那么 F 是 Ricci 平坦度量.

定理 1 的证明 若 $F = \alpha\phi(b^2, s)$ 是弱爱因斯坦度量, 即 $\mathbf{Ric} = (n-1)(3\theta/F + \sigma)F^2$.

由式(10)和命题 1 得:

$$(n-1)\kappa\alpha^2 + \tilde{c}^2 \{ (b^2 - s^2)^2 (2EE_{22} - E_2^2) +$$

$$(b^2 - s^2)[2(n-1)EX_2 + 4E^2 -$$

$$2sEE_2 - 2sE_{12} + 4E_1 - E_{22}] + (n-1) \cdot$$

$$[2EXs + 2X^2 - 2sX_1 - X_2 + 2E]\} \alpha^2 +$$

$$2\tilde{c}_1 E\alpha^2 - \tilde{c}_0[(b^2 - s^2)E_2 + 2sE +$$

$$(n-1)X]\alpha = (n-1)(3\theta/F + \sigma)F^2, \quad (14)$$

不妨设此二次多项式为:

$$\phi = a_0 + a_1s + a_2s^2, \quad (15)$$

其中 $a_i = a_i(b^2)$ ($i = 0, 1, 2$) 是标量函数. 将式(15)代入式(14), 并消去分母可得:

$$\bar{P}_{20}\alpha^{20} + \bar{P}_{19}\alpha^{19} + \cdots + \bar{P}_2\alpha^2 +$$

$$[-324(n-1)a_2^9\beta^{18}(4a_1\beta\sigma + 3\theta)]\alpha +$$

$$[-324(n-1)\beta^{20}a_2^{10}\sigma] = 0, \quad (16)$$

其中 $\bar{P}_i$ ($i = 2, 3, 4, \dots, 20$) 是跟 x 有关的函数.

式(16)可等价于以下有理部分和无理部分:

$$\bar{P}_{20}\alpha^{20} + \bar{P}_{18}\alpha^{18} + \cdots + \bar{P}_2\alpha^2 +$$

$$[-324(n-1)\beta^{20}a_2^{10}\sigma] = 0 \quad (17)$$

和

$$\bar{P}_{19}\alpha^{19} + \bar{P}_{17}\alpha^{17} + \cdots + \bar{P}_3\alpha^3 +$$

$$[-324(n-1)a_2^9\beta^{18}(4a_1\beta\sigma + 3\theta)]\alpha = 0, \quad (18)$$

方程(18)两边同时消去非零的 α 得到:

$$\bar{P}_{19}\alpha^{18} + \bar{P}_{17}\alpha^{16} + \cdots + \bar{P}_3\alpha^2 +$$

$$[-324(n-1)a_2^9\beta^{18}(4a_1\beta\sigma + 3\theta)] = 0, \quad (19)$$

由式(17)和(19)得到:

$$\alpha^2 | a_2^{10}\beta^{20}\sigma, \alpha^2 | a_2^9\beta^{18}(4a_1\beta\sigma + 3\theta), \quad (20)$$

因为 α^2 不能整除 β ($\beta \neq 0$), 所以由式(20)可得:

$$a_2^{10}\sigma = 0, a_2^9(4a_1\beta\sigma + 3\theta) = 0. \quad (21)$$

讨论式(21), 当 $a_2 = 0$ 时, F 是 Randers 度量, 文献[16]中给出了此类情况的相关讨论. 当 $a_2 \neq 0$ 时, 从式(21)的第一个式子可得 $\sigma = 0$, 根据式(21)中第二个式子可得 $\theta = 0$. 在这种情况下, F 是 Ricci 平坦 Finsler 度量.

由 Ricci 平坦 Finsler 度量的定义及式(13)可直接给出共形条件下广义 (α, β) -度量 F 是 Ricci 平坦度量的等价方程.

定理 2 若 $F = \alpha\phi(b^2, s)$ 是 n 维流形 M 上的广义 (α, β) -度量, $s = \beta/\alpha$, 且 β, α 分别满足式(2)和(12), 则 F 是 Ricci 平坦 Finsler 度量的等价方程:

$$(n-1)\kappa\alpha^2 + \tilde{c}^2 \{ (b^2 - s^2)^2 (2EE_{22} - E_2^2) +$$

$$(b^2 - s^2)[2(n-1)EX_2 + 4E^2 - 2sEE_2 -$$

$$2sE_{12} + 4E_1 - E_{22}] + (n-1)[2EXs + 2X^2 -$$

$$2sX_1 - X_2 + 2E]\} \alpha^2 + 2\tilde{c}_1 E\alpha^2 -$$

$$\tilde{c}_0[(b^2 - s^2)E_2 + 2sE + (n-1)X]\alpha = 0,$$

其中 $\tilde{c}_0 = \tilde{c}_i y^i$, $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_i b^i$.

参考文献:

- [1] 白正国, 沈一兵, 水乃翔, 等. 黎曼几何初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004:142-144.
- [2] Randers G. On an asymmetric metric in the four-space of general relativity[J]. Physical Review, 1941, 59:195-199.
- [3] Bao D, Robles C. Ricci and flag curvatures in Finsler geometry[C]//Riemann-Finsler Geometry. Cambridge: MSRI Publications, 2004:1-63.
- [4] Robles C. Einstein metrics of Randers type[D]. British Columbia: University of British Columbia, 2003.
- [5] Yu C T, Zhu H M. On a new class of Finsler metrics[J]. Differential Geometry and its Applications, 2011, 29(2): 244-254.
- [6] Sevim E S, Shen Z M, Zhao L L. On a class of Ricci-flat Douglas metrics[EB/OL]. [2018-11-20]. <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0129167X12500462>.
- [7] Sevim E S, Shen Z M, Zhao L L. Some Ricci-flat Finsler metrics[J]. Publications Mathematicae-Debrecen, 2013, 83(4):617-623.
- [8] Shen Z M, Yu C T. On a class of Einstein Finsler metrics[EB/OL]. [2018-11-20]. <https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0129167X1450030X>.
- [9] 田艳芳, 程新跃. 一类具有指数形式的 (α, β) -度量[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2011, 25(4):112-116.
- [10] 陈艺文, 李本伶. 一类射影平坦的 Finsler 度量[J]. 中国科学(数学), 2014, 44(9):969-982.
- [11] Li B L, Shen Z M. On a class of locally projectively flat Finsler metrics[EB/OL]. [2018-11-20]. <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0129167X1650052X>.
- [12] Zhou S S, Li B L. On Landsberg general (α, β) -metrics with a conformal 1-form[J]. Differential Geometry and its Applications, 2018, 59:46-65.
- [13] Chern S S, Shen Z M. Riemann-Finsler Geometry[M]. New York: World Scientific, 2005:66-125.
- [14] Cheng X Y, Shen Z M, Tian Y F. A class of Einstein (α, β) -metrics[J]. Israel Journal of Mathematics, 2012, 192(1):221-249.
- [15] 吴亚东, 李本伶. 一类局部射影平坦的广义度量[J]. 宁波大学学报(理工版), 2017, 30(1):64-67.
- [16] Mo X H, Yu C T. On the Ricci curvature of a Randers metric of isotropic S -curvature[J]. Acta Mathematica Sinica-English Series, 2008, 24(6):911-916.

On some properties of a class of Einstein Finsler metrics

WANG Liping, LI Benling*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Einstein metric is a metric of constant Ricci curvature, and there is a more general one than Einstein metric which is called weakly Einstein metric. They bear important significance in theoretical physics. In this paper, we study a class of Finsler metrics called general (α, β) -metrics. Firstly, we obtain the Ricci curvature of general (α, β) -metric under the condition that β is conformal with respect to α . Secondly, when F is a weakly Einstein metric and $\phi(b^2, s)$ a polynomial function of 2 degree with respect to s , we reach the conclusion that F is a Ricci-flat Finsler metric. Finally, the equivalent equation of the Ricci-flat Finsler metric is constructed based on the definition of the Ricci-flat Finsler metric.

Key words: general (α, β) -metric; Ricci curvature; Einstein metric; weakly Einstein metric; Ricci-flat metric

(责任编辑 史小丽)