

多元 Proschan-Sullo 型指数分布的特征及参数估计

李国安*, 李建峰

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 从参数识别性分析着手, 获得以可识最小值随机变量分布密度函数表示的分布函数表达式, 进而得到多元 Proschan-Sullo 型指数分布的一个特征, 从而获得基于可识最小值随机样本的参数的一致最小方差无偏估计, 最后得到多元 Proschan-Sullo 型指数分布参数的一致最小方差无偏估计。

关键词: 多元 Proschan-Sullo 型指数分布; 特征; 最大似然估计; 一致最小方差无偏估计

中图分类号: O212.4

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2019) 05-0100-04

Proschan 等^[1]提出了一类多元指数分布(多元 Proschan-Sullo 型指数分布), 其二元形式即为二元 Marshall-Olkin^[2]型指数分布, 文中讨论了参数的估计问题. 在二元情形下, Arnold^[3]给出了参数的无偏估计. Bemis 等^[4]给出了参数的矩估计. Bhattacharyya 等^[5]讨论了二元指数分布的独立性检验. 本文作者^[6-7]讨论了多元 Marshall-Olkin 型指数分布的识别性及特征. Lin 等^[8]讨论了二元 Marshall-Olkin 型指数分布的相关结构, 讨论二元 Marshall-Olkin 型生存分布的文献也大量存在.

最近, Pasari 等^[9]报道了用三参数一元指数分布拟合地震灾害发生时间间隔数据, 用以预报一段时间内地震发生的概率. 由于未利用地震级别数据, 此类拟合数据模型能够改进到可以预报级别地震在一段时间内发生的概率, 设 $X_k(k=1, \dots, m)$ 为 k 级地震灾害发生时间间隔长度, $Z=\min(X_1, X_2, \dots, X_m)$, 那么文献^[9]中地震灾害发生时间间隔数据可以看成 $Z=X_k(k=1, \dots, m)$ 及 $Z=X_1=\dots=X_k=\dots=X_m$ 的观察数据, 即 Proschan-Sullo 型的 (Z, I) 的观察数据.

鉴于以下原因: (1)分级地震预报模型恰是多元 Proschan-Sullo 型生存分布模型, 即分级地震预报模型拟合数据是 (Z, I) 的观察数据, 也就是说地震预报模型有改进的余地; (2)至今未有文献报道多元 Proschan-Sullo 型生存分布模型; (3)既然地震预报模型有改进余地, 而内在估计又不基于充分完备统计量, 有必要寻找基于充分完备统计量的

更有效的估计, 为此, 本文讨论多元 Proschan-Sullo 型指数分布的特征及参数估计. 参考文献^[10-14]的有关结果, 从密度分拆角度, 得到了在串联系统下基于 (Z, I) 的样本的多元 Proschan-Sullo 型指数分布参数的一致最小方差无偏估计. 在文末注记中, 通过变量替换, 给出了分级地震预报模型参数的拟合结果, 并由此给出了从现在开始至某一时刻分层级地震灾害发生概率的计算公式.

1 多元 Proschan-Sullo 型指数分布的特征

定义 1 称 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 为服从 $m+1$ 个参数的多元 Proschan-Sullo 型指数分布的随机变量, 指它有如下的尾概率函数:

$$\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \exp\left\{-\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j - \lambda_0 \max(x_1, x_2, \dots, x_m)\right\}, x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_m > 0,$$

记为 $(X_1, X_2, \dots, X_m) \sim \text{PSMVED}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_0)$, 置 $\lambda = \sum_{j=1}^m \lambda_j$, 参见文献^[1].

记 $Z = \min(X_1, X_2, \dots, X_m)$, 定义 $I=i$, 当 $Z=X_i$ 时 ($i=1, \dots, m$), $I=0$, 当 $Z=X_1=X_2=\dots=X_m$ 时, 记 $p_k = P\{I=k\}, (k=0, 1, \dots, m)$, $f_k(\cdot)$ 为给定 $I=k$ 时 Z 的条件密度, 记 $p_k f_k(z), (k=0, 1, \dots, m)$ 表示可识最小值随机变量 (Z, I) 的联合密度, Z 的密度函数和分布函数分别为 $f_Z(\cdot), F_Z(\cdot)$.

定义 2 称 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 为 m 元 Proschan-Sullo 型随机变量, 即联合分布函数 $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 为混合分布当且仅当存在相互独立的连续型随机

变量 $Y_k \sim G_k(\cdot)$, ($k=0,1,\dots,m$), 使得

$$X_1 = \min(Y_1, Y_0), X_2 = \min(Y_2, Y_0), \dots, X_i = \min(Y_i, Y_0), \dots, X_m = \min(Y_m, Y_0), i=1,2,\dots,m.$$

引理 1 若 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 是 m 元 Proschan-Sullo 型随机变量, 有混合分布 $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$, 若给定 (Z, I) 的联合密度 $p_k f_k(z)$, $k=0,1,\dots,m$, 则

$$\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \exp\left\{\sum_{i=1}^m \int_0^{x_i} \frac{p_i f_i(t)}{\sum_{k=0}^m p_k f_k(t)} d\ln \bar{F}_Z(t) + \int_0^{\max\{x_1, \dots, x_m\}} \frac{p_0 f_0(t)}{\sum_{k=0}^m p_k f_k(t)} d\ln \bar{F}_Z(t)\right\}.$$

证明 $P\{Z > t, I = i\} = P\{X_i > t, X_j > X_i, j \neq i, \forall j\} = P\{Y_i > t, Y_i < Y_k, \forall k, k \neq i\} = \int_t^{+\infty} \prod_{k \neq i} \bar{G}_k(s) dG_i(s)$, 所以 $\forall i, i=1, \dots, m$, 有 $g_i(t) \prod_{k \neq i} \bar{G}_k(s) = p_i f_i(t)$, 又因为 $P\{Z > t\} = P\{Y_k > t, k=0,1,\dots,m\}$, 所以有 $\prod_{k=0}^m \bar{G}_k(t) = \bar{F}_Z(t)$, 不难得到

$$\bar{G}_k(t) = \exp\left\{\int_0^t \frac{p_k f_k(s)}{\sum_{k=0}^m p_k f_k(t)} d\ln \bar{F}_Z(s)\right\}, k=0,1,\dots,m,$$

由 $\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_m) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2, \dots, X_m > x_m) = P(Y_1 > x_1, Y_2 > x_2, \dots, Y_m > x_m, Y_0 > \max\{x_1, \dots, x_m\}) = \bar{G}_0(\max\{x_1, \dots, x_m\}) \prod_{i=1}^m \bar{G}_i(x_i)$, 得:

$$\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \exp\left\{\sum_{i=1}^m \int_0^{x_i} \frac{p_i f_i(t)}{\sum_{k=0}^m p_k f_k(t)} d\ln \bar{F}_Z(t) + \int_0^{\max\{x_1, \dots, x_m\}} \frac{p_0 f_0(t)}{\sum_{k=0}^m p_k f_k(t)} d\ln \bar{F}_Z(t)\right\}.$$

引理 2 $(X_1, X_2, \dots, X_m) \sim \text{PSMVED}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_0)$ 当且仅当 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 是 m 元 Proschan-Sullo 型随机变量, (Z, I) 的联合密度为 $p_k f_k(z) = \lambda_k e^{-\lambda_k z}$, $k=0,1,\dots,m, z > 0$.

证明 设 $m=3$, 此时 $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{PSTVED}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_0)$, 则有:

$$p_k f_k(z) = \lambda_k e^{-\lambda_k z}, k=1,2,3,0, z > 0,$$

记 $\lambda = \sum_{k=0}^3 \lambda_k$. 以求 $p_1 f_1(z)$ 为例, 由 $P(I=1, Z > z) = P(X_1 < X_2, X_1 < X_3, X_1 > z) = P(X_1 < X_2, X_2 < X_3, X_1 > z) + P(X_1 < X_3, X_3 < X_2, X_1 > z) + P(X_1 < X_2, X_2 = X_3, X_1 > z)$, 当 $x_1 < x_2 < x_3$ 时, $\bar{F}_{123}(x_1, x_2, x_3) = \exp\{-\sum_{j=1}^3 \lambda_j x_j - \lambda_0 x_3\}$, 对应 $f_{123}(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_3 + \lambda_0) \exp\{-\lambda_0 x_3 - \sum_{j=1}^3 \lambda_j x_j\}$, 当 $x_1 < x_3 < x_2$ 时, $\bar{F}_{132}(x_1, x_2, x_3) = \exp\{-\sum_{j=1}^3 \lambda_j x_j - \lambda_0 x_2\}$, 对应 $f_{132}(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 \lambda_3$.

$(\lambda_2 + \lambda_0) \exp\{-\sum_{j=1}^3 \lambda_j x_j - \lambda_0 x_2\}$, 于是,

$$P(X_1 < X_2, X_2 < X_3, X_1 > z) = \int_z^\infty dx_1 \int_{x_1}^\infty dx_2 \int_{x_2}^\infty f_{123}(x_1, x_2, x_3) dx_3 = \int_z^\infty dx_1 \int_{x_1}^\infty dx_2 \int_{x_2}^\infty \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_3 + \lambda_0) \exp\{-\lambda_0 x_3 - \sum_{j=1}^3 \lambda_j x_j\} dx_3 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda(\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_0)} \exp\{-\lambda z\},$$

$$P(X_1 < X_3, X_3 < X_2, X_1 > z) = \int_z^\infty dx_1 \int_{x_1}^\infty dx_3 \int_{x_3}^\infty f_{132}(x_1, x_2, x_3) dx_2 = \int_z^\infty dx_1 \int_{x_1}^\infty dx_3 \int_{x_3}^\infty \lambda_1 \lambda_3 (\lambda_2 + \lambda_0) \exp\{-\lambda_0 x_2 - \sum_{j=1}^3 \lambda_j x_j\} dx_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda(\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_0)} \exp\{-\lambda z\},$$

$$P(X_1 < X_2, X_2 = X_3, X_1 > z) = P(Y_0 < Y_2, Y_0 < Y_3, Y_0 > Y_1 > z) = \int_z^\infty \lambda_1 \exp\{-\lambda_1 y_1\} dy_1 \int_{y_1}^\infty \lambda_2 \exp\{-\lambda_0 y_0\} dy_0 \int_{y_0}^\infty \lambda_3 \exp\{-\lambda_3 y_3\} dy_3 \int_{y_3}^\infty \lambda_2 \exp\{-\lambda_2 y_2\} dy_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\lambda(\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_0)} \exp\{-\lambda z\},$$

所以, $P(I=1, Z > z) = \lambda_1 \lambda_2 \exp\{-\lambda z\} / (\lambda(\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_0)) + \lambda_1 \lambda_3 \exp\{-\lambda z\} / (\lambda(\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_0)) + \lambda_1 \lambda_0 \exp\{-\lambda z\} / (\lambda(\lambda_3 + \lambda_2 + \lambda_0)) = \lambda_1 \exp\{-\lambda z\} / \lambda$, 由此得 $p_1 f_1(z) = \lambda_1 e^{-\lambda z}, z > 0$, 同理得 $p_2 f_2(z) = \lambda_2 e^{-\lambda z}, z > 0$, $p_3 f_3(z) = \lambda_3 e^{-\lambda z}, z > 0$. 由全概率原理 $P(I=1, Z > z) + P(I=2, Z > z) + P(I=3, Z > z) + P(I=0, Z > z) = P(Z > z)$, 可得到 $P(I=0, Z > z) = \lambda_0 \exp\{-\lambda z\} / \lambda$, $p_0 f_0(z) = \lambda_0 e^{-\lambda z}, z > 0$.

由引理 1 和引理 2 可得多元 Proschan-Sullo 型指数分布的一个特征:

定理 1 $(X_1, X_2, \dots, X_m) \sim \text{PSMVED}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_0)$ 当且仅当 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 是 m 元 Proschan-Sullo 型随机变量, Z, I 是相互独立的随机变量, 且 I 是 $m+1$ 值随机变量, Z 是服从指数分布的随机变量.

证明 由引理 1 和引理 2 直接可得.

2 多元 Proschan-Sullo 型指数分布的参数估计

设 $(X_1, X_2, \dots, X_m) \sim \text{PSMVED}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_0)$, 则 (Z, I) 的联合密度为: $p_k f_k(z) = \lambda_k e^{-\lambda_k z}, k=0, 1, \dots, m, z > 0$, $(Z_j, I_j), j=1, \dots, n$ 为来自于总体 (Z, I) 的容量为 n 的随机样本, 这里, 记

$$Z_j = \min(X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{mj}),$$

$$W_{ij} = \begin{cases} 1, & X_{ij} < X_{kj}, k \neq i, i=1, \dots, m, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$W_{0j} = \begin{cases} 1, & X_{ij} = X_{kj}, k \neq i, \forall k, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$\bar{Z} = \sum_{j=1}^n Z_j / n, \quad \bar{W}_k = \sum_{j=1}^n W_{kj} / n, \quad k=0, \dots, m,$$

其中 $j=1, \dots, n$.

定理 2 设 $(X_1, X_2, \dots, X_m) \sim \text{PSMVED}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_0)$, $(Z_j, I_j), (j=1, \dots, n)$ 是随机样本, 则参数 $\lambda_k, k=0, 1, \dots, m$ 的最大似然估计为:

$$\hat{\lambda}_k = \sum_{j=1}^n W_{kj} / \sum_{j=1}^n Z_j, \quad k=0, 1, \dots, m.$$

$$\text{证明 由 } L = \prod_{j=1}^n \lambda_k^{W_{kj}} e^{-\lambda_k Z_j} = \lambda_k^{\sum_{j=1}^n W_{kj}} e^{-\lambda_k \sum_{j=1}^n Z_j},$$

$$\ln L = \sum_{j=1}^n \lambda_k^{W_{kj}} e^{-\lambda_k Z_j} = (\sum_{j=1}^n W_{kj}) \ln \lambda_k - \lambda_k \sum_{j=1}^n Z_j,$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda_k} = \prod_{j=1}^n \lambda_k^{W_{kj}} e^{-\lambda_k Z_j} = \frac{\sum_{j=1}^n W_{kj}}{\lambda_k} - \sum_{j=1}^n Z_j = 0, \text{ 得}$$

$$\hat{\lambda}_k = \sum_{j=1}^n W_{kj} / \sum_{j=1}^n Z_j, \quad k=0, 1, \dots, m.$$

定理 3 设 $(X_1, X_2, \dots, X_m) \sim \text{PSMVED}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_0)$, $(Z_j, I_j), (j=1, \dots, n)$ 是随机样本, 则参数 $\lambda_k, k=0, 1, \dots, m$ 的一致最小方差无偏估计为 $\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_k(n-1)/n, k=0, 1, \dots, m$.

证明 $L = \prod_{j=1}^n \lambda_k^{W_{kj}} e^{-\lambda_k Z_j}$, 由 $\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_k = 1/\bar{Z}$, 得 $\bar{Z} = 1/\sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_k$, $\bar{W}_k = \hat{\lambda}_k / \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_k$, 代入, 得:

$$L = \prod_{j=1}^n \lambda_k^{n\hat{\lambda}_k / \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_k} e^{-n\hat{\lambda}_k / \sum_{j=1}^n \hat{\lambda}_k},$$

由因子分解定理知: $(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_m, \hat{\lambda}_0)$ 和 $(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_m, \bar{Z})$ 都是联合充分统计量, 又有 $L = \prod_{j=1}^n \lambda_k^{n\hat{\lambda}_k} e^{-n\hat{\lambda}_k} = \lambda_0^n \exp\{\sum_{j=1}^n n\bar{W}_k(\ln \hat{\lambda}_k - \ln \lambda_0) - n\bar{Z}\lambda_k\}$, $(\bar{W}_1, \dots, \bar{W}_m, \bar{Z})$ 是联合充分完备统计量; 由引理 2 及定理 1 知: $\bar{W}_i$ 与 $\bar{Z}$ 相互独立, 由 $W_{ij} \sim B(1, \lambda_i / \lambda)$, 得: $n\bar{W}_i \sim B(n, \lambda_i / \lambda)$, $2n\lambda\bar{Z} \sim \chi^2(2n)$, 得: $E(\sum_{j=1}^n W_{ij}) = n\lambda_i / \lambda$, $E(1/(2n\lambda\bar{Z})) = 1/(2(n-1))$, $E\hat{\lambda}_i = (n-1)/n \cdot E\hat{\lambda}_i = (n-1)/n^2 \cdot E(\sum_{j=1}^n W_{ij})E(\frac{1}{\bar{Z}}) = \frac{n-1}{n^2} \frac{n\lambda_i}{\lambda} \frac{2n\lambda}{2(n-1)} = \lambda_i$.

同理可得其他 $E\hat{\lambda}_k = \lambda_k, k \neq 1$. 即得参数 $\lambda_k, k=0, 1, \dots, m$ 的一致最小方差无偏估计为

$$\hat{\lambda}_k = \hat{\lambda}_k(n-1)/n, \quad k=0, 1, \dots, m.$$

注记 1 记 Z 表示二次相邻地震灾害的时间间隔, 以 a 为单位, 引用文献[9]中的观察数据表 1, 直接可得 Z 的数据表(表 1).

表 1 二次相邻地震灾害发生时间的间隔长度 a

序号	时间	序号	时间	序号	时间	序号	时间
1	21.55	6	6.13	11	0.88	16	15.31
2	16.51	7	5.17	12	3.05	17	12.19
3	12.44	8	7.38	13	1.26	18	2.41
4	11.50	9	12.74	14	2.34	19	4.52
5	3.44	10	2.89	15	6.88		

由三参数一般指数分布拟合上述数据, 迭代结果如下: $\hat{\lambda} = 0.1148$, $\hat{\mu} = 0.88$, $\hat{\alpha} = 0.5722$, 迭代精度为 $\varepsilon = 10^{-6}$.

注记 2 记 $Z = X_1, Z = X_2, Z = X_3, Z = X_1 = X_2 = X_3$ 分别表示第 1 层次级别(7~7.4), 第 2 层次级别(7.5~7.9), 第 3 层次级别(8.0~8.4)及第 4 层次级别(8.5~8.7)地震灾害发生的间隔长度, 引用文献[9]中的观察数据表 1, 直接可得 Z 的数据表(表 2), $I = 0, 1, 2, 3$ 分别对应 $Z = X_1 = X_2 = X_3$, $Z = X_1$, $Z = X_2$, $Z = X_3$ 时, 以 a 为单位.

表 2 (Z, I) 的样本数据表

序 (时间/a, 号 层级)	序 (时间/a, 号 层级)	序 (时间/a, 号 层级)	序 (时间/a, 号 层级)
1 (21.55, 2)	6 (6.13, 2)	11 (0.88, 2)	16 (15.31, 1)
2 (16.51, 1)	7 (5.17, 1)	12 (3.05, 0)	17 (12.19, 1)
3 (12.44, 0)	8 (7.38, 2)	13 (1.26, 3)	18 (2.41, 1)
4 (11.50, 2)	9 (12.74, 1)	14 (2.34, 2)	19 (4.52, 1)
5 (3.44, 2)	10 (2.89, 2)	15 (6.88, 2)	

由定义 2 和引理 1 及文献[9,12-13]可得: 若 $Y_1 \sim F(y_1) = (1 - e^{-\lambda_1(y_1 - \mu)})^\alpha$, $Y_2 \sim F(y_2) = (1 - e^{-\lambda_2(y_2 - \mu)})^\alpha$, $Y_3 \sim F(y_3) = (1 - e^{-\lambda_3(y_3 - \mu)})^\alpha$, $Y_0 \sim F(y_0) = (1 - e^{-\lambda_0(y_0 - \mu)})^\alpha$, 此时记为 $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{PSTGVED}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_0, \mu, \alpha)$, 称为三元 Proschan-Sullo 型一般指数分布, 用此分布拟合上述数据, 可以采用二步估计, 第一步由注记 1 可得 $\hat{\lambda} = 0.1148$, $\hat{\mu} = 0.88$, $\hat{\alpha} = 0.5722$, 迭代精度为 $\varepsilon = 10^{-6}$; 第二步设:

$U_k = -\ln(1 - (1 - e^{-\lambda_k(Y_k - \mu)})^\alpha) / \lambda_k, k=0, 1, 2, 3$, 则 $U_k \sim E(\lambda_k)$, $k=0, 1, 2, 3$, 设 $V_i = \min(U_i, U_0)$, $i=1, 2, 3$, 则 $(V_1, V_2, V_3) \sim \text{PSTVED}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_0)$, 由定理 2 可得 $\hat{\lambda}_1 = \bar{W}_1 \hat{\lambda} = 0.0423$, $\hat{\lambda}_2 = \bar{W}_2 \hat{\lambda} = 0.0544$, $\hat{\lambda}_3 = \bar{W}_3 \hat{\lambda} = 0.0060$, $\hat{\lambda}_0 = \bar{W}_0 \hat{\lambda} = 0.0121$.

注记 3 设第 1 层级(7~7.4), 第 2 层级(7.5~7.9), 第 3 层级(8.0~8.4)及第 4 层级(8.5~8.7)地震发生事件分别记为 $A_k, k=0, 1, 2, 3$, 从现在开始至某一时刻

刻第 k 层级地震灾害发生的概率为: $P(A_k | Z > z_0) = P(Z < z, I = k | Z > z_0), k = 0, 1, 2, 3$.

勘误 本刊文献[15-16]出现 Proschan-Sullo 拼写错误, 现予勘误. 本文第一作者在此表示歉意.

参考文献:

- [1] Proschan F, Sullo P. Estimating the parameters of a multivariate exponential distribution[J]. Journal of the American Statistical Association, 1976, 71:465-472.
- [2] Marshall A W, Olkin I. A multivariate exponential distribution[J]. Journal of the American Statistical Association, 1967, 62(1):30-44.
- [3] Arnold B C. Parameter estimation for a multivariate exponential distribution[J]. Journal of the American Statistical Association, 1968, 63:848-852.
- [4] Bemis B M, Bain L J, Higgins J J. Estimation and hypothesis testing for the parameters of a bivariate exponential distribution[J]. Journal of the American Statistical Association, 1972, 67:927-929.
- [5] Bhattacharyya G K, Johnson R A. On a test of independence in a bivariate exponential distribution[J]. Journal of the American Statistical Association, 1972, 68: 704-706.
- [6] 李国安. 混合分布的识别性及其应用[J]. 宁波大学学报(理工版), 1993, 6(2):28-38.
- [7] 李国安. 多元 Marshall-Olkin 型指数分布的特征及其参数估计[J]. 工程数学学报, 2005, 22(6):1055-1062.
- [8] Lin G D, Lai C D, Govindaraju K. Correlation structure of the Marshall-Olkin bivariate exponential distribution [J]. Statistical Methodology, 2016, 29:1-9.
- [9] Pasari S, Dikshit O. Three-parameter generalized exponential distribution in earthquake recurrence interval estimation[J]. Nat Hazards, 2014, 73:639-656.
- [10] Basu A P, Ghosh J K. Identifiability of the multinormal and other distributions under competing risks model[J]. Journal of Multivariate Analysis, 1978, 8(3):413-429.
- [11] Mukherjea A, Stephens R. Identification of the parameters of a trivariate normal vector by the distribution of the minimum[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 1999, 78(1):23-37.
- [12] Gupta R D, Kundu D. Generalized exponential distributions [J]. Australian and New Zealand Journal of Statistics, 1999, 41:173-188.
- [13] Kundu D, Gupta R D. Bivariate generalized exponential distributions[J]. Journal of Multivariate Analysis, 2009, 100:581-593.
- [14] 李国安. 指数分布抽样基本定理及在四参数二元 Marshall-Olkin 型指数分布参数估计中的应用[J]. 统计研究, 2016, 33(7):98-102.
- [15] 李国安, 王立洪. 二元 Proshan-Sullo 型指数分布的特征及其应用[J]. 宁波大学学报(理工版), 2007, 20(4): 468-472.
- [16] 王立洪, 李国安. 多元 Proshan-Sullo 型指数分布的特征[J]. 宁波大学学报(理工版), 2006, 19(3): 360-362.

A characterization and parameter estimation of the multivariate exponential distribution of Proschan-Sullo

LI Guoan^{*}, LI Jianfeng

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Through the analysis of parameter identification, we obtain an expression, in which, the distribution function is denoted by the identifiable minimum formula, hence, the characterization of the multivariate exponential distribution of Proschan-Sullo is derived. Thus, we get the maximum likelihood estimator of the parameter, which is based on the random sampling of multivariate identifiable minimum value. Finally, the uniformly minimum variance unbiased estimator of the parameters of the multivariate exponential distribution Proschan-Sullo is obtained.

Key words: multivariate exponential distribution of Proschan-Sullo; characterization; maximum likelihood estimator; uniformly minimum variance unbiased estimator

(责任编辑 韩 超)