

梁在纯弯曲作用下的脆性断裂

位世阳, 李凤云, 郑宇轩, 周风华*

(宁波大学 冲击与安全工程教育部重点实验室, 浙江 宁波 315211)

摘要: 脆性梁在纯弯曲断裂时会产生多个碎片, 其断裂过程直接影响弯曲波的产生和传播, 以及产生碎片的平均尺度. 采用内聚力断裂模型对脆性梁的弯曲断裂过程进行有限元数值模拟, 再现了断裂中的裂纹扩展过程, 分析了脆性梁断裂后断裂面弯矩与裂纹张开角之间的规律. 数值结果表明: (1) 在一个广泛的材料参数和加载应变率条件下, 断裂面弯矩与裂纹张开角之间均呈相似的单调衰减规律; (2) 断裂过程中弯矩做功与断裂面的表面能一致; (3) 在纯弯矩作用下, 裂纹前端总是存在压应力区域, 使得断裂末期应力状态较为复杂, 断裂不再是纯弯曲状态.

关键词: 脆性梁; 弯曲断裂; 内聚力断裂; 弯矩; 裂纹张开角

中图分类号: O346.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2019) 06-0067-05

Feynman 等^[1]指出意大利面条在纯弯矩作用下通常会断裂成多个碎片, 这种现象的产生主要是由脆性梁的弯曲断裂和断裂后产生的弯曲波传播引起. 关于弯曲断裂, 早期 Bodner^[2]对长玻璃梁进行了弯曲实验, 观测预置裂纹的玻璃梁的弯曲断裂过程, 发现纯弯曲作用下, 玻璃梁弯曲断裂发展呈三段式变化规律. Freund 等^[3]提出脆性材料在纯弯曲的断裂响应中, 裂纹长度和断裂面弯矩的变化与时间相关, 可通过理论计算来解释裂纹在传播过程中的变化. 关于弯曲波的传播, Gladden 等^[4]指出脆性材料在动态屈曲下的碎裂过程中会产生与纵波波速等参数有关的波长为 λ 的波, 引发断裂. Audoly 等^[5]分析了意大利面条的碎裂现象是由弯曲波导致的二次断裂. 在纯弯矩作用下意大利面条在其最大曲率点发生瞬时断裂, 随后断裂处产生的弯曲波在意大利面条中传播, 他们假定意大利面条的断裂为瞬时断裂, 通过自相似解描述了弯曲波在面条中的传播规律. 但是由于断裂过程与时间无关, 在求解过程中没有特征时间来控制碎片的特征长度, 同时也没有考虑断裂时的加载速率对弯曲波传播的影响.

相对于弯曲碎裂问题, 对固体在高应变率下的拉伸碎裂的研究更加系统完善. 20 世纪 40 年代, Mott^[6-7]提出了在一维均匀拉伸载荷作用下, 断裂产生的 Mott 卸载波传播距离控制碎片平均尺寸的思想. 因 Mott 假定断裂过程是一个瞬时断裂, 碎裂过程中产生的碎片尺度只能依据某个统计函数来确定. 而文献[8-9]在 Mott 理论上引入一个与断裂能量相关的线性内聚断裂模型来描述固体材料碎裂过程中的裂纹扩展, 从而推导出一个可预测碎片平均尺寸的公式. 近期的研究表明^[10-12], 考虑线性内聚力断裂的 Mott 卸载波控制碎片平均尺寸的理论能很好地描述固体拉伸碎裂过程.

弯曲断裂显然不可能是一个瞬时断裂过程, 与时间无关的断裂模型无法准确求解弯曲波的传播距离及控制的碎片尺度, 建立一个合适的内聚力断裂模型有助于分析弯曲波传播规律及弯曲碎裂过程中产生的碎片尺寸. 在前期研究中, 我们建立了一个基于欧拉伯努利梁动力学理论的模型, 在这个模型中, 假定梁在断裂点所承受的残余弯矩(内聚力弯矩)是转角的线性递减函数, 我们给出了弯曲波问题的解析解, 并分析了影响断裂特征

收稿日期: 2019-05-07.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金 (11390361).

第一作者: 位世阳 (1992-), 男, 河南洛阳人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 冲击动力学. E-mail: 1396811300@qq.com

*通信作者: 周风华 (1964-), 男, 浙江宁波人, 博士/教授, 主要研究方向: 冲击动力学、断裂力学. E-mail: zhoufenghua@nbu.edu.cn

时间的参数组合. 然而, 脆性梁的具体断裂过程涉及一个裂纹在梁的横向扩张和传播的动态过程, 在裂纹传播时, 部分断裂的梁的残余抗弯强度(弯矩)是多少? 能否用一个唯象的内聚力断裂模型描述脆性断裂? 需要进行细致分析.

本文以四点弯曲数值实验为分析对象, 研究脆性材料在弯曲作用下的断裂过程, 重点分析断裂面弯矩与裂纹张开角之间的关系, 探究弯曲碎裂过程中合理的内聚力断裂模型.

1 有限元模型

1.1 几何模型

建立四点四分之一的二维弯曲模型(图 1)分析脆性材料的弯曲断裂过程. 弯曲梁长度为 20 mm, 高度为 1 mm, 在上表面相距 9 mm 的两对称点同时施加向下的恒定速度载荷. 下表面相距 18 mm 的两对称点为固定支撑端, 受力点距同侧固定点的横向距离为两固定支撑点距离的四分之一.

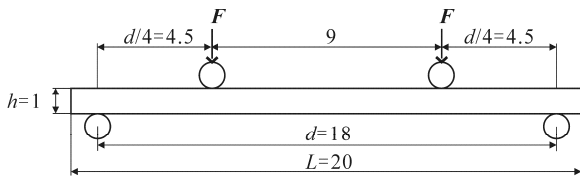


图 1 脆性梁 4 点弯加载示意图(单位 mm)

为了更精确地描述脆性梁的弯曲断裂特性, 对弯曲梁中间位置进行网格加密, 网格加密区的平均网格尺寸为 $2\mu\text{m}$, 有限元模型如图 2 所示, 并在网格加密区域插入厚度为零的内聚力单元层, 以模拟内聚力断裂过程及裂纹传播. 首次断裂只会发生在最大弯曲处的内聚力层. 为简化计算模型, 减少计算量, 脆性梁的其他材料参数采用文献 [13] 中典型脆性材料工程陶瓷的材料参数. 加载点的 2 个刚性块对弯曲梁施加 Y 轴负方向的速度载荷, 固定点的 2 个刚性块设置固定约束, 其中刚性块与弯曲梁之间采用面面接触, 采用罚函数接触算法减少沙漏效应.

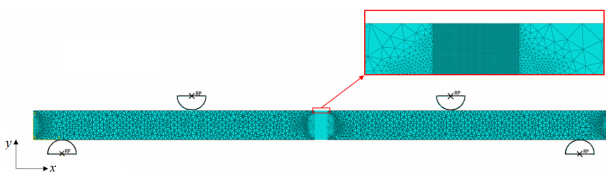


图 2 有限元模型

1.2 内聚力断裂模型

Alfano^[14]对多种内聚力模型进行了对比计算, 得出双线性模型能够同时兼顾计算精度和计算效率. 因此, 本文选用该模型来控制内聚力层的破坏, 如图 3 所示, 可分为材料的线弹性阶段和损伤后的应力线性软化阶段, 其中, K 表示内聚力单元的刚度; $\sigma_{\max}$ 表示开裂时最大应力值; G_c 表示断裂能, 材料从完好到断裂所吸收的能量, 即应力位移曲线的面积积分. 内聚力单元的损伤演化关系如图 4 所示. 在材料发生断裂过程中, 断裂点的单元损伤应力 σ_y 与损伤因子 d 、无损伤材料等效应力 $\bar{\sigma}$ 之间的关系为 $\sigma_y = (1-d)\bar{\sigma}$, 当 $d=1$ 时, 即损伤完全, 材料将完全破坏而失去承载能力. 在数值计算中, 采用单元消去方法将失效单元从整体结构中消去.

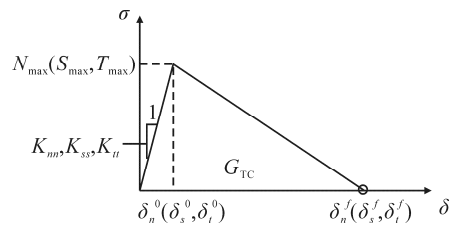


图 3 内聚力单元的双线性本构模型

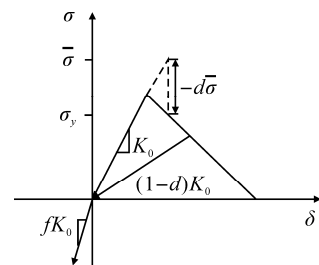


图 4 内聚力单元的损伤示意图

内聚力单元的参数也设置为典型的工程陶瓷^[13]参数: $G_c=0.2\text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$, $K=4.5\times 10^8\text{MPa}\cdot\text{mm}^{-1}$, 求得完全断裂时裂纹张开位移 $\delta_c=2G_c/\sigma_{\max}=1.33\mu\text{m}$.

内聚力单元的网格尺寸是非物理长度尺度, 以提供裂缝尖端附近的应力的精确计算, 内聚区长度 l_{cz} 是内聚力本构关系起作用的长度度量^[15], 裂纹尖端内聚力区的大小 l_{cz} ^[16]为:

$$l_{cz} = \frac{\pi}{8} E \frac{G_c}{\sigma^2}. \quad (1)$$

结合工程陶瓷的材料参数可求得 $l_{cz}=240\mu\text{m}$, Moës 等^[17]指出, 若内聚力区域中内聚力单元的个数太少, 则不能很好地展示裂纹尖端的应力分布, 建议使用 10 个及以上的单元个数. 本文内聚力单

元采用二维 4 节点 cohesive 单元(COH2D4), 内聚力单元大小设置为 $\Delta x=2\ \mu\text{m}$, 计算结果稳定收敛。

2 有限元模拟及结果分析

图 5 给出了加载速率为 $100\ \text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ 时, 脆性梁在纯弯曲作用下的断裂过程及裂纹传播情况。将临界断裂时刻定义为裂纹传播零时刻, 即 $t=0\ \mu\text{s}$ 时, 裂纹在下表面最大弯曲处开始产生。在初始时刻, 梁以 $h=0.5\ \text{mm}$ 处的横截面为中性面, 中性面以上部位受压, 中性面以下部位受拉, 且离中性面距离越远, 压/拉应力越大; 随着裂纹朝压应力区传播, 中性面也从原来位置移动到裂尖和上端面中间位置, 断裂处产生的卸载波也将裂纹两侧应力卸载为零; 在裂纹发展过程中, 裂纹前端始终存在压应力区域, 所以理论上在纯弯曲载荷作用下无法实现完全断裂, 断裂末期处于复杂应力状态。

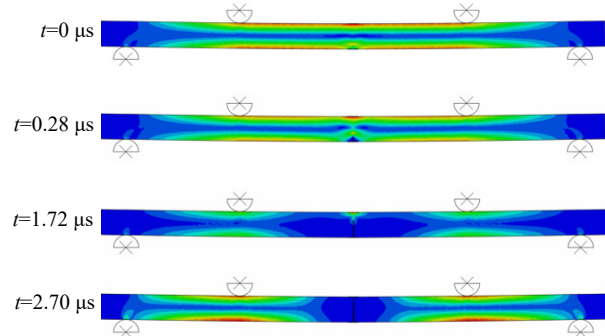


图 5 纯弯曲载荷作用下裂纹的传播

以断裂面节点为自由体切面, 通过 Free Body Cut 的方式输出断裂面的弯矩值 M , 同时输出断裂面单边的节点位移, 利用自编的 Matlab 程序得到断裂面的裂纹张开角 θ , 裂纹张开如图 6 所示。

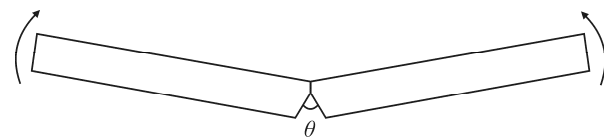


图 6 裂纹张开角示意图

脆性梁弯曲断裂过程中断裂面弯矩和裂纹张开角的时程曲线如图 7 所示。断裂面弯矩从裂纹产生时开始降低, 断裂初期弯矩快速衰减, 随后较长的一段时间衰减较缓慢, 在断裂后期又急速下降, 断裂过程呈典型的三段式变化, 这与文献[2]中测量的结果一致。断裂末期, 断裂面处于一个复杂的应

力状态, 断裂面弯矩会持续衰减至负值, 而后又上升。在进行弯曲波传播理论分析时, 由于断裂末期弯矩值较小, 可以不考虑断裂末期的影响, 从而简化理论模型。断裂面弯矩—断裂角关系如图 8 所示, 裂纹从一点起裂至形成断裂面的过程中, 断裂面弯矩做功为弯矩转角的积分面积, 即 $0.197\ \text{mJ}$ 。数值计算中断裂面设定的断裂能为 $0.2\ \text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$, 二维模型厚度默认为 1, 弯曲梁长度为 $1\ \text{mm}$, 故此断裂面的表面能为 $0.2\ \text{mJ}$, 与断裂面弯矩做功基本一致。

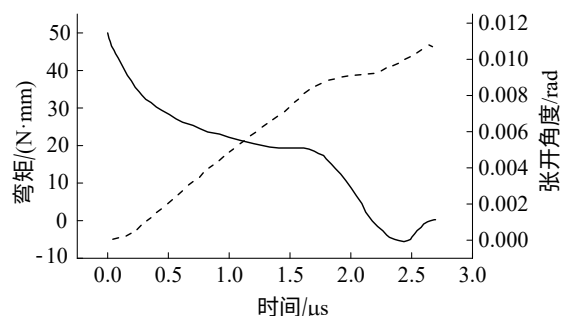


图 7 弯矩及裂纹张开角时程曲线

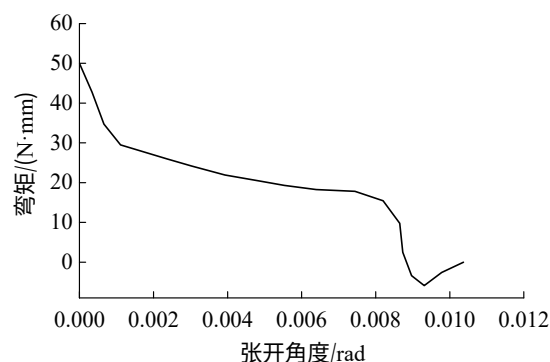


图 8 断裂面弯矩—裂纹张开角曲线

3 内聚力断裂的影响因素

以工程陶瓷为标准参数: $G_c=0.2\ \text{N}\cdot\text{mm}^{-1}$, $\sigma_{\max}=300\ \text{MPa}$, $K=4.5\times 10^8\ \text{MPa}\cdot\text{mm}^{-1}$, 加载速率为 $100\ \text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$, 研究内聚力断裂模型中各参数对断裂面弯矩—裂纹张开角曲线的影响。

3.1 加载速率对断裂面弯矩—裂纹张开角的影响

图 9 给出了加载速率从 $10\ \text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ 至 $300\ \text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ 时的断裂面弯矩—裂纹张开角关系曲线。结果表明, 随着加载速率的增加, 梁弯曲断裂过程中断裂面弯矩与裂纹张开角没有明显的规律性变化, 整体而言均服从同一衰减形式, 加载速率对断裂面弯矩—裂纹张开角曲线影响甚微。

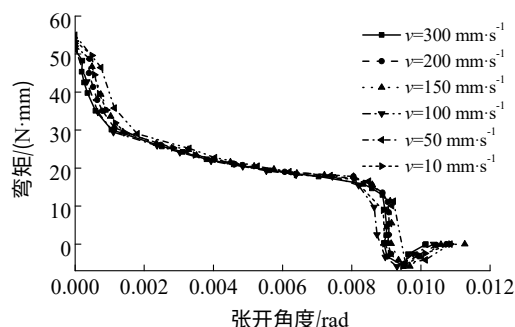
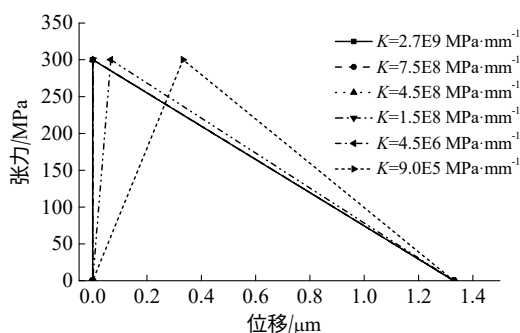


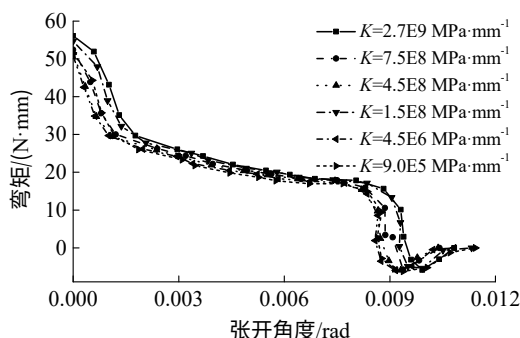
图9 不同加载速率下的断裂面弯矩—裂纹张开角关系

3.2 刚度对裂纹张开角的影响

图 10(a)给出了内聚力单元刚度从 9×10^5 MPa 至 2.7×10^9 MPa 时的内聚力单元本构关系, 相对应的断裂面弯矩—裂纹张开角关系曲线如图 10(b)所示. 结果表明, 刚度值对断裂面弯矩—裂纹张开角关系曲线的前后期略有影响, 但是中间大部分阶段影响不大, 整体而言具有相同的衰减趋势.



(a) 不同刚度值对应的内聚力单元本构曲线

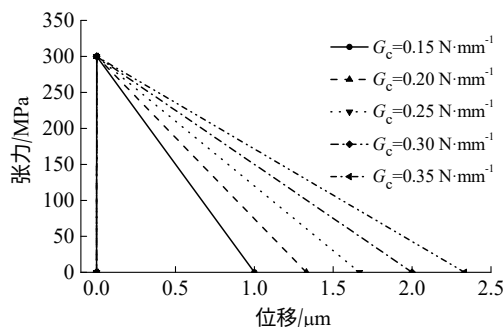


(b) 不同刚度值下的断裂面弯矩—裂纹张开角关系

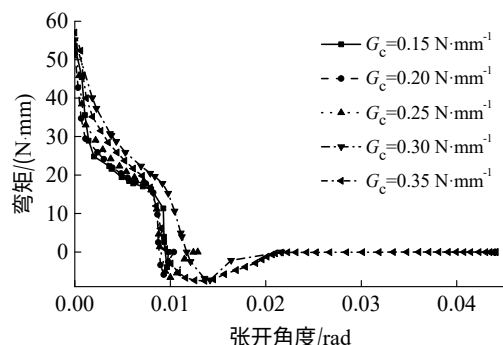
图 10 不同刚度值的输入和输出曲线

3.3 断裂能对裂纹张开角的影响

改变内聚力单元的断裂能, 研究从脆性到韧性材料弯曲断裂过程中的断裂面弯矩—裂纹张开角的关系. 图 11(a)给出了断裂能从 $0.15 \sim 0.35$ N·mm⁻¹ 的内聚力单元本构关系, 相对应的断裂面弯矩—裂纹张开角关系曲线如图 11(b)所示.



(a) 不同断裂能值对应的内聚力单元本构曲线



(b) 不同断裂能值下的断裂面弯矩—裂纹张开角关系

图 11 不同断裂能值的输入和输出曲线

结果表明, 断裂能越大, 在相同裂纹张开角时, 断裂面弯矩越大; 断裂面弯矩—裂纹张开角关系曲线整体仍然呈现三段式衰减规律; 断裂末期, 由于较大的断裂能使得断裂更不干脆, 故而断裂能越大最终的裂纹张开角越大.

4 结论

(1) 在一个广泛的材料参数和加载应变率条件下, 断裂面弯矩随裂纹张开角单调变化, 随裂纹张开角的增大而降低. (2) 在主要断裂阶段, 可以采用一个普适的“内聚力弯曲断裂”模型, 唯象地描述脆性梁发生断裂时的残余弯矩与转角之间关系. (3) 在内聚力断裂过程中, 残余弯矩所消耗的断裂能与断裂面表面能一致, 表明脆性梁的内聚力弯曲断裂过程受材料断裂韧性控制. 在纯弯矩作用下, 裂纹前端总是存在压应力区域, 使得断裂末期应力状态较为复杂, 断裂不再是纯弯曲状态.

参考文献:

- [1] Feynman R P, Sykes C. No Ordinary Genius: The Illustrated Richard Feynman[M]. New York: Norton & Company, 1996:180-181.
- [2] Bodner S R. Stress waves due to fracture of glass in

- bending[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 1973, 21(1):1-8.
- [3] Freund L B, Herrmann G. Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1976, 43(1):112-116.
- [4] Gladden J R, Handzy N Z, Belmonte A, et al. Dynamic buckling and fragmentation in brittle rods[EB/OL]. [2019-03-02]. https://www.researchgate.net/publication/8034974_Dynamic_Buckling_and_Fragmentation_in_Brittle_Rods.
- [5] Audoly B, Neukirch S. Fragmentation of rods by cascading cracks: Why spaghetti does not break in half [EB/OL]. [2019-03-02]. <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.95.095505>.
- [6] Mott N F. A theory of the fragmentation of shells and bombs[EB/OL]. [2019-03-02]. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-540-27145-1_11.
- [7] Mott N F. Fragmentation of shell cases[J]. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1947, 189(1018):300-308.
- [8] Kipp M E, Grady D E. Dynamic fracture growth and interaction in one dimension[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1985, 33(4):399-415.
- [9] Grady D E. Fragmentation of Rings and Shells: The Legacy of N. F. Mott[M]. Berlin: Springer, 2006:35-42.
- [10] 郑宇轩, 胡时胜, 周风华. 韧性材料的高应变率拉伸碎裂过程及材料参数影响[J]. *固体力学学报*, 2012, 33(4): 358-369.
- [11] 陈磊, 周风华, 汤铁钢. 韧性金属圆环高速膨胀碎裂过程的有限元模拟[J]. *力学学报*, 2011, 43(5):861-870.
- [12] 郑宇轩, 周风华, 胡时胜, 等. 固体的冲击拉伸碎裂[J]. *力学进展*, 2016, 46(1):506-540.
- [13] Zhou F, Molinari J F, Ramesh K T. Effects of material properties on the fragmentation of brittle materials[J]. *International Journal of Fracture*, 2006, 139(2):169-196.
- [14] Alfano G. On the influence of the shape of the interface law on the application of cohesive-zone models[J]. *Composites Science and Technology*, 2006, 66(6):723-730.
- [15] Turon A, Dávila C G, Camanho P P, et al. An engineering solution for mesh size effects in the simulation of delamination using cohesive zone models[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2007, 74(10):1665-1682.
- [16] Barenblatt G I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture[J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1962, 7:55-129.
- [17] Moës N, Belytschko T. Extended finite element method for cohesive crack growth[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, 69(7):813-833.

Brittle fracture of beams under pure bending

WEI Shiyang, LI Fengyun, ZHENG Yuxuan, ZHOU Fenghua^{*}

(Key Laboratory of Impact and Safety Engineering of Ministry of Education, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: A brittle beam produces multiple fragments during a pure bending fracture. The fracture process directly affects the generation and propagation of bending waves and the average fragment size. The cohesive fracture model is used to simulate the bending fracture process of the brittle beam. Such FEM modeling reproduces the crack propagation process in the fracture and analyzes the law between the bending moment and the fracture surface-cracking angle after the brittle beam fracture. Numerical results show that: (1) Under a wide range of material parameters and loading strain rates, there is a similar monotonic attenuation law between the bending moment and the cracking angle of the fracture surface; (2) The fracture energy of the fracture surface is equal to the bending moment work during the fracture process; (3) Under the action of pure bending moment, there is always a compressive stress region at the crack tip, the stress state at the end of the fracture is hence more complicated, and the fracture is no longer a purely bending state.

Key words: brittle beam; bending fracture; cohesive fracture; bending moment; crack opening angle

(责任编辑 史小丽)