

混合指数跳扩散模型下远期生效期权的定价

林涵彬¹, 苏小因^{2,3}, 王伟^{1*}

(1. 宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211; 2. 南京审计大学 统计与数学学院, 江苏 南京 211815;

3. 江苏省金融工程重点实验室, 江苏 南京 211815)

摘要: 分别研究了市场利率为常数和随机利率时混合指数跳扩散模型下远期生效期权的定价问题. 假定风险资产价格满足混合指数跳扩散过程, 通过测度变换, 逆拉普拉斯变换和无套利定价原理得到了该模型下远期生效看涨期权的定价公式. 此外, 利用看涨-看跌期权的平价关系得到了远期生效看跌期权的价格.

关键词: 跳扩散模型; 拉普拉斯变换; 平价关系

中图分类号: O211.9

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2019) 05-0104-06

远期生效期权是一种奇异期权, 其敲定价格不是常数, 而是与标的资产价格有关. Rubinstein^[1]在股票价格满足几何布朗运动的假设下, 首先研究了远期生效期权的定价问题. 然而, 大量的实证研究证明假定股票价格满足几何布朗运动与实际不相符合, 股票价格的波动率并不是一个常数. 因此, Kruse 等^[2]考虑了当标的资产价格满足 Heston 形式^[3]的随机波动率模型下的远期生效期权的定价问题. 在金融市场中, 一些罕见的事件(重大政治变化或者大的自然灾害)会导致风险资产突然发生大幅度价格变化, 这可以被描述为一个跳跃过程. 自 Kou^[4]提出双指数跳扩散模型来刻画风险资产价格后, 双指数跳扩散模型在金融中受到越来越多学者的重视. Wang 等^[5]研究了双指数跳扩散模型下的远期生效期权定价问题. 由于很多衍生品合约是长期的, 因此假定利率是常数并不合理. 于是, Ahlip 等^[6]以及 Haastrecht 等^[7]考虑了随机波动率和随机利率模型下远期生效期权的定价问题. 由于市场经济周期的原因, 在不同的经济周期, 市场股票价格参数是不一样的, Ramponi^[8]考虑了体制转换模型下远期生效期权的定价问题. 王伟等^[9]结合体制转换模型和跳扩散过程来刻画金融市场

中风险资产的价格动态, 并给出了该模型下远期生效期权的定价公式. 众所周知, 风险资产收益率分布具有尖峰厚尾特征, Cai 等^[10]指出超指数分布是有限数量指数分布的混合, 且可以利用混合指数分布对许多重尾分布进行近似, 混合指数分布刻画风险资产价格相比其他模型更加合适, 因此他们考虑了混合指数分布下的欧式期权定价问题. 本文考虑混合指数跳扩散模型下远期生效期权的定价问题, 分别考虑了常利率和随机利率 2 种情况, 利用拉普拉斯变换得到了远期生效看涨期权定价公式的显式解. 此外, 利用看涨-看跌的平价关系得到了远期生效看跌期权的定价公式.

1 金融市场模型和等价鞅测度

假定金融市场是无套利和无摩擦的, 且投资交易人员在 $[0, T]$ 内可连续交易, 其中 T 是常值. 此外, 利用带滤流的完备概率空间, 即 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (F_t)_{0 \leq t \leq T})$, 来描述市场中的所有不确定性, 其中 P 是原始测度.

假定金融市场仅仅包含 2 种资产, 一种是无风险债券 B , 另一种是股票 S , 它们的价格动态分别满足如下方程:

收稿日期: 2018-05-23.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 浙江省自然科学基金(LY17G010003); 江苏省高校自然科学基金(14KJB110014); 江苏省金融工程重点实验室开放基金(NSK2015-12).

第一作者: 林涵彬(1993-), 男, 浙江宁波人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: 2901445710@qq.com

*通信作者: 王伟(1982-), 男, 安徽安庆人, 博士/副教授, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: wangwei2@nbu.edu.cn

$$dB_t = rB_t dt, B_0 = 1, \quad (1)$$

$$dS_t = S_{t-}(\mu dt + \sigma d\tilde{W}_t) + S_{t-}d\left(\sum_{j=1}^{N_t}(V_j - 1)\right), \quad (2)$$

式中: r 为无风险利率; μ, σ 分别为股票 S 的预期回报率和波动率; $\tilde{W}$ 为标准的 P 布朗运动; N 为泊松过程, 其强度为 $\tilde{\lambda}$; $\{Y_i := \log V_i, i = 1, 2, \dots\}$ 为一列独立同分布的随机变量序列, 其密度函数 $\tilde{f}_Y(y)$ 满足如下:

$$\tilde{f}_Y(y) = p_u \sum_{i=1}^{m_1} p_i \eta_i e^{-\eta_i y} I(y \geq 0) + q_d \sum_{j=1}^{m_2} q_j \theta_j e^{\theta_j y} I(y < 0), \quad (3)$$

其中 $0 < p_u < 1, 0 < q_d < 1$ 且 $p_u + q_d = 1$. 对所有的 $i = 1, \dots, m_1, 0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^{m_1} p_i = 1, \eta_i > 1$, 和 $j = 1, \dots, m_2, 0 \leq q_j \leq 1, \sum_{j=1}^{m_2} q_j = 1, \theta_j > 0$. 此外, 假定 $N, \tilde{W}$ 和 Y_i 是相互独立的.

根据风险中性定价原理可知, 远期生效期权价值等于合约到期时未定收益的贴现在等价鞅测度 Q 下的期望值. 由于金融市场中股票的价格动态含有跳的部分, 而可交易的风险资产只有一个, 所以我们考虑的金融市场是不完备的, 故等价鞅测度并不唯一. 因此, 这里首先考虑等价鞅测度的选取问题. 为了表述方便, 将方程(2)写成如下

$$S_t = S_0 \exp\left\{\mu t + \sigma \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} y J(dy, du) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - 1) \nu(dy) du\right\}, \quad (4)$$

其中 $J(dy, du)$ 是泊松随机跳测度, $\nu(dy)$ 是其 Levy 测度, $\nu(dy) = \tilde{\lambda} \tilde{f}_Y(y) dy$.

令 $X_t = \log(S_t / S_0)$, 则

$$X_t = \mu t + \sigma \tilde{W}_t - \sigma^2 t / 2 + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} y J(dy, du) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - 1) \nu(dy) du. \quad (5)$$

记

$$X_t^c = \mu t + \sigma \tilde{W}_t - \sigma^2 t / 2,$$

$$X_t^J = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} y J(dy, du) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - 1) \nu(dy) du.$$

下面定义一个新的概率测度 Q , 其 Radon-Nikodym 导数满足

$$\xi_t = \frac{dQ}{dP} \Big|_{F_t} = \frac{e^{\delta X_t^c + \beta X_t^J}}{E_P[e^{\delta X_t^c + \beta X_t^J}]} = \exp\left\{\sigma \delta \tilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \delta^2 t + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \beta y J(dy, du) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\beta y} - 1) \nu(dy) du\right\},$$

其中 δ, β 为常数.

命题 1 在概率测度 Q 下 $W_t = \tilde{W}_t - \sigma \delta t$ 是一个标准的布朗运动, 泊松过程 N 的强度 $\lambda = \tilde{\lambda}$.

$E_P[e^{\beta Y_i}]$, Y_i 的密度函数为 $f_Y(y) = \frac{e^{\beta y}}{E_P[e^{\beta Y_i}]} \tilde{f}_Y(y)$.

证明 由 Girsanov 定理可知 $W_t = \tilde{W}_t - \sigma \delta t$ 是一个标准的 Q 布朗运动, 且在新的概率测度 Q 下, 泊松随机跳测度 $J(dy, du)$ 的 Levy 测度为 $e^{\beta y} \nu(dy) = \tilde{\lambda} e^{\beta y} \tilde{f}_Y(y)$. 又由于在新的概率测度 Q 下, $\sum_{j=1}^{N_t} Y_i$ 仍然是一个复合泊松过程, 故泊松过程 N 的强度 $\lambda = \tilde{\lambda} E_P[e^{\beta Y_i}]$, Y_i 的密度函数为 $f_Y(y) = e^{\beta y} \tilde{f}_Y(y) / E_P[e^{\beta Y_i}]$.

结合命题 1 和(4)式可知, S_t 可以写成如下:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\mu t + \sigma W_t + \delta \sigma^2 t - \sigma^2 t / 2 + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} y J(dy, du) - \tilde{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - 1) \tilde{f}_Y(y) dy\right\}. \quad (6)$$

命题 2 鞅条件被满足当且仅当 Esscher 参数 δ, β 满足方程

$$\mu - r + \delta \sigma^2 + \tilde{\lambda} \left\{ p_u \sum_{i=1}^{m_1} \frac{p_i \eta_i (\beta - (\eta_i - \beta - 1)^2)}{(\eta_i - \beta)(\eta_i - \beta - 1)(\eta_i - 1)} + q_d \sum_{j=1}^{m_2} \frac{q_j \theta_j (\beta - (\beta + \theta_j + 1)^2)}{(1 + \beta + \theta_j)(\beta + \theta_j)(1 + \theta_j)} + 1 \right\} = 0, \quad (7)$$

和 $\min\{\eta_1, \dots, \eta_{m_1}\} > \beta + 1, \min\{\theta_1, \dots, \theta_{m_2}\} > -\beta$.

证明 令 $\tilde{S}_t = \exp\{-\int_0^t r du\} S_t$ 表示风险资产 S 在 t 时刻的贴现价格, 根据(6)式可得

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left\{(\mu - r)t + \sigma W_t + \delta \sigma^2 t - \sigma^2 t / 2 + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} y J(dy, du) - \tilde{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - 1) \tilde{f}_Y(y) dy\right\},$$

通过 Bayes 法则有

$$E_Q[\tilde{S}_t | F_u] = \tilde{S}_u \exp\left\{(\mu - r + \delta \sigma^2)(t - u) + (t - u) \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - 1)(\lambda f(y) - \tilde{\lambda} \tilde{f}_Y(y)) dy\right\},$$

再利用命题 1, 直接计算得到

$$E_Q[\tilde{S}_t | F_u] = \tilde{S}_u \exp\left\{(t - u)(\mu - r + \delta \sigma^2 + \tilde{\lambda} \{1 + p_u \sum_{i=1}^{m_1} \frac{p_i \eta_i (\beta - (\eta_i - \beta - 1)^2)}{(\eta_i - \beta)(\eta_i - \beta - 1)(\eta_i - 1)} + q_d \sum_{j=1}^{m_2} \frac{q_j \theta_j (\beta - (\beta + \theta_j + 1)^2)}{(1 + \beta + \theta_j)(\beta + \theta_j)(1 + \theta_j)}\})\right\}.$$

要使得 $\tilde{S}_t$ 是一个 Q 鞅, 则必须对任意的 $0 \leq t \leq T$ 有 $E_Q[\tilde{S}_t | F_u] = \tilde{S}_u$, 因此参数 δ, β 必须满足如下方程:

$$\mu - r + \delta \sigma^2 + \tilde{\lambda} \left\{ p_u \sum_{i=1}^{m_1} \frac{p_i \eta_i (\beta - (\eta_i - \beta - 1)^2)}{(\eta_i - \beta)(\eta_i - \beta - 1)(\eta_i - 1)} + \right.$$

$$q_d \sum_{j=1}^{m_2} \frac{q_j \theta_j (\beta - (\beta + \theta_j + 1)^2)}{(1 + \beta + \theta_j)(\beta + \theta_j)(1 + \theta_j)} + 1\} = 0.$$

至此, 命题 2 的证明完成.

由命题 2 和(6)式可得风险资产 S 在风险中性测度 Q 下的价格动态方程为

$$S_t = S_0 \exp \left\{ rt + \sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} y J(dy, du) - \lambda t \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - 1) f_Y(y) dy \right\}. \quad (8)$$

在命题 2 中, 我们知道 Esscher 参数 δ, β 满足方程(7), 然而从方程(7)也可以看出, 该方程的解不是唯一的, 因此下面考虑给出一个特例.

注 1 当 $\beta=0$ 给定时, $\delta = -(\mu - r) / \sigma^2$ 是方程(7)的解. $\beta=0$ 意味着市场中跳风险的价格为 0, 也就是假定市场中风险资产价格中的跳风险为系统性风险而不是非系统性风险.

2 常利率下远期生效期权的定价

远期生效期权与标准的欧式期权不同, 执行价格不是一个常数, 而是与未来某个时刻标的资产有关. 本文考虑远期生效期权在 t 时刻的价值, 其中 $t \in [0, T]$. 对于远期生效期权的买方来说, 在将来确定的时间 t^* 可以选择用 t^* 时刻 K 倍股票价格去执行期权, 这里 $t < t^* < T$. 远期生效看涨期权在合约到期日 T 的收益满足如下:

$$\Psi(S_T)^c = (S_T - KS_{t^*})^+. \quad (9)$$

此外, 远期生效看跌期权在合约到期日 T 的收益满足如下:

$$\Psi(S_T)^p = (KS_{t^*} - S_T)^+. \quad (10)$$

令 $K = e^k$ 和 $C(t, T, k)$ 表示 t 时刻远期生效看涨期权的价值, 则由风险中性定价可知

$$C(t, T, k) = E_Q[e^{-r(T-t)}(S_T - e^k S_{t^*})^+ | F_t] =$$

$$E_Q[e^{-r(T-t)} S_{t^*} (S_T / S_{t^*} - e^k)^+ | F_t],$$

又因为 S_{t^*} 与 S_T / S_{t^*} 是相互独立的, 则

$$\begin{aligned} C(t, T, k) &= E_Q[e^{-r(T-t)} S_{t^*} | F_t] \cdot \\ &E_Q[e^{-r(T-t^*)} (S_T / S_{t^*} - e^k)^+ | F_t] = \\ &S_{t^*} E_Q[e^{-r(T-t^*)} (S_T / S_{t^*} - e^k)^+ | F_t] = \\ &S_{t^*} E_Q[e^{-r(T-t^*)} (S_T / S_{t^*} - e^k)^+]. \end{aligned} \quad (11)$$

上式中的最后一个等式成立是因为 S_T / S_{t^*} 与 F_t 是相互独立的. 采用 Carr 等^[11]的方法, 校正后

的远期生效期权的价值为

$$c(t, T, k) := e^{\alpha k} C(t, T, k), \quad (12)$$

这里 α 是一个给定的常数, 使得 $c(t, T, k)$ 是平方可积的. 因此, $c(t, T, k)$ 的拉普拉斯变换满足如下:

$$\psi(t, T, u) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} c(t, T, k) dk. \quad (13)$$

令 $X_{t^*, T} := \ln(S_T / S_{t^*})$ 和 $g(x)$ 表示 $X_{t^*, T}$ 的密度函数. 再结合(11)~(13)式, 直接计算可得

$$\begin{aligned} \psi(t, T, u) &= S_{t^*} e^{-r(T-t^*)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(iu+\alpha)k} E_Q[(\frac{S_T}{S_{t^*}} - e^k)^+] dk = \\ &S_{t^*} e^{-r(T-t^*)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_k^{\infty} e^{(iu+\alpha)k} (e^x - e^k) g(x) dx dk = \\ &S_{t^*} e^{-r(T-t^*)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x e^{(iu+\alpha)k} (e^x - e^k) dk g(x) dx = \\ &\frac{S_{t^*} e^{-r(T-t^*)}}{(iu+\alpha)(1+iu+\alpha)} E_Q[e^{(1+iu+\alpha)X_{t^*, T}}]. \end{aligned} \quad (14)$$

对给定的常数 m , 由(8)式很容易得到

$$\begin{aligned} E_Q[e^{X_{t^*, T}^m}] &= \exp\{(mr + \sigma^2(m^2 - m)/2 + \\ &\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (e^{my} - 1 - me^y + m) f_Y(y) dy)(T - t^*)\}, \end{aligned}$$

再结合上式和(14)式可得

$$\begin{aligned} \psi(t, T, u) &= \frac{S_{t^*} e^{-r(T-t^*)}}{(iu+\alpha)(1+iu+\alpha)} \cdot \\ &\exp\{(mr + \sigma^2(m^2 - m)/2 + \\ &\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (e^{my} - 1 - me^y + m) f_Y(y) dy)(T - t^*)\}, \end{aligned}$$

这里 $m = 1 + iu + \alpha$.

定理 1 常利率和混合指数跳扩散过程下远期生效看涨期权的定价公式为:

$$C(t, T, k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \psi(t, T, u) du, \quad (15)$$

这里

$$\begin{aligned} \psi(t, T, u) &= \frac{S_{t^*} e^{-r(T-t^*)}}{(iu+\alpha)(1+iu+\alpha)} \cdot \\ &\exp\{(T-t^*)(mr + \sigma^2(m^2 - m)/2 + \\ &\lambda \int_{-\infty}^{\infty} (e^{my} - 1 - me^y + m) f_Y(y) dy)\}, \end{aligned} \quad (16)$$

$k = \ln K$ 和 $m = 1 + iu + \alpha$.

证明 利用(12), (13)式和逆傅里叶变换可得

$$\begin{aligned} C(t, T, k) &= e^{-\alpha k} c(t, T, k) = \\ &e^{-\alpha k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \psi(t, T, u) du = \\ &e^{-\alpha k} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-iuk} \psi(t, T, u) du. \end{aligned}$$

因此, 定理 1 的证明完成.

令 $P(t, T, k)$ 表示常利率模型下远期生效看跌期权的价值. 接下来, 利用看涨-看跌平价关系得到远期生效看跌期权的价值.

命题 3 常利率和混合指数跳扩散过程下远期生效看跌期权的定价公式为:

$$P(t, T, k) = C(t, T, k) - S_t(1 - e^{-r(T-t^*)} e^k), \quad (17)$$

其中 $k = \ln K$.

证明 由(9)和(10)式可得

$$\begin{aligned} \Psi(S_T)^c - \Psi(S_T)^p &= (S_T - KS_T^*)^+ - \\ (KS_T^* - S_T)^+ &= S_T - KS_T^*. \end{aligned} \quad (18)$$

因为 $K = e^k$, 则由风险中性定价原理可得

$$\begin{aligned} C(t, T, k) - P(t, T, k) &= E_Q[e^{-r(T-t)} (\Psi(S_T)^c - \\ \Psi(S_T)^p) | F_t] &= E_Q[e^{-r(T-t)} (S_T - e^k S_t^*) | F_t]. \end{aligned} \quad (19)$$

又由于 Q 是风险中性测度, 则

$$E_Q[e^{-r(T-t)} S_T | F_t] = S_t, \quad (20)$$

$$E_Q[e^{-r(t^*-t)} S_t^* | F_t] = S_t, \quad (21)$$

结合(19)~(21)式, 可以得到如下结果:

$$C(t, T, k) - P(t, T, k) = S_t(1 - e^{-r(T-t^*)} e^k). \quad (22)$$

3 随机利率下远期生效期权的定价

假定市场利率满足 Vasicek 模型, 在风险中性测度 Q 下, 市场利率 r_t 和风险资产 S_t 满足如下随机微分方程

$$dS_t = S_{t-}(r_t dt + \sigma dW_{1t}) + S_{t-} d(\sum_{j=1}^{N_t} (V_j - 1)), \quad (23)$$

$$dr_t = b(\gamma - r_t)dt + \delta dW_{2t}, \quad (24)$$

式中: $\{Y_i := \log V_i, i = 1, 2, \dots\}$ 为一列独立同分布的随机变量序列, 其密度函数是 $f_Y(y)$; N 为泊松过程, 其强度为 λ ; W_{1t}, W_{2t} 为 2 个标准的 Q 布朗运动, 且相关系数为 ρ ; $b > 0, \gamma > 0, \delta > 0$ 为常数. 令 $P(t, T)$ 表示成熟期为 T 的零息债券在 t 时刻的价值, 则由 Jaimungal 等^[12]可知, 当利率满足 Vasicek 模型时零息债券 $P(t, T)$ 有如下仿射结构

$$P(t, T) = \exp\{A(t, T) - B(t, T)r_t\}, \quad (25)$$

这里

$$\begin{aligned} A(t, T) &= (\gamma - \frac{\delta^2}{2\kappa^2})(B(t, T) - T + t) - \frac{\delta^2}{4\kappa} B^2(t, T), \\ B(t, T) &= (1 - e^{-\kappa(T-t)}) / \kappa. \end{aligned}$$

首先定义一个与风险中性测度 Q 等价的远期测度 Q^F , 其 Radon-Nikodym 导数为

$$\begin{aligned} \Pi_t &= \frac{dQ^F}{dQ} \Big|_{F_t} = \frac{P(t, T)}{B_t P(0, T)} = \\ \exp\{-\int_0^t \delta B(u, T) dW_{2u} - \frac{1}{2} \delta^2 B^2(u, T) du\}, \end{aligned} \quad (26)$$

则由 Girsanov 定理可知在测度 Q^F 下

$$W_{2t}^F = W_{2t} + \int_0^t \delta B(u, T) du, \quad (27)$$

$$W_{1t}^F = W_{1t} + \rho \int_0^t \delta B(u, T) du, \quad (28)$$

是 2 个标准的 Q 布朗运动, 且相关系数为 ρ . 由于布朗运动与复合泊松过程 $\sum_{j=1}^{N_t} V_j$ 被假定是相互独立的, 因此测度变换不会改变 N_t 的强度和 V_i 的分布. 在测度 Q^F 下, 风险资产 S 的价格动态满足:

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t-}(r_t dt - \rho \sigma \delta B(t, T) dt + \sigma dW_{1t}^F) + \\ S_{t-} d\left(\sum_{j=1}^{N_t} (V_j - 1)\right). \end{aligned} \quad (29)$$

为了方便, 对任意的 $0 \leq t \leq u \leq T$, 上式写为

$$\begin{aligned} S_t &= S_u \exp\{\int_u^t r_s ds + \sigma \int_u^t dW_{1s}^F - \sigma^2(t-u)/2 - \\ \rho \sigma \delta \int_u^t B(s, T) ds + \int_u^t \int_{-\infty}^{\infty} y J(dy, ds) - \\ \lambda(t-u) \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - 1) f(y) dy\}. \end{aligned} \quad (30)$$

由风险中性定价原理可知, 随机利率环境下远期生效看涨期权的价值为

$$\bar{C}(t, T, k) = E_Q[e^{-\int_t^T r_u du} (S_T - e^k S_t^*)^+ | F_t].$$

利用远期测度和贝叶斯公式及(26)式可得

$$\bar{C}(t, T, k) = P(t, T) E_{Q^F}[S_T^* (S_T / S_t^* - e^k)^+ | F_t],$$

又因为 S_t^* 和 S_T / S_t^* 在测度 Q^F 是相互独立的, 故

$$\begin{aligned} \bar{C}(t, T, k) &= P(t, T) E_{Q^F}[S_T^* | F_t] \cdot \\ E_{Q^F}[(S_T / S_t^* - e^k)^+ | F_t]. \end{aligned} \quad (31)$$

由(24)式可得, 对任意的 $0 \leq t \leq u \leq T$,

$$r_u = r_t e^{b(t-u)} + \gamma(1 - e^{b(t-u)}) + \int_t^u \delta e^{b(s-u)} dW_{2s},$$

对上式两边求积分有

$$\begin{aligned} \int_t^T r_u du &= \frac{r_t}{b}(1 - e^{-b(t^*-t)}) + \int_t^T \gamma(1 - e^{b(t-u)}) du + \\ \frac{\delta}{b} \int_t^T (1 - e^{-b(t^*-u)}) dW_{2u} &= \frac{r_t}{b}(1 - e^{-b(t^*-t)}) + \end{aligned}$$

$$\int_t^t \gamma(1 - e^{b(t-u)})du + \frac{\delta}{b} \int_t^t (1 - e^{-b(t^*-u)})dW_{2u}^F - \frac{\delta^2}{b} \int_t^t (1 - e^{-b(t^*-u)})B(u, T)du. \quad (32)$$

故结合(30)和(32)式, 可以得到

$$E_{Q^F}[S_{t^*} | F_t] = S_t M(t, t^*, T), \quad (33)$$

其中

$$M(t, t^*, T) = \exp\left\{\frac{r_t}{b}(1 - e^{-b(t^*-t)}) + \int_t^t \gamma(1 - e^{b(t-u)})du + \frac{\rho\sigma\delta}{b} \int_t^t (1 - e^{-b(t^*-u)})du + \frac{\delta^2}{2b^2} \int_t^t (1 - e^{-b(t^*-u)})^2 du - \rho\sigma\delta \int_t^t B(u, T)du - \frac{\delta^2}{b} \int_t^t (1 - e^{-b(t^*-u)})B(u, T)du\right\}. \quad (34)$$

因为 S_T / S_{t^*} 与 F_t 是相互独立的, 再利用(31)和(33)式, 有

$$\bar{C}(t, T, k) = S_t M(t, t^*, T) P(t, T) E_{Q^F}[(\frac{S_T}{S_{t^*}} - e^k)^+]. \quad (35)$$

采用上一节的方法, 校正后的远期生效期权

$$\bar{c}(t, T, k) := e^{\alpha k} \bar{C}(t, T, k), \quad (36)$$

因此, $\bar{c}(t, T, k)$ 的拉普拉斯变换满足如下:

$$\bar{\psi}(t, T, u) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuk} \bar{c}(t, T, k) dk. \quad (37)$$

由(35)~(37)式可得

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(t, T, u) &= S_t M(t, t^*, T) P(t, T) \cdot \\ &\int_{-\infty}^{\infty} e^{(iu+\alpha)k} E_{Q^F}[(\frac{S_T}{S_{t^*}} - e^k)^+] dk = S_t M(t, t^*, T) \cdot \\ &P(t, T) \int_{-\infty}^{\infty} \int_k^{\infty} e^{(iu+\alpha)k} (e^x - e^k) g(x) dx dk = \\ &\frac{S_t M(t, t^*, T) P(t, T)}{(iu + \alpha)(1 + iu + \alpha)} E_{Q^F}[e^{(1+iu+\alpha)X_{t^*, T}^*}]. \end{aligned} \quad (38)$$

通过(30)式可知, $X_{t^*, T}$ 满足如下

$$\begin{aligned} X_{t^*, T} &= \int_{t^*}^T r_s ds + \sigma \int_{t^*}^T dW_{1s}^F - \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t^*) - \\ &\rho\sigma\delta \int_{t^*}^T B(s, T) ds + \int_{t^*}^T \int_{-\infty}^{\infty} \gamma J(dy, ds) - \\ &\lambda(T - t^*) \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - 1) f(y) dy. \end{aligned} \quad (39)$$

对给定的常数 m , 由(32)和(39)式可以推导出

$$E_{Q^F}[e^{X_{t^*, T}^m}] = e^{N(t^*, T, m)}, \quad (40)$$

其中 $N(t^*, T, m)$ 满足如下

$$\begin{aligned} N(t^*, T, m) &= m r_{t^*} (1 - e^{-b(T-t^*)}) / b + \int_{t^*}^T m \gamma (1 - \\ &e^{b(t^*-u)}) du + \frac{\delta^2 m^2}{2b^2} \int_{t^*}^T (1 - e^{-b(T-u)})^2 du - \\ &\frac{m\delta^2}{b} \int_{t^*}^T (1 - e^{-b(T-u)}) B(u, T) du + \frac{\rho\sigma\delta m^2}{b} \cdot \\ &\int_{t^*}^T (1 - e^{-b(T-u)}) du - m\rho\sigma\delta \int_{t^*}^T B(u, T) du + \\ &(m^2 - m)\sigma^2 (T - t^*) / 2 + \\ &\lambda(T - t^*) \int_{-\infty}^{\infty} (e^{my} - 1 - me^y + m) f(y) dy. \end{aligned} \quad (41)$$

接下来利用拉普拉斯变换的方法求解出远期生效看涨期权

的价值. **定理 2** 随机利率和混合指数跳扩散过程下远期生效看涨期权的定价公式为:

$$\bar{C}(t, T, k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-iuk} \bar{\psi}(t, T, u) du, \quad (42)$$

这里

$$\bar{\psi}(t, T, u) = \frac{S_t M(t, t^*, T) P(t, T) e^{N(t^*, T, m)}}{(iu + \alpha)(1 + iu + \alpha)},$$

$N(t^*, T, m)$ 由(41)式定义, 且 $m = 1 + iu + \alpha$.

证明 利用和定理 1 一样的证明方法, 再结合(38), (40)和(41)式, 即可完成定理 2 的证明.

令 $\bar{P}(t, T, k)$ 表示随机利率模型下远期生效看跌期权的价值, 其价值公式由下面命题给出.

命题 4 随机利率和混合指数跳扩散过程下远期生效看跌期权的定价公式为:

$$\bar{P}(t, T, k) = \bar{C}(t, T, k) - S_t (1 - e^k P(t, T) M(t, t^*, T)), \quad (43)$$

其中 $k = \ln K$.

证明 由风险中性定价原理和远期生效看涨和看跌期权的支付函数(9)和(10)可得

$$\begin{aligned} \bar{C}(t, T, k) - \bar{P}(t, T, k) &= E_Q[e^{-\int_t^T r_u du} (\Psi(S_T)^c - \\ &\Psi(S_T)^p | F_t)] = E_Q[e^{-\int_t^T r_u du} (S_T - e^k S_{t^*} | F_t)] = \\ &S_t - e^k E_Q[e^{-\int_t^T r_u du} S_{t^*} | F_t]. \end{aligned}$$

利用远期测度 Q^F 和 Bayes 法则有

$$\bar{C}(t, T, k) - \bar{P}(t, T, k) = S_t - e^k P(t, T) E_{Q^F}[S_{t^*} | F_t], \quad (44)$$

再由(33)式可知

$$\bar{C}(t, T, k) - \bar{P}(t, T, k) = S_t [1 - e^k P(t, T) M(t, t^*, T)]. \quad (45)$$

4 结论

利用混合指数跳扩散模型描述金融市场中股票的价格动态, 该模型假设股票的价格动态中跳的大小服从混合指数分布. 本文在该金融模型下研究远期生效期权的定价问题. 由于跳的存在, 市场不完备, 通过 Esscher 变换选取了一个等价鞅测度. 利用傅里叶变换和特征函数分别得到了在市场利率为常数和随机利率时, 远期生效看涨期权的价格. 文中, 假定波动率是常数, 然而大量的实证表明, 波动率是常数不是一个合理的假设, 因此今后我们将继续考虑随机波动率和混合指数跳扩散模型下的远期生效期权的定价问题.

参考文献:

- [1] Rubinstein M. Pay now, choose later[J]. Risk, 1991, 4(13): 44-47.
- [2] Kruse S, Nogel U. On the pricing of forward starting options in Heston's model on stochastic volatility[J]. Finance and Stochastics, 2005, 9(2):233-250.
- [3] Heston S L. A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. Review of Financial Studies, 1993, 6(2):327-343.
- [4] Kou S G. A jump-diffusion model for option pricing[J]. Management Science, 2002, 48(8):1086-1101.
- [5] Wang W, Wang W S, Wang S. Pricing forward starting call option in a jump diffusion model[J]. Journal of East China Normal University, 2009(5):107-117.
- [6] Ahlip R, Rutkowski M. Forward start options under stochastic volatility and stochastic interest rates[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2009, 12(2):209-225.
- [7] Haastrecht V A, Pelsser A. Accounting for stochastic interest rates, stochastic volatility and a general correlation structure in the valuation of forward starting options[J]. Journal of Futures Markets, 2011, 31(2):103-125.
- [8] Ramponi A. Fourier transform methods for regime switching jump diffusions and the pricing of forward starting options[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2012, 15(5):205-209.
- [9] 王伟, 苏小囡, 赵奇杰. 马尔可夫调制的跳扩散过程下远期生效看涨期权的定价[J]. 应用概率统计, 2014(6): 587-597.
- [10] Cai N, Kou S G. Option pricing under a mixed-exponential jump diffusion model[J]. Management Science, 2011, 57(11):2067-2081.
- [11] Carr P, Madan D. Option valuation using the fast Fourier transform[J]. Journal of Computational Finance, 1999, 2(4):61-73.
- [12] Jaimungal S, Wang T. Catastrophe options with stochastic interest rates and compound Poisson losses[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 38(3):469-483.

Pricing of forward starting options using the mixed-exponential jump diffusion model

LIN Hanbin¹, SU Xiaonan^{2,3}, WANG Wei^{1*}

(1.School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2.School of Statistics and Mathematics, Nanjing Audit University, Nanjing 211815, China;

3.Jiangsu Key Laboratory of Financial Engineering, Nanjing 211815, China)

Abstract: The pricing of forward starting options using the mixed-exponential jump diffusion model is studied with the market interest rate being constant and stochastic respectively. Based on the assumption that the risk asset price dynamic follows the mixed-exponential jump diffusion process, and by using the measure of change, the inverse Laplace transform, and the non-arbitrage pricing principle, the pricing formulas of the forward starting call option are obtained. Furthermore, the price of forward starting put options is obtained by applying the call-put parity relationship.

Key words: jump diffusion model; Laplace transform; parity relationship

(责任编辑 韩 超)