

含非齐次项椭圆方程组的边界爆破解

王志敏, 马飞遥*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 利用上下解方法和比较原理研究了含非齐次项椭圆方程组边界爆破解的存在性问题. 首先证得包含非齐次项的加奇性权单个椭圆方程边界爆破解的存在性, 进一步得到方程组在边界爆破条件下解的存在性.

关键词: 椭圆方程组; 边界爆破解; 存在性; 非齐次项

中图分类号: O175.25

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 01-0069-03

本文研究如下带有非齐次项的椭圆方程组的边界爆破问题, 并证明其解的存在性:

$$\begin{cases} \Delta u = u^p v^q + h_1(x), x \in \Omega, \\ \Delta v = u^r v^s + h_2(x), x \in \Omega, \\ u = v = +\infty, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

式中: Ω 是 R^N 中的 $C^{2,\eta}$ 光滑有界区域 $0 < \eta < 1$; $p > 1, q > 0, r > 0, s > 1$; $h_1(x), h_2(x) \in C(\Omega)$.

近些年大量国内外学者研究了单个方程边界爆破问题^[1-3]. 文献[4]考虑了带权函数和非齐次项的单个方程边界爆破解的存在性以及解渐近行为:

$$\begin{cases} \Delta u = b(x)g(u) + \lambda h(x), x \in \Omega, \\ u = +\infty, x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

式中: 权函数 $b(x)$ 在 Ω 内有界; $\lambda > 0$; 非齐次项 $h(x)$ 非正, 且 $h(x) \in C_{loc}^\mu(\Omega)$.

García-Melián^[5]研究了如下单个方程边界爆破解的存在性、唯一性以及解的不存在性:

$$\begin{cases} \Delta u = |u|^{p-1} u + h(x), x \in \Omega, \\ u = +\infty, x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

式中, 非齐次项 $h(x)$ 可为无界且变号的函数.

Chuaqui 等^[6]研究了含有权函数 $a(x)$ 的椭圆边界爆破解的存在性以及渐近行为:

$$\begin{cases} \Delta u = a(x)u^m, x \in \Omega, \\ u = +\infty, x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

式中: $m > 1$; 权函数 $a(x)$ 满足条件 $C_1 d(x)^{-\gamma} < a(x) < C_2 d(x)^{-\gamma}$, 其中 C_1, C_2 是正常数, $0 < \gamma < 2$.

椭圆方程组的边界爆破解也有许多研究^[7-10]. 文献[11]考虑了如下方程组在边界爆破条件下解的存在性、唯一性及边界渐近行为:

$$\begin{cases} \Delta u = u^p v^q, x \in \Omega, \\ \Delta v = u^r v^s, x \in \Omega, \\ u = v = +\infty, x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

本文考虑含非齐次项椭圆方程组边界爆破问题, 利用文献[5-6]的方法得出单个方程存在唯一正解, 进而根据上下解方法得出该问题解的存在性.

1 单个方程解的存在性

为了证明方程组解的存在性, 先证明如下单个方程解的存在性:

$$\begin{cases} \Delta u = d(x)^{-\gamma} u^p + h(x), x \in \Omega, \\ u = +\infty, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

式中, $d(x)$ 表示内部一点 $x \in \Omega$ 到边界 $\partial\Omega$ 的距离. 因为 Ω 是 C^2 区域, 所以 $d(x)$ 在边界 $\partial\Omega$ 附近上是 C^2 函数.

引理 1 假设 $p > 1, 0 < \gamma < 2$, 存在一个足够小的常数 $\mu > 0$, 使得如果 $\sup_{\Omega} d(x)^{2-\beta} h(x) \leq \mu$, 其中 $0 < \beta < 1$, 那么问题(2)有一个正解 $U_{p,\gamma}$.

证明 令 $\Omega_k = \{x \in \Omega : d(x) > 1/k\}$, 考虑 Ω_k 上边界爆破问题:

$$\begin{cases} \Delta u = d(x)^{-\gamma} u^p + h(x), x \in \Omega_k, \\ u = +\infty, x \in \partial\Omega_k. \end{cases} \quad (3)$$

收稿日期: 2019-07-16.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journallg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11471174); 浙江省自然科学基金(LY20A010010, LY20A010011).

第一作者: 王志敏(1994-), 男, 安徽滁州人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 偏微分方程. E-mail: 1459947773@qq.com

*通信作者: 马飞遥(1979-), 男, 湖南衡阳人, 博士/副教授, 主要研究方向: 偏微分方程. E-mail: mafeyao@nbu.edu.cn

上式中 $h(x)=0$ 时存在一个正解 U . 选择 $\eta > 0$ 使得在 Ω 内 $U \geq \eta$. 假设 w 是负的函数且满足

$$\begin{cases} \Delta w = h^+(x), & x \in \Omega, \\ w = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

式中, $h^+ = \max(h, 0)$, 则 $|w| < \eta$. 令 $\underline{u} = U + w$, 则 $\Delta \underline{u} \geq d(x)^{-\gamma} u^p + h(x)$, 所以 $\underline{u}$ 是(3)的一个下解.

由于 $\underline{u}$ 在 $\partial\Omega_k$ 上有界, 通过比较原理可知 $u_k \geq \underline{u}$, 其中 u_k 是(3)的解, 此时 $h(x)$ 在 Ω_k 上有界且充分小(根据文献[5]中证明解的存在性的方法可以得出存在一致的充分小的 M 使得正解 u_k 存在). 于是在 Ω 内 $u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k \geq \underline{u} \geq \eta$, 由经典的方法可证 u 是问题(2)的一个正解, 即 $U_{p,\gamma} = u$.

引理 2 假设 $p > 1$, $0 < \gamma < 2$, $h(x)$ 满足:

(i) $h(x) \in C(\Omega)$ 且 $\liminf_{\Omega} d(x)^{\alpha+2} h(x) > -\infty$, 其中 $\alpha = (2-\gamma)/(p-1)$;

(ii) $d^{2-\beta} h^+(x) \leq C$, 其中 C 是一个任意常数, $0 < \beta < \min(1, 2-\gamma)$, $h^+ = \max(h, 0)$.

则存在一个常数 $K > 1$ 使得问题(2)的最大解 $\bar{u}$ 在区域 $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x) < \delta\}$ 内满足 $\bar{u} \leq Ku$, 其中 u 是问题(2)的任意解, δ 依赖于 u .

证明 假设 $\delta > 0$ 且足够小, 有常数 $M > 1$ 且在 Ω_δ 内有 $h(x) \geq -Md(x)^{-\alpha-2}$.

令 $0 < \theta < \delta$, $\Omega_{\theta,\theta} = \{x \in \Omega : \theta < d(x) < \delta\}$. 下面证明 $\bar{v} = A(d(x)-\theta)^{-\alpha} + B$ 是问题(2)在 $\Omega_{\theta,\theta}$ 内的上解, 其中 $A, B > 0$ 且 B 不依赖于 θ .

选择足够大的 A , 在 $\Omega_{\theta,\theta}$ 内有 $\alpha(\alpha+1)A - \alpha A \cdot (d-\theta)\Delta d \leq A^p - M$, 则在 $\Omega_{\theta,\theta}$ 内有 $\Delta \bar{v} \leq d(x)^{-\gamma} \cdot \bar{v}^p + h(x)$, 选取 $B > 0$ 使得在边界 $\partial\Omega_{\theta,\theta}$ 上有 $\bar{v} \geq \bar{u}$, 利用比较原理, 在 $\Omega_{\theta,\theta}$ 内有 $\bar{v} \geq \bar{u}$, 令 $\theta \rightarrow 0$, 得到在 Ω_δ 内有 $\bar{u} \leq Ad(x)^{-\alpha}$.

在 $\Omega^N = \{x \in \Omega : u(x) > N\}$ 内令 $v = u^{-m}$, $m = \beta/\alpha$, 其中 $N = \max\{\min u(x), 1\}$. 则

$$-\Delta v + \frac{m+1}{m} \frac{|\nabla v|^2}{v} = m(d(x)^{-\gamma} v^{\frac{m-p+1}{m}} + v^{\frac{m+1}{m}} h),$$

即, $-\Delta v \leq mDd^{-\alpha(p-1-m)} + Eh^+ \leq \tilde{D}d^{-2+m\alpha}$, 其中 $D, E, \tilde{D}$ 是常数.

令 ϕ 是问题 $-\Delta \phi = Cd(x)^{-2+m\alpha}$, $\phi|_{\partial\Omega^N} = 0$ 的唯一解^[12]. 根据极大值原理有 $v \leq \phi \leq Cd(x)^{m\alpha}$, 即在 Ω^N 内有 $u(x) \geq \tilde{D}d(x)^{-\alpha}$.

最后, 利用 $\bar{u}$ 的上下界证得结论.

通过引理 2 的证明过程可知:

推论 1 问题(2)的解 u 满足 $\tilde{D}d(x)^{-\alpha} \leq u \leq Ad(x)^{-\alpha}$, 其中 $\alpha = (2-\gamma)/(p-1)$.

2 方程组解的存在性

若在 Ω 内有 $\Delta u \geq u^p v^q + h_1(x)$, $\Delta v \leq u^r v^s + h_2(x)$ 成立, 则称 $(\underline{u}, \underline{v})$ 是问题(1)的一个下解. 若在 Ω 内有 $\Delta \bar{u} \leq \bar{u}^p \bar{v}^q + h_1(x)$, $\Delta \bar{v} \geq \bar{u}^r \bar{v}^s + h_2(x)$ 成立, 则称 $(\bar{u}, \bar{v})$ 是问题(1)的一个上解.

下面利用上下解的方法证明问题(1)解的存在性. 先说明以下问题解的存在情况, 假设 $u = f(x)$, $v = g(x)$, 其中 f, g 在边界 $\partial\Omega$ 上是连续的正函数,

$$\begin{cases} \Delta u = u^p v^q + h_1(x), & x \in \Omega, \\ \Delta v = u^r v^s + h_2(x), & x \in \Omega, \\ u = f(x), & x \in \partial\Omega, \\ v = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

根据文献[1]中的标准方法, 可证得.

引理 3 假设 $(\underline{u}, \underline{v})$, $(\bar{u}, \bar{v})$ 分别是问题(4)的下解和上解, 且在边界 $\partial\Omega$ 上有 $\underline{u} \leq f(x) \leq \bar{u}$, $\underline{v} \geq g(x) \geq \bar{v}$, 在 Ω 内有 $\underline{u} \leq \bar{u}$, $\underline{v} \geq \bar{v}$. 则问题(4)至少有一个解 (u, v) , 且在 Ω 内有 $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$, $\underline{v} \geq v \geq \bar{v}$, 在边界 $\partial\Omega$ 上有 $u = f(x)$, $v = g(x)$.

引理 4 假设 $(\underline{u}, \underline{v})$, $(\bar{u}, \bar{v})$ 分别是问题(1)的下解和上解, 且在 Ω 内有 $\underline{u} \leq \bar{u}$, $\underline{v} \geq \bar{v}$. 则问题(1)至少有一个解 (u, v) 使得在 Ω 内有 $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$, $\underline{v} \geq v \geq \bar{v}$.

证明 令 $\delta > 0$, 在集合 $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x) > \delta\}$ 内考虑下面这个边界 $u = \underline{u}$, $v = \underline{v}$ 的问题:

$$\begin{cases} \Delta u = u^p v^q + h_1(x), & x \in \Omega, \\ \Delta v = u^r v^s + h_2(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (5)$$

利用引理 3, 在 Ω_δ 内存在一个解 (u_δ, v_δ) 使得 $\underline{u} \leq u_\delta \leq \bar{u}$, $\underline{v} \geq v_\delta \geq \bar{v}$, 则 u_δ, v_δ 有界. 故存在一个序列 $\delta_n \rightarrow 0$ 使得 $u_{\delta_n} \rightarrow u$, $v_{\delta_n} \rightarrow v$, 且 $u, v \in C_{\text{loc}}^2(\Omega)$. 则在 Ω 内 (u, v) 是问题(1)的解, 且 $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$, $\underline{v} \geq v \geq \bar{v}$.

定理 1 假设 $(p-1)(s-1) > qr$ 且 $r < p-1$, $q < s-1$, 存在一个足够小的常数 $\mu > 0$, 使得如果 $\sup_{\Omega} d(x)^{2-\beta} h_1(x) \leq \mu$, $\sup_{\Omega} d(x)^{2-\beta} h_2(x) \leq \mu$, 其中 $0 < \beta < 1$, 那么问题(1)存在一个正解.

证明 令 $(\underline{u}, \underline{v}) = (\varepsilon U_{p,\gamma}, \varepsilon^{-\delta} U_{s,\sigma})$, 其中 $U_{p,\gamma}, U_{s,\sigma}$ 在引理 1 中给出, $\varepsilon > 0$ 且足够小, 选择 γ, σ ,

$\varepsilon > 0$, 下面证明 $(\underline{u}, \underline{v})$ 是问题(1)的一个下解, 为此, 需要

$$1 \geq \varepsilon^{p-\delta q-1} d(x)^\gamma U_{s,\sigma}^q + d(x)^\gamma U_{p,\gamma}^{-p} (\varepsilon^{-1} - 1) h_1(x), \quad (6)$$

$$1 \leq \varepsilon^{r-\delta s+\delta} d(x)^\sigma U_{p,\gamma}^r + d(x)^\sigma U_{s,\sigma}^{-s} (\varepsilon^\delta - 1) h_2(x). \quad (7)$$

若选择 $\gamma, \sigma < 2$, 使得

$$\frac{\gamma}{q} = \frac{2-\sigma}{s-1}, \quad \frac{\sigma}{r} = \frac{2-\gamma}{p-1},$$

根据引理 1, 当 ε 充分小, 且固定 $\delta \in (r/(s-1), (p-1)/q)$ 使得 $p-\delta q-1 > 0$, $r-\delta s+\delta < 0$ 成立, 由推论 1 可知 $d(x)^\gamma U_{s,\sigma}^q$ 和 $d(x)^\sigma U_{p,\gamma}^r$ 有界, 则不等式(6), (7)成立, 得到问题(1)的一个下解 $(\underline{u}, \underline{v})$.

类似地, 令 $(\bar{u}, \bar{v}) = (MU_{p,\gamma}, M^{-\delta}U_{s,\sigma})$. 下面证明 $(\bar{u}, \bar{v})$ 是问题(1)的一个上解, 为此, 需要

$$1 \leq M^{p-\delta q-1} d(x)^\gamma U_{s,\sigma}^q + d(x)^\gamma U_{p,\gamma}^{-p} (M^{-1} - 1) h_1(x), \quad (8)$$

$$1 \geq M^{r-\delta s+\delta} d(x)^\sigma U_{p,\gamma}^r + d(x)^\sigma U_{s,\sigma}^{-s} (M^\delta - 1) h_2(x), \quad (9)$$

根据引理 1, 当 M 充分大, 且固定 $\delta \in (r/(s-1), (p-1)/q)$ 使得 $p-\delta q-1 > 0$, $r-\delta s+\delta < 0$ 成立, 由推论 1 可知 $d(x)^\gamma U_{s,\sigma}^q$ 和 $d(x)^\sigma U_{p,\gamma}^r$ 有界, 则不等式(8), (9)成立, 由此得到问题(1)的一个上解 $(\bar{u}, \bar{v})$, 且 $\underline{u} \leq \bar{u}$, $\underline{v} \geq \bar{v}$.

根据引理 3、4 可以得出问题(1)存在一个正解.

参考文献:

- [1] Pao C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations[M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] 黄水波, 田巧玉, 田双亮. 半线性椭圆方程(组)边界爆

破解的研究[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2016.

- [3] Keller J B. On solutions of $\Delta u = f(u)$ [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1957, 10(4):503-510.
- [4] Zhang Z. A boundary blow-up elliptic problem with an inhomogeneous term[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 68(11):3428-3438.
- [5] García-Melián J. Large solutions for an elliptic equation with a nonhomogeneous term[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 434(1):872-881.
- [6] Chuaqui M, Cortázar C, Elgueta M, et al. Uniqueness and boundary behaviour of large solutions to elliptic problems with singular weights[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2004, 3(4):653-662.
- [7] García-Melián J, de Lis J S, Letelier-Albornoz R. The solvability of an elliptic system under a singular boundary condition[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 2006, 136(3):509-546.
- [8] García-Melián J. A remark on uniqueness of large solutions for elliptic systems of competitive type[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 331(1):608-616.
- [9] Mu C, Huang S, Tian Q, et al. Large solutions for an elliptic system of competitive type: Existence, uniqueness and asymptotic behavior[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 71(10):4544-4552.
- [10] García-Melián J. Large solutions for an elliptic system of quasilinear equations[J]. Journal of Differential Equations, 2008, 245(12):3735-3752.
- [11] García-Melián J, Rossi J D. Boundary blow-up solutions to elliptic systems of competitive type[J]. Journal of Differential Equations, 2004, 206(1):156-181.
- [12] Osserman R. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$ [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1957, 7(4):1641-1647.

Boundary blow-up solutions for elliptic systems with nonhomogeneous term

WANG Zhimin, MA Feiyao*

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Using the method of sub and super solutions and the comparison principle, we study the boundary blow-up problem for an elliptic system with non-homogeneous terms. Firstly, the existence of boundary blow-up solutions for a single equation with singular weights and nonhomogeneous term is derived. Further on, the existence of solutions for the system under the condition of boundary blow-up is proven.

Key words: elliptic equations; boundary blow-up solutions; existence; non-homogeneous term

(责任编辑 韩超)