

关于不适定积分方程修正 OS-EM 算法的收敛性研究

郭 瑶, 王金平*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 主要针对修正 OS-EM(Ordered-Subset Expectation-Maximization)重建算法进行研究, 即利用超松弛参数来加速有序子集, 期望最大化的快速重建算法, 并且通过 OS-EM 算法来进行收敛性分析. 此外, 还充分利用 KL 距离的一些性质, 以探究在精确数据的情况下, 修正 OS-EM 算法的单调性及其方程解的收敛性.

关键词: 修正 OS-EM 算法; Kullback-Leibler 距离; 松弛算子

中图分类号: O177.6; O175.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-5132 (2019) 06-0077-05

在正电子发射层析成像中, ML-EM(Maximum-Likelihood Expectation-Maximization)算法是重构问题中用来逼近最大似然估计量的一种重要工具, 但其收敛速度较慢. 因此, 许多学者做了大量工作来加速 EM 重构. 其中, 1994 年, Hudson 等^[1]提出的 OS-EM 算法就明显加快了重构速率. 1987 年, Kaufman^[2]用较大步长或功率因素以加速图像重构. 2016 年, Geng 等^[3]用超松弛算子的方法研究了加速的 EM 算法. 在前人基础上, 本文对 OS-EM 算法进行研究, 得到了一些相关结果.

1 预备知识

OS-EM 算法能有效替换原始的 EM 算法^[1], 因此我们将 OS-EM 算法推广到无限维空间, 并且将投影数据 g 划分成 N 个子集, 其中 $y_j = y|_{\Sigma_j}$. 这里 $\Sigma_j \in \Sigma$, Σ_j 可以相交, 也可以是不相交, 满足 $\Sigma = \Sigma_0 \cup \dots \cup \Sigma_{N-1}$. 那么第一类 Fredholm 积分方程可分解为如下—类算子方程:

$$K_j x = g_j, j = 0, \dots, N-1, \quad (1)$$

其中, $K_j: L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Sigma_j)$, 且满足:

$$(K_j x)(t) = \int_{\Omega} k_j(s, t)x(s)ds, \quad (2)$$

$$k_j(s, t) := k|_{\Omega \times \Sigma_j}, s \in \Sigma.$$

为求解(1)式, 将原始的 OS-EM 算法写成如下

形式:

$$x_{m+1}(t) = P_j(x_m) = x_m(t) \int_{\Sigma} \frac{k_j(s, t)g_j(s)}{(K_j x_m)(s)} ds. \quad (3)$$

而修正 OS-EM 算法形式如下:

$$x_{m+1}(t) = P_j(x_m) = x_m(t) \cdot \left(\int_{\Sigma} \frac{\lambda^{(m)} k_j(s, t)g_j(s)}{(K_j x_m)(s)} ds - c \right) = x_m(t) T_j(x_m)(t), \quad (4)$$

其中, c 是常数, 且满足 $c = \lambda^{(m)} - 1 > 0$, $\lambda^{(m)} \in [1, 4]$. 给定的指标 $0 \leq j < N$ 与迭代指数 m 之间满足 $j = [m] := (m \bmod N)$. 当 $N=1$ 时, 对应于标准的 EM 算法. 不妨设

$$\tau_x(s, t) = \frac{\lambda^{(m)} k_j(s, t)x(t)}{(K_j x)(s)} - cx(t), \quad (5)$$

$$\rho_x(s, t) = \frac{k_j(s, t)x(t)}{(K_j x)(s)}. \quad (6)$$

其中,

$$\int_{\Omega} \tau_x(s, t)dt = \int_{\Omega} \rho_x(s, t)dt = 1, \forall s \in \Sigma. \quad (7)$$

算子方程系(1)式的解可以通过最小化下述函数求得:

$$f_j(x) = \int_{\Sigma} [g_j(s) \ln(g_j(s)) / ((K_j x)(s)) - g_j(s) + (K_j x)(s)] ds = d(g_j, K_j x), \quad (8)$$

其中, $d(v, u)$ 是 KL 距离, 定义如下:

$$d(v, u) = \int \left[v(t) \ln \frac{v(t)}{u(t)} - v(t) + u(t) \right] dt, \quad (9)$$

其中, $u, v \in L^1(\Sigma)$ 或 $u, v \in L^1(\Omega)$. 显然, 对于任意的 (v, u) 而言, 都满足 $d(v, u) \geq 0$. 当且仅当 $v = u$ 时, $d(v, u) = 0$ 成立.

假设集合 Ω 和 Σ 是有界开集, 令 Λ 表示下述集合:

$$\Lambda = \left\{ x \in L^1(\Omega) : x > 0, \int_{\Omega} x(t) dt = 1 \right\}, \quad (10)$$

其中, 初始值 $x_0 \in \Lambda$. 这里仍然保留原始 EM 算法的非负性和自规范性, 即:

$$\int_{\Omega} x_{m+1}(t) dt = \int_{\Omega} x_m(t) dt = \int_{\Sigma} g_j(s) ds, m \geq 1. \quad (11)$$

此外, 我们还提出了以下假设:

(a) 核函数 $k_j : \Sigma \times \Omega \rightarrow R$, $j = 0, \dots, N-1$, 对于任意的 $t \in \Omega$, 满足 $\int_{\Sigma} k_j(s, t) ds = 1$;

(b) 存在非负常数 θ_1 和 θ_2 , 使得 $\theta_1 \leq k_j(s, t) \leq \theta_2$;

(c) 对于任意的 $x \in L^1(\Omega)$, 精确数据 $g_j \in \Lambda$. 并且存在非负常数 θ_3 , 使得 $g_j \leq \theta_3$;

(d) 对任意的 $g_j \in \Omega$, (1) 式中的非负解 $x^* \in \Lambda$, 且不会变为 0, 还满足 $d(x^*, x) < \infty$.

由假设(b)可得算子 $K_j : L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Sigma)$ 是连续的, 并且 $K_j : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Sigma)$ 也是连续的.

下面将给出 KL 距离的一些基本性质, 其在 OS-EM 算法收敛性分析中起至关重要的作用^[4-5].

引理 1 令 u 和 v 是 L^1 上的 2 个函数, (u, v) 属于所定义的 KL 距离区域, 则有如下的性质:

(i) 对于任意的 $(u, v) \in D_d$, 有:

$$\|v - u\|_1^2 = \left(\frac{2}{3} \|v\|_1 + \frac{4}{3} \|u\|_1 \right) d(u, v); \quad (12)$$

(ii) 函数 $(v, u) \mapsto d(v, u)$ 是凸的, 因此, 函数 $(v, x) \mapsto d(v, K_j x)$ 也是凸的;

(iii) 设序列 $\{u_n\}, \{v_n\} \subset L^1(\Omega)$, 且其中一个序列有界, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(v_n, u_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - u_n\|_{L^1} = 0; \quad (13)$$

(iv) 令 $0 \leq x, y \in L^1(\Omega)$, 满足:

$$\int_{\Omega} x(t) dt = \int_{\Omega} y(t) dt = 1, \text{ 则:}$$

$$\int_{\Omega} x(s) \ln \frac{x(s)}{y(s)} ds \geq \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} |x(s) - y(s)| ds \right)^2. \quad (14)$$

证明 由文献[6]中引理 2.2 可知(i)成立, 从而

易得到引理 1(iii)和(iv). 参阅文献[7]可得到(ii).

由上述引理 1(iv), 我们可以证明 L_p 空间上类似结果, 即得到下述引理.

引理 2 对于 $0 \leq x, y \in L^\infty(\Omega)$, 有 $\int_{\Omega} x(s) ds = \int_{\Omega} y(s) ds$, 且 $2 \leq p < +\infty$, 则有如下不等式:

$$\int_{\Omega} x(s) \ln \frac{x(s)}{y(s)} ds \geq \frac{1}{p(p-1)} \left(\max \{ \|x\|_\infty, \|y\|_\infty \} \right)^{1-p} \|x - y\|_p^p. \quad (15)$$

证明 见文献[6]中的命题 2.3.

引理 3 令 $k_{\max} = \|k_j\|_\infty$, $k_{\min} = \min k_j(s, t)$, 则:

$$C_1 \leq \frac{(k_{\min})^2}{4k_{\max}} - c \leq T_j(x_m)(t) \leq \frac{(4k_{\max})^2}{k_{\min}} - c \leq C_2. \quad (16)$$

证明 由(3)式及假设(a)~(b), 易知(16)式成立.

引理 3 当 $x^* \in \Lambda$ 最小化 f_j 时, 由于 $x_{m+1} = P_j(x_m)$, 则有:

$$d(x^*, x_{m+1}) = d(x^*, x_m) - \int_{\Omega} x^*(t) \ln T_j(x_m)(t) dt, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

证明 因为 $x_{m+1} = x_m T_j(x_m)$, 则有等式如下:

$$\begin{aligned} x^* \ln \frac{x^*}{x_{m+1}} - x^* + x_{m+1} &= x^* \ln \frac{x^*}{x_m T_j(x_m)} - x^* + \\ &= x^* \ln \frac{x^*}{x_m} - x^* + x_m + x_m \cdot \\ &\quad \left(\int_{\Sigma} \frac{\lambda^{(m)} k_j(s, t) g_j(s)}{(K_j x_m)(s)} ds - \lambda^{(m)} \right) - x^* \ln T_j(x_m). \end{aligned}$$

将等式左右两边同时对 t 积分, 则(17)式成立.

2 主要结果

本节主要研究在精确数据下, 修正 OS-EM 算法的收敛性. 首先定义 2 个函数 ϕ_j 和 φ_j :

$$\phi_j(x, \sigma) := \int_{\Sigma} g_j(s) \int_{\Omega} \ln [k_j(s, t) x(s)] \tau_{\sigma}(s, t) dt ds, \quad (18)$$

$$\varphi_j(x, \sigma) := \int_{\Sigma} g_j(s) \int_{\Omega} \ln(\rho_x) \tau_{\sigma}(s, t) dt ds, \quad (19)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Gamma_j(x) &= \int_{\Sigma} g_j(s) \ln(K_j x)(s) ds = \\ &= \phi_j(x, \sigma) - \varphi_j(x, \sigma). \end{aligned} \quad (20)$$

定理 1 对于任意 $x_k, x_{k+1} \in L^1(\Omega)$, 有不等式

$$\phi_j(x_m, x_m) - \phi_j(x_{m+1}, x_m) \geq 0,$$

$$\varphi_j(x_{m+1}, x_m) - \varphi_j(x_m, x_m) \geq 0.$$

证明 只需证明第1个不等式, 而第2个不等式证明方法类似. 对集合 Ω 上的 2 个连续函数 α 和 β , 其中, $\int_{\Omega} \alpha(t) dt = 1$, 由詹森不等式可得:

$$\ln\left(\int_{\Omega} \alpha(t) \beta(t) dt\right) \geq \int_{\Omega} \alpha(t) \ln \beta(t) dt. \quad (21)$$

又由(7)式和(20)式得到:

$$\begin{aligned} \phi_j(x_{m+1}, x_m) - \phi_j(x_m, x_m) &= \\ \int_{\Sigma} g_j(s) \int_{\Omega} \ln[k_j(s, t) x_{m+1}(s)] \tau_{x_m}(s, t) dt ds - \\ \int_{\Sigma} g_j(s) \int_{\Omega} \ln[k_j(s, t) x_m(s)] \tau_{x_m}(s, t) dt ds &= \\ - \int_{\Omega} \ln\left(\frac{x_m(t)}{x_{m+1}(t)}\right) x_{m+1}(t) dt &\geq -\ln 1 = 0. \end{aligned}$$

定理 2 若假设条件(a)~(c)满足, 且 $x_{m+1} = P(x_m)$, $x_m \in \Lambda \cap D_{f_j}$, 则下列结论成立:

(i) 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 则 $\Gamma_j(x_m)$ 单调递增且收敛的;

(ii) 对于任意的 $m \in \mathbb{N}$, $f_{[m]}(x_m) - f_{[m]}(x_{m+1}) \geq d(x_{m+1}, x_m) \geq 0$;

(iii) 当 $x^* \in \Lambda$ 最小化 f_j ($0 \leq j < N$) 时, $d(x^*, x_m) < \infty$, 且 $d(x^*, P_j(x_m)) < \infty$. 同时不等式 $f_{[m]}(x_m) - f_{[m]}(x^*) \leq d(x^*, x_m) - d(x^*, P_j(x_m))$ 成立.

(iv) 对任意的 $p \in [1, +\infty)$, $0 \leq j < N$, 都有 $\lim_{m \rightarrow \infty} \|K_j x_{j+mN} - g_j\|_{L^p(\Sigma)} = 0$.

证明 (i) $\Gamma_j(x_{m+1}) - \Gamma_j(x_m) = \phi_j(x_{m+1}, x_m) - \varphi_j(x_{m+1}, x_m) - (\phi_j(x_m, x_m) - \varphi_j(x_m, x_m)) \geq d(x_{m+1}, x_m) \geq 0$. 显然, 数列 $\{\Gamma_j(x_m)\}$ 是单调递增且有界. 因此当 $m \rightarrow \infty$ 时, 数列收敛.

(ii) 由(8)式和(11)式可知, $f_j(x_m) - f_j(P_j(x_m)) = d(g_j, K_j x_m) - d(g_j, K_j x_{m+1}) = \Gamma_j(x_{k+1}) - \Gamma_j(x_k) \geq d(x_{m+1}, x_m) \geq 0$. 因此 $f_{[m]}(x_m) - f_{[m]}(x_{m+1}) \geq d(x_{m+1}, x_m) \geq 0$, 即 $f_{[m]}(x_m)$ 是单调不增有界函数, 且收敛.

(iii) 令 $F(h; x, y) = \frac{k_j(x, y) g_j(x)}{\int_{\Omega} k_j(x, u) h_j(u) du}$, 由于 d

具有非负性, 且 $x_{m+1} = P(x_m) = x_m T_j(x_m)$, 因此,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Sigma} x^* d\left(\frac{F(x^*; s, t)}{T_j(x^*)(s)}, \frac{F(x_m; s, t)}{T_j(x_m)(s)}\right) ds = \\ \int_{\Sigma} \int_{\Omega} x^* F(x^*; s, t) \ln\left(\frac{F(x^*; s, t) x^*}{F(x_m; s, t) x_m}\right) &dt ds = \int_{\Omega} \int_{\Sigma} x^* F(x^*; s, t) \cdot \\ \frac{x_{m+1}}{x^*} &dt ds = \int_{\Omega} \int_{\Sigma} x^* F(x^*; s, t) \cdot \end{aligned}$$

$$\ln \frac{(K_j x_m)(s)}{(K_j x^*)(s)} ds dt + d(x^*, x_m) - d(x^*, x_{m+1}) =$$

$$\int_{\Omega} g_j \ln \frac{(K_j x_m)(s)}{(K_j x^*)(s)} dt + d(x^*, x_m) -$$

$$d(x^*, x_{m+1}) = \Gamma_j(x_m) - \Gamma_j(x^*) +$$

$$d(x^*, x_m) - d(x^*, x_{m+1}).$$

于是 $0 \leq \Gamma_j(x^*) - \Gamma_j(x_m) \leq d(x^*, x_m) - d(x^*, x_{m+1})$. 又由定理 2(i)和(ii)可知, $f_j(x_m) - f_j(x^*) = \Gamma_j(x^*) - \Gamma_j(x_k)$, 即 $f_{[m]}(x_m) - f_{[m]}(x^*) \leq d(x^*, x_m) - d(x^*, P_j(x_m))$, 故(3)式得证.

由定理 2(ii)和(iii)可知, $f_j(P_j(x_m)) \leq f_j(x_m)$, 并且 $P_j(x_m) \in \Lambda$. 更重要的是, 如果 $x^* \in \Lambda$ 是(1)式的解, 则有 $f_j(x^*) = 0$, 从而 $f_{[m]}(x_m) \leq d(x^*, x_m) - d(x^*, P_j(x_m))$.

(iv) 由定理 2(ii)和(iii)可知, $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{[k]}(x_m) = 0$ 和

$\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_{m+1}, x_m) = 0$. 又因为 $f_j(x) = d(g_j, K_j x)$, 那么 $\lim_{m \rightarrow \infty} d(g_{[m]}, K_{[m]} x_m) = 0$. 显然, 当 $0 \leq j < N$ 时,

$\lim_{m \rightarrow \infty} d(g_j, K_j x_{j+mN}) = 0$. 由引理 1(iii)可得, 当 $p = 1$

时, $\lim_{m \rightarrow \infty} \|K_j x_{j+mN} - g_j\|_{L^1(\Sigma)} = 0$. 对于 $p \in (1, +\infty)$ 的情形, 由假设(c)可知,

$$\begin{aligned} |g_j - K_j x_{j+mN}|^p &\leq |g_j - K_j x_{j+mN}| \cdot (|g_j| + \\ |K_j x_{j+mN}|)^{p-1} &\leq 2^{p-1} \theta_3^{p-1} |g_j - K_j x_{j+mN}|, \end{aligned}$$

等式两边同时对 s 积分, 即定理 2(iv)得证.

注 $d(g_{[m]}, K_{[m]} x_m) \geq d(g_{[m]}, K_{[m]} x_{m+1})$, 因此 $d(g_{[m]}, K_{[m]} x_m)$ 是有界且收敛的^[8].

定理 3 若假设条件(a)~(c)满足, 且 $x_{m+1} = P(x_m)$, $x_m \in \Lambda \cap D_{f_j}$, 则:

$$\int_{\Omega} x_m(t) (1 - T_j(x_m)(t))^2 dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

证明 遵循泰勒定理, 对于函数 $\ln z$ 在 z_0 处的泰勒展开式为:

$$\ln z = \ln z_0 + (z - z_0) / z_0 -$$

$$\int_0^1 \frac{tdt}{(z - t(z - z_0))^2} (z - z_0)^2. \quad (22)$$

因此,

$$\begin{aligned} \phi_j(x_m, x_m) &= \int_{\Sigma} g_j(s) \int_{\Omega} \ln[k_j(s, t) (P_j(x_m)(t) + \\ x_m(t) - P_j(x_m)(t))] \tau_{x_m}(s, t) dt ds &= \phi_j(P_j(x_m), \\ x_m) &+ \int_{\Sigma} g_j(s) \int_{\Omega} \tau_{x_m}(s, t) \left[\frac{x_m(t) - P_j(x_m)(t)}{P_j(x_m)(t)} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{(x_m(t) - \lambda(x_m(t) - P_j(x_m)(t)))^2} (x_m(t) - \\ & P_j(x_m)(t))^2 dt ds = \phi_j(P_j(x_m), x_m) + \int_{\Sigma} g_j(s) \cdot \\ & \int_{\Omega} \tau_{x_m}(s, t) \left[\frac{x_m(t) - P_j(x_m)(t)}{P_j(x_m)(t)} - \right. \\ & \left. \int_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{(x_m(t) - \lambda(x_m(t) - P_j(x_m)(t)))^2} (x_m(t) - \right. \\ & P_j(x_m)(t))^2 dt ds = \phi_j(P_j(x_m), x_m) + \\ & \left. \int_{\Omega} P_j(x_m)(t) \left[\frac{x_m(t) - P_j(x_m)(t)}{P_j(x_m)(t)} - \right. \right. \\ & \left. \left. \int_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{(1 - \lambda(1 - T_j(x_m)(t)))^2} (1 - T_j(x_m)(t))^2 dt \right] dt. \end{aligned}$$

又因为 $\int_{\Omega} x_m(t) dt = \int_{\Omega} P_j(x_m)(t) dt$, 且由引理 3 可得:

$$\begin{aligned} & \phi_j(P_j(x_m), x_m) - \phi_j(x_m, x_m) = \int_{\Omega} P_j(x_m)(t) (1 - \\ & T_j(x_m)(t))^2 \int_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{(1 - \lambda(1 - T_j(x_m)(t)))^2} dt \geq \\ & \frac{1}{2 \max(1, \|T(x_m)\|_{\infty}^2)} \cdot \\ & \int_{\Omega} P_j(x_m)(t) (1 - T_j(x_m)(t))^2 dt \geq \\ & \frac{1}{2 \max(1, C_2^2)} \int_{\Omega} P_j(x_m)(t) (1 - T_j(x_m)(t))^2 dt. \end{aligned}$$

又由定理 2(i), 则有不等式:

$$\begin{aligned} & \Gamma_j(x_{m+1}) - \Gamma_j(x_m) = \phi_j(x_{m+1}, x_m) - \phi_j(x_m, x_m) \geq \\ & \frac{1}{2 \max(1, C_2^2)} \int_{\Omega} P_j(x_m)(t) (1 - T_j(x_m)(t))^2 dt. \end{aligned}$$

另一方面,

$$x_{m+1}(t) = P_j(x_m)(t) = x_m(t) T_j(x_m)(t) \geq C_1 x_m(t),$$

因此,

$$\begin{aligned} & \Gamma_j(x_{m+1}) - \Gamma_j(x_m) \geq \frac{C_1}{2 \max(1, C_2^2)} \cdot \\ & \int_{\Omega} x_m(t) (1 - T_j(x_m)(t))^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

当 $m \rightarrow \infty$ 时, 由定理 2(i) 可知不等式的左边趋于 0, 得证.

推论 1 由定理 2(iii) 得到 $\int_{\Omega} x^*(1 - T_j(x^*)(t))^2 \cdot dt = 0$, 其中, x^* 最大化 $\Gamma_j(x_m)$.

定理 4 假设 x^* 最小化 $f_j(x_m)$, 则 x^* 是(4)式的固定点, 即 $x^* = P_j(x^*)$.

证明 利用柯西不等式、引理 4 及定理 3, 得 $\|x_m(t) - P_j(x_m)(t)\|_1 = \int_{\Omega} x_m(t) |1 - T_j(x_m)(t)| dt \leq$

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} x_m(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} x_m(t) |1 - T_j(x_m)(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \left(\int_{\Omega} x_m(t) |1 - T_j(x_m)(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

因此, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $x^* = P_j(x^*)$, 得证.

定理 5 若假设条件(a)~(d)满足, 初始点 $x_0 \in L^{\infty}(\Omega)$, 序列 $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 在 $L^p(\Omega)_{p \in (1, +\infty)}$ 空间上有界. 则在 $L^p(\Omega)_{p \in (1, +\infty)}$ 上, $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 的子序列弱收敛于系统方程(1)的解.

证明 首先通过归纳法证明 $x_m (m \in \mathbb{N})$ 是有界函数. 因为 $x_0 \in A$, 由假设(b)可得 $\theta_1 \leq K_j x_0 \leq \theta_2$. 又由假设(c)可得到:

$$\frac{k_1(s, t) g_0(s)}{(K_0 x_0)(s)} \leq \frac{\theta_2 \theta_3}{\theta_1}.$$

即由 $x_0 \in L^{\infty}(\Omega)$ 可得 $x_1 \in L^{\infty}(\Omega)$. 类似地, 我们注意到当满足假设(b)和(c)时, 则由 $x_m \in L^{\infty}(\Omega)$ 可推导出 $x_{m+1} \in L^{\infty}(\Omega)$, 因此猜想 $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 相对于 $L^{\infty}(\Omega)$ 范数是有界的. 利用反证法, 不妨假设存在子序列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 使得 $\|x_n\|_{\infty} \rightarrow +\infty$. 当 n 无穷大时, 有 $\max\{\|x_n\|_{\infty}, \|x^*\|_{\infty}\} = \|x_n\|_{\infty}$. 由引理 2 可知,

$$d(x^*, x_n) \geq \frac{1}{p(p-1)} (\max\{\|x^*\|_{\infty}, \|x_n\|_{\infty}\})^{1-p}.$$

$$\begin{aligned} & \|x_n - x^*\|_p^p = \frac{1}{p(p-1)} \frac{\|x_n - x^*\|_p^p}{\|x_n\|_{\infty}^{p-1}} = \\ & \frac{\|x_n\|_{\infty}}{p(p-1)} \frac{\|x_n - x^*\|_p^p}{\|x_n\|_{\infty}^p}. \end{aligned} \quad (23)$$

对于任意的 $p \in [2, +\infty)$, 得到 $\|x_n - x^*\|_p^p / \|x_n\|_{\infty}^p$ 是有界的, 因为

$$\frac{\|x_n - x^*\|_p}{\|x_n\|_{\infty}} \leq \frac{\|x_n\|_p}{\|x_n\|_{\infty}} + \frac{\|x^*\|_p}{\|x_n\|_{\infty}} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} + \frac{\|x^*\|_p}{\|x_n\|_{\infty}}.$$

又由定理 2(iii) 可知, 对任意的 $x \in \mathbb{N}$, 有 $d(x^*, x_n) \leq d(x^*, x_0)$, 但这就与(23)式中的不等式相矛盾. 因此, 我们的猜想得到验证.

因为序列 $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ 在 $L^p(\Omega)_{p \in (1, +\infty)}$ 上是有界的, 则存在一个子序列 $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ 在 $L^p(\Omega)_{p \in (1, +\infty)}$ 上弱收敛于 x^* .

下面证明 x^* 是系统方程的解, 且分两种情形

讨论:

(1) 对每个固定 $0 \leq j < N$, 序列 $\{x_\alpha\}_{\alpha=j+mN, m \in \mathbb{N}}$ 中存在 1 个子序列 $\{x_{\alpha_l}\}$, 其中 $\alpha_l = m_l N (l \in \mathbb{N}, j = 0)$. 显然 $[\alpha_l] = 0$. 由定理 2(iv) 可知, 当 $l \rightarrow \infty$ 时, 在 $L^p(\Omega)_{p \in (1, +\infty)}$ 空间中 $K_0 x_{\alpha_l} \rightarrow g_0$. 由假设(b)可知 $K_0 : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Sigma)$ 是连续的, 因此也是弱连续的, 则 $K_0 x_{\alpha_l} \rightarrow K_0 x^*$. 从弱极限的唯一性看, $K_0 x^* = g_0$, 当 $j = 1, \dots, N-1$ 时, 就得到了 $K_j x^* = g_j$.

(2) 当至少有一个 $0 \leq j_0 < N$, $\{x_\alpha\}_{\alpha=j+mN, m \in \mathbb{N}}$ 中有一个子序列 $\{x_{\alpha_l}\}$, 其中 $\alpha_l = j_0 + m_l N (l \in \mathbb{N})$, 类似地可以得到 $K_{j_0} x^* = g_{j_0}$. 接下来考虑子序列 $\{x_{\alpha_l+1}\}, \{x_{\alpha_l+2}\}, \dots, \{x_{\alpha_l+N+1}\}$, 我们得到对于所有的 j , 都有 $K_j x^* = g_j$, 定理得证.

3 总结

本文主要致力于研究用修正 OS-EM 算法求解线性不适定性方程问题, 研究在精确数据情况下, 修正 OS-EM 算法的一些单调性及收敛性结果, 而减弱假设条件下得到更好的结果是我们接下来需要做的研究工作.

参考文献:

- [1] Hudson H M, Larkin R S. Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data[J].

IEEE Trans Med Imaging, 1994, 13(4):601-609.

- [2] Kaufman L. Implementing and accelerating the EM algorithm for positron emission tomography[J]. IEEE Transaction Medical Imaging, 1987, 6(1):37-51.
- [3] Geng C X, Wang J P. Convergence analysis of an accelerated expectation maximization algorithm for ill-posed integral equations[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2016, 39:668-675.
- [4] Resmerita E, Anderssen R S. Joint additive Kullback-Leibler residual minimization and regularization for linear inverse problems[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2007, 30:1527-1544.
- [5] Resmerita E, Engl H W, Insem A N. The expectation-maximization algorithm for ill-posed integral equations: a convergence analysis[J]. Inverse Problems, 2007, 23:2575-2588.
- [6] Borwein J M, Lewis A S. Convergence of best entropy estimates[J]. SIAM Journal of Optimization, 1991, 1(2): 191-205.
- [7] Linblad G. Entropy, information and quantum measurements[J]. Communications in Mathematical Physics, 1973, 33(4):305-322.
- [8] Haltmeier M, Larkin R S. On the regularization methods of EM-Kaczmarz type[J]. Inverse Problems, 2009, 25(7): 1-17.

Study on convergence of modified OS-EM algorithm in ill-posed integral equations

GUO Yao, WANG Jinping*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In this paper, we mainly study the modified OS-EM (ordered-subset expectation-maximization) reconstruction algorithm, which is a fast reconstruction algorithm that uses overrelaxation parameters to accelerate the expectation of ordered subsets, and analyze convergence by OS-EM algorithm. By making full use of some properties of KL distance, we explore the monotonicity of the modified OS-EM algorithm and the convergence of the solution of the equations in the case of accurate data.

Key words: the modified OS-EM algorithm; Kullback-Leibler distance; overrelaxation parameters

(责任编辑 章践立)