

浅水波方程的一类改进的格子 Boltzmann 模型

陈文文¹, 张文欢^{1,2*}, 汪一航^{1,2}, 朱俏俐¹

(1. 宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211;

2. 宁波市非线性海洋与大气灾害系统协同创新中心, 浙江 宁波 315211)

摘要: 提出了一种改进的格子 Boltzmann 模型来模拟浅水流动. 新模型通过在演化方程中添加修正项, 一个可调参数被引入到黏性系数与无量纲松弛时间的关系中, 从而使得无量纲松弛时间的值在黏性系数固定时是可调的. 为了验证模型的精确性与稳定性, 对圆柱绕流、流量驱动无外力浅水流进行了模拟. 数值结果表明, 相较于以往模型, 新提出模型在提高精度的同时, 计算效率和稳定性也得到了改善.

关键词: 格子 Boltzmann 方法; 浅水波方程; 无量纲松弛时间; 稳定性; 边界条件

中图分类号: TV131.2

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 01-0072-08

近几十年来, 格子 Boltzmann 方法(LBM)由于计算简单、并行性好、易于处理复杂不规则的边界及能简单方便地考虑源项等优势, 已经发展成为求解浅水波方程(SWEs)的一种新方法. Salmon^[1]最先成功将 LBM 应用于模拟风力驱动的海洋环流. 冯士德等^[2]将旋转流中存在的哥氏力效应引入到 SWEs 的格子 Boltzmann(LB)模型的研究中, 并在理想边界条件下模拟了北半球的大气环流. Zhou^[3]则较系统地阐述了 SWEs 的 LBM 理论, 并对一些经典浅水波问题进行了验证. Thömmes 等^[4]采用 LBM 对直布罗陀海峡中的潮流进行了模拟. Klar 等^[5]开展了在复杂几何地形中通过 LB 模型对污染物扩散的潮流问题的实际研究. 接着, Liu 等^[6]成功将 LBM 应用于白洋淀的风力驱动水流模拟. 以上研究表明, LBM 具有良好模拟各种流体动力学情况下浅水流动的能力.

近年来, 为了进一步提高 LBM 模拟浅水流的精确性和稳定性, 不少学者也进行了改进. Zhou^[7]采取了一种新颖方式将床层结合到格子 Boltzmann 方程(LBE)中, 消除了以往模型中底面坡度涉及到一阶导数的差分计算问题. Li 等^[8]提出了一种改进的浅水波 LB 模型, 其基本思想是将二次深度项从

平衡态分布函数(EDF)中去除, 以避免 EDF 中二次深度项系数与 LBE 源项中的床斜率项系数之间的匹配要求. Peng 等^[9]分别使用具有单个松弛时间和多个松弛时间(MRT)碰撞项的 LBM 以求解 SWEs, 并将力矩项的加权中心方案与河床坡度项中的水深结合, 以改进模型来模拟具有不连续床的浅水流. Peng 等^[10]指出具有单个松弛时间的 LBE 不太稳定, 并提出了 SWEs 的九速方格(D2Q9)上的具有 2 个松弛时间(TRT)的 LBM 以期能改进模型的稳定性.

与标准单松弛(LBGK)模型相比, TRT 模型与 MRT 模型虽然在数值稳定性上有较大的优势^[10-11], 但由于不止一个松弛时间, 在模拟计算中更加复杂. LBGK 模型的稳定性很大程度上取决于无量纲松弛时间, 而无量纲松弛时间又与流体黏度或扩散系数有关. 如果无量纲松弛时间的值太大或太小(接近 0.5), LBGK 模型将很不稳定, 进而会因为数值不稳定而无法完成计算, 这极大地限制了模型在复杂流体流动研究中的应用. 为了克服 LBGK 模型在无量纲松弛时间方面存在的不足, 学者们进行了许多改进. Xiang 等^[12]在研究对流扩散方程的 LBGK 模型时, 将参数引入二阶矩条件中进行

收稿日期: 2019-06-21.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journalg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 宁波市自然科学基金(2016A610075).

第一作者: 陈文文(1994-), 女, 安徽六安人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 格子 Boltzmann 建模. E-mail: 2514805223@qq.com

*通信作者: 张文欢(1986-), 男, 湖北黄冈人, 博士/讲师, 主要研究方向: 格子 Boltzmann 建模. E-mail: zhangwenhuan@nbu.edu.cn

修正, 使得无量纲松弛时间的值在调整参数后不接近 0.5. 尽管使用该方法可以提高 LBGK 模型稳定性, 但改进效果并不显著. Inamuro^[13]提出了一种具有传热的不可压缩流体流动的晶格动力学方案(LKS). 在此方案中, 通过在平衡态分布函数中添加一个与应力张量(或热通量)有关的离散量, 无量纲松弛时间的值被固定为 1.0. 然而, Yang 等^[14]指出 LKS 不满足质量守恒定律, 并针对求解不可压 Navier-Stokes 方程的 LBGK 模型提出了一种修正方案. 该方案通过在演化方程中加入修正项作为外力项或源项, 引入一个使松弛时间可调的参数, 无量纲松弛时间的选取更自由, 因此模型的稳定性得到提高.

本文基于 Yang 的改进模型思想, 提出针对二维浅水波方程的一种改进的 LBGK 模型来模拟浅水流动. 通过 Chapman-Enskog 多尺度分析, 所提出的改进模型可准确地恢复至二维浅水波方程. 新模型通过在源项中添加修正项, 在流体黏性系数与松弛时间的关系中引入一个可调参数, 此参数使得无量纲松弛时间的值可以保持在一个适当范围内, 从而提高了模型的稳定性.

1 浅水波方程(SWEs)

二维(2D)深度平均浅水波方程可用下式表示:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu_j)}{\partial x_j} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(hu_i)}{\partial t} + \frac{\partial(hu_i u_j)}{\partial x_j} = -g \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{h^2}{2} \right) + \nu \frac{\partial^2(hu_i)}{\partial x_j \partial x_j} + F_i, \quad (2)$$

式中, h 为水深; u_i, u_j 分为 i 和 j 方向的深度平均速度分量($i=x$ 或 $y, j=x$ 或 y), 在下文中, u_x, u_y 分别被记为水平速度 u 和垂直速度 v ; x_j 为笛卡尔坐标; t 为时间; g 为重力加速度; ν 为黏性系数; F_i ($i=x$ 或 y) 为外力项. 若忽略科氏(Coriolis)力, F_i 可定义为 $F_i = -gh\partial Z_b/\partial x_i - \tau_{bi}/\rho$, 其中, Z_b 为基准面上的河床高程; τ_{bi} 为床剪切应力; $\tau_{bi} = \rho C_b u_i \sqrt{u_j u_j}$; 摩擦系数 $C_b = gn_b^2/h^{1/3}$; n_b 为 Manning 糙率系数.

2 求解 SWEs 的改进 LB 模型的建立

针对求解 2D 浅水波方程的 D2Q9-LBGK 模型

做出改进. 其中, 改进的演化方程如下:

$$f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} [f_\alpha(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] + \Delta t S_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

式中, $f_\alpha(\mathbf{x}, t)$ 为 t 时刻位于 $\mathbf{x}$ 处沿离散速度方向 $\mathbf{c}_\alpha$ 运动的粒子分布数; τ 为无量纲松弛时间; $f_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)$ 为局部平衡态分布函数, 其表达式如下:

$$f_\alpha^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} h - \frac{\omega_\alpha h}{c^2} \left(\frac{15}{8} gh + \frac{3}{2} \mathbf{u}^2 \right), & \alpha = 0, \\ \frac{\omega_\alpha h}{c^2} \left[\frac{3}{2} gh + 3\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2c^2} \cdot \right. \\ \left. (\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2} \mathbf{u}^2 \right], & \alpha = 1 \sim 8, \end{cases} \quad (4)$$

式中, $c = \Delta x / \Delta t$ 为粒子速度; Δx 与 Δt 分别为离散的空间步长和时间步长; ω_α 为权系数, 取值为 $\omega_0 = 4/9$, $\omega_{1-4} = 1/9$, $\omega_{5-8} = 1/36$; $\mathbf{u}^2 = u^2 + v^2$ 为速度分量的平方和.

源项 $S_\alpha(\mathbf{x}, t)$ 表达式为:

$$S_\alpha(\mathbf{x}, t) = \omega_\alpha \frac{A[\nabla(h\mathbf{u}) + (\nabla(h\mathbf{u}))^T] : (3\mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha - c^2 \mathbf{I})}{2\tau c^2} + (1 - 1/2\tau) G_\alpha(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

式中, 等式右边的第一项为修正项; A 为可调参数; $G_\alpha(\mathbf{x}, t)$ 为外力分布函数, 定义如下:

$$G_\alpha(\mathbf{x}, t) = \omega_\alpha \left(\frac{3\mathbf{c}_\alpha \cdot \mathbf{F}}{c^2} + \frac{3(\mathbf{F}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{F}) : (3\mathbf{c}_\alpha \mathbf{c}_\alpha - c^2 \mathbf{I})}{2c^4} \right). \quad (6)$$

计算流体的水深 h 和宏观速度 $\mathbf{u}$ 得:

$$h = \sum_\alpha f_\alpha, \quad (7)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{h} \left(\sum_\alpha \mathbf{c}_\alpha f_\alpha + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F} \right). \quad (8)$$

在 D2Q9 模型中, 离散速度定义如下:

$$\mathbf{c}_\alpha = \begin{cases} (0, 0)c, & \alpha = 0, \\ (\cos((\alpha - 1)\pi/2), \sin((\alpha - 1)\pi/2))c, & \alpha = 1 \sim 4, \\ \sqrt{2}(\cos((\alpha - 5)\pi/2 + \pi/4), \sin((\alpha - 5)\pi/2 + \pi/4))c, & \alpha = 5 \sim 8. \end{cases} \quad (9)$$

由式(4)~(6), 我们可得出 $f_\alpha^{\text{eq}}, f_\alpha, S_\alpha$ 满足以下矩条件:

$$\sum_\alpha f_\alpha^{\text{eq}} = \sum_\alpha f_\alpha = h,$$

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} f_{\alpha}^{\text{eq}} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} f_{\alpha} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{F} = h\mathbf{u},$$

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} c_{\alpha} f_{\alpha}^{\text{eq}} = \frac{1}{2} gh^2 \mathbf{I} + h\mathbf{u}\mathbf{u}, \quad (10)$$

$$\sum_{\alpha} S_{\alpha} = 0, \sum_{\alpha} c_{\alpha} S_{\alpha} = (1 - \frac{1}{2\tau}) \mathbf{F},$$

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} c_{\alpha} S_{\alpha} = \frac{c^2 A}{3\tau} [(\nabla(h\mathbf{u})) + (\nabla(h\mathbf{u}))^T] +$$

$$(1 - \frac{1}{2\tau})(\mathbf{F}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{F}). \quad (11)$$

通过 Chapman-Enskog 多尺度分析^[3,14], 该改进模型从演化方程(3)正确恢复至二维浅水波方程. 其中, 黏性系数定义为:

$$\nu = (2\tau - 2A - 1)c^2 \Delta t / 6, \quad (12)$$

与标准的黏性 $\nu = (2\tau - 1)c^2 \Delta t / 6$ 相比, 式(12)中引入了一个可调参数 A . 因此, 当黏度为定值时, 通过调节 A 的值, 无量纲松弛时间 τ 的值可保持在一个适当的范围内.

另外, 需指出在本文提出的改进模型中, 包含于修正项 $S_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ 中的应变率张量 $S = \nabla(h\mathbf{u}) + (\nabla(h\mathbf{u}))^T$ 可局部地计算^[14].

$$S = \nabla(h\mathbf{u}) + (\nabla(h\mathbf{u}))^T = \frac{3}{\Delta t c^2 (A - \tau)}.$$

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} c_{\alpha} (f_{\alpha} - f_{\alpha}^{\text{eq}}) + \frac{3(\mathbf{F}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{F})}{2c^2 (A - \tau)}. \quad (13)$$

由式(13)可知, S 仅通过局部的粒子分布函数 $f_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$, 平衡态分布函数 $f_{\alpha}^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)$ 及宏观量的计算便可得出.

3 流入和流出的边界条件

就浅水流的格子 Boltzmann 方法而言, 若已知速度和水位, 则可通过质量与动量平衡方程以及非平衡态函数反弹格式^[15]计算出入口和出口边界处的未知分布函数. 但从式(8)可知, 本文提出的模型中, 流体宏观速度 $\mathbf{u}$ 的计算包含了外力 $\mathbf{F}$, 这与以往计算方式不同, 因此现有的进、出口边界条件处理方案不再适用. 于是, 一种适合流体宏观速度 $\mathbf{u}$ 计算包含外力的边界处理方法被提出, 以解决恒定入口流量和出口水深固定的浅水流问题.

3.1 考虑外力影响的进、出口边界条件

如图 1 所示, 沿着入口边界节点处的分布函数 f_1, f_5 和 f_8 及出口边界节点处的分布函数 f_3, f_6 和

f_7 不能用流场内部的信息计算得出, 因此是未知的, 需要选择合适边界处理方案来确定它们.

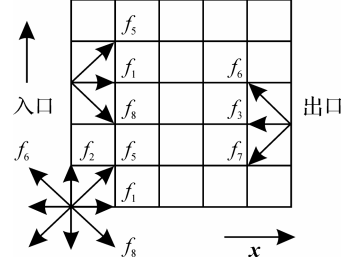


图 1 进、出口的网格边界示意图

在入口边界由式(7)和(8), 可得以下 3 个方程:

$$f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7 + f_8 = h, \quad (14)$$

$$c(f_1 + f_5 + f_8) - c(f_3 + f_6 + f_7) =$$

$$hu - \frac{\Delta t}{2} F_x = h(u - \frac{\Delta t}{2h} F_x), \quad (15)$$

$$c(f_2 + f_5 + f_6) - c(f_4 + f_7 + f_8) =$$

$$hv - \frac{\Delta t}{2} F_y = h(v - \frac{\Delta t}{2h} F_y). \quad (16)$$

假设在边界垂直方向上, 入口速度垂直分量 $v = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, 且反弹格式对分布函数的非平衡态部分成立, 即 $f_1 - f_1^{\text{eq}} = f_3 - f_3^{\text{eq}}$. 将 $(u - (\Delta t / (2h))F_x)$ 看作瞬时的流动速度的水平分量 u , 代入 $f_1 = f_3 + (f_1^{\text{eq}} - f_3^{\text{eq}})$ 中, 可得:

$$f_1 = f_3 + \frac{2hu}{3c} - \frac{\Delta t F_x}{3c}, \quad (17)$$

f_1 已知, 联合式(15)与(16), f_5, f_8 可被表示为:

$$f_5 = f_7 + \frac{f_4 - f_2}{2} + \frac{hu}{6c} - \frac{\Delta t (F_x + 3F_y)}{12c}, \quad (18)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{f_2 - f_4}{2} + \frac{hu}{6c} + \frac{\Delta t (3F_y - F_x)}{12c}. \quad (19)$$

类似的过程可确定出口边界的分布函数 f_3, f_6 和 f_7 .

3.2 入口边界恒定流量

在模拟流动时, 通常设定入口边界条件为恒定流量, 入口处的速度和水深未知, 因此上述方案不再适用. Liu^[16]提出了一种方法来处理这种入口边界, 即在水流方向上将恒定流量添加到动量方程中. 新方案以质量和动量守恒为基础, 同时包括以下 2 个步骤.

第一步: 在入口处使用宏观变量的零梯度, $h(1, j) = h(2, j), u(1, j) = u(2, j), v(1, j) = v(2, j)$. 其中, 第 1 个坐标表示列, 第 2 个坐标表示任意行.

第二步: hu 为单位宽度的流量, 故 $(Q_m - Q_c)/b$ 项应加到式(15)中, 其中, b 为通道的宽度; Q_m 为入口的恒定流量, Q_c 是由 u, v 和 h 在第一步中计算所得流量.

因此, 式(15)相应变为:

$$c(f_1 + f_5 + f_8) - c(f_3 + f_6 + f_7) = h \left(u + \frac{Q_m - Q_c}{bh} - \frac{\Delta t}{2h} F_x \right). \quad (20)$$

假设垂直于入口边界的分布函数的非平衡态部分反弹格式仍然成立. 将 $(u + (Q_m - Q_c)/(bh) - F_x \Delta t / (2h))$ 看作瞬时的流动速度的水平分量 u , 代入 $f_1 = f_3 + (f_1^{eq} - f_3^{eq})$ 中可得:

$$f_1 = f_3 + \frac{2hu}{3c} + \frac{2(Q_m - Q_c)}{3cb} - \frac{\Delta t F_x}{3c}. \quad (21)$$

联合式(20), (21)和(16), f_5, f_8 可解得为:

$$f_5 = f_7 + \frac{f_4 - f_2}{2} + \frac{hu}{6c} + \frac{hv}{2c} + \frac{Q_m - Q_c}{6cb} - \frac{\Delta t(F_x + 3F_y)}{12c}, \quad (22)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{f_2 - f_4}{2} + \frac{hu}{6c} - \frac{hv}{2c} + \frac{Q_m - Q_c}{6cb} + \frac{\Delta t(3F_y - F_x)}{12c}. \quad (23)$$

入口处的拐角点需要特殊处理. 以入口底部的拐角点为例, 分2种情形来讨论.

第1种: 若流道上、下壁为无滑移边界, 则有 $u = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 当每一个迁移步完成后, f_3, f_4, f_7 已知, 而 f_1, f_2, f_5, f_6 和 f_8 未知. 假设反弹格式对垂直于入口边界分布函数的非平衡态部分仍然成立, 即:

$$f_1 = f_3 + (f_1^{eq} - f_3^{eq}) = f_3 - \Delta t F_x / (3c), \quad (24)$$

$$f_2 = f_4 + (f_2^{eq} - f_4^{eq}) = f_4 - \Delta t F_y / (3c). \quad (25)$$

将上述 f_1, f_2 代入式(15)和(16)中, 并联合式(14), 可解得 f_5, f_6, f_8 为:

$$f_5 = f_7 - \frac{\Delta t F_x}{12c} - \frac{\Delta t F_y}{12c}, \quad (26)$$

$$f_6 = [h - (f_0 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_7) - \Delta t F_x / (6c) - \Delta t F_y / (3c)] / 2, \quad (27)$$

$$f_8 = [h - (f_0 + 2f_3 + 2f_4 + 2f_7) - \Delta t F_x / (3c) - \Delta t F_y / (6c)] / 2. \quad (28)$$

第2种: 若流道上、下壁为滑移边界. 当每个迁移步完成后, 入口底部的拐角点处 f_3, f_4, f_7 已知, 而 f_1, f_2, f_5, f_6 和 f_8 未知. 对于该节点, 由于是滑移

边界, 则有 $f_2 = f_4, f_6 = f_7$. 此时 f_1, f_5, f_8 还是未知, 将此点看作为流体点, 根据式(21), (22)和(23)便可得出余下的未知分布函数.

类似的过程可解出入口的顶部拐角点和出口的顶、底部拐角点的未知分布函数.

3.3 出口边界固定水深

在出口处, 通常设定固定的水深 h^* . 在这种情况下, 涉及2个步骤.

第1步: 在出口处使用宏观变量的零梯度, $h(L_x, j) = h(L_x - 1, j), u(L_x, j) = u(L_x - 1, j), v(L_x, j) = v(L_x - 1, j)$. 其中, 第1个坐标表示列, 第2个坐标表示任意行.

第2步: 将 h^* 代入式(14)和(15)中, 得:

$$u = c[f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_1 + f_5 + f_8)] / h^* + F_x \Delta t / (2h^*) - c, \quad (29)$$

出口处垂直速度 v 依据 y 方向上的动量守恒, 得:

$$v = v(L_x, j)h(L_x, j) / h^*. \quad (30)$$

由简单代数计算可得出出口边界未知分布函数 f_3, f_6, f_7 为:

$$f_3 = f_1 - \frac{2h^*u}{3c} + \frac{\Delta t F_x}{3c}, \quad (31)$$

$$f_6 = f_8 + \frac{f_4 - f_2}{2} - \frac{h^*u}{6c} + \frac{h^*v}{2c} - \frac{\Delta t(3F_y - F_x)}{12c}, \quad (32)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{f_2 - f_4}{2} - \frac{h^*u}{6c} - \frac{h^*v}{2c} + \frac{\Delta t(F_x + 3F_y)}{12c}. \quad (33)$$

4 数值模拟

分别对圆柱绕流和流量驱动无外力浅水流进行数值模拟, 并将计算结果与其他数值方法结果对比, 以验证本文所提出模型的精确性和稳定性.

4.1 圆柱绕流

为验证模型的精确性, 分别使用 Li 等^[8]和本文提出的模型对圆柱绕流进行模拟, 各种参数的设置与 Zhou^[3]的模拟保持一致. 模拟的流道长4 m, 宽2 m, 位于流道中心的是半径为0.11 m的圆柱体, 左端为入口, 流入的流量及出口的水位皆为定值.

在数值模拟中, 采用 600×300 网格, 设置 $\Delta x = \Delta y = 0.00667 \text{ m}$, $\Delta t = 0.00145 \text{ s}$, 进口流量 $Q_m = 0.248 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, 下游出口水位高度 $h^* = 0.185 \text{ m}$, 沿水流方向河床坡度项 $\partial z_b / \partial x = -6.25 \times 10^{-4}$, Manning 糙率系数 $n_b = 0.012$. 流体的黏度为定值, 3种模型

的模拟皆取定 $\tau = 1.982$, 即在本文模型中取 $A = 0$. 流道上、下边界均采用滑移边界, 圆柱体的边界采用无滑移边界, 即分别使用弹性碰撞格式与反弹格式来确定边界上未知的分布函数^[3]. 同时, 进出、口边界采用入口边界恒定流量与出口边界固定水深的边界处理方法.

定义全局相对误差 R 为:

$$R = \sum \frac{|u(x, t+100) - u(x, t)|}{|u(x, t+100)|}, \quad (34)$$

式中, $u(x, t)$ 为当前时刻格点 x 处的水平速度, $u(x, t+100)$ 为迭代 100 步后的速度值, 求和的范围为所有流体点. 当流场达到 $R \leq 1 \times 10^{-7}$ 时终止计算.

图 2 显示了本文模型在模拟达到稳定后圆柱体附近的流动特性, 这与 Zhou^[3]绘制的图 3 有较好的一致性. 图 4 为 Zhou 和本文模型模拟得到的沿流道中心线上的水位结果与实验数据的对比. 其中, 本文所用实测数据是使用图像数据化软件 (GetData Graph Digitizer) 从参考文献[17]的图中获取. 由图 5 可知, 在圆柱后, 本文模型的模拟结果与 Zhou 模型的模拟结果很接近, 且都与实测结果吻合很好; 但在圆柱前, 本文模型的模拟结果与实测的结果更为接近. 为了定量比较 2 种模型模拟的精度不同, 定义水位的相对误差为:

$$E_h = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_1^N [(h_c - h_c^+) / h_c^+]^2}, \quad (35)$$

式中, N 为实测值的数量; h_c 和 h_c^+ 分别为水位的模拟值与实测值. 经计算, 得出本文模型模拟水位的相对误差为 1.16%, Zhou 模型模拟水位的相对误差为 1.65%, 说明本文模型在模拟圆柱绕流时的精度比 Zhou 模型更高. 值得注意的是, Li 模型在进口流量 $Q_{in} = 0.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时计算收敛, 但当进口流量增大为 $Q_{in} = 0.248 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时计算发散, 这说明 Li 模型的稳定性没有本文提出的模型和 Zhou 模型的好. 另外, 由于实测数据是在进口流量 $Q_{in} = 0.248 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 的工况下采集, 而 Li 模型无法模拟得出此工况下的流速和水深数据, 因此文中没有展现有关 Li 模型的图表数据对比.

4.2 流量驱动的无外力浅水流

为了研究黏性系数 ν 中引入可调参数 A 对模型的作用, 在不考虑外力 F (即 $F = 0$) 的情况下模

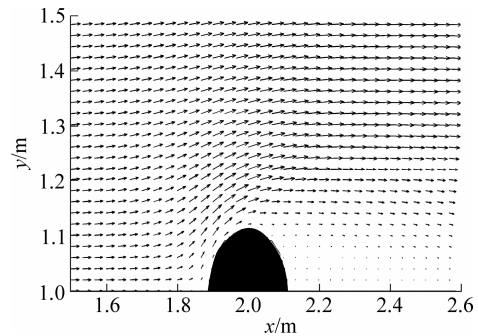


图 2 本文的速度矢量图

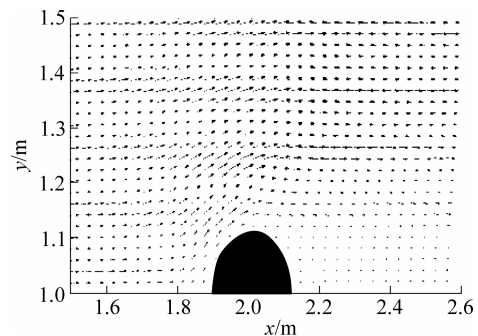


图 3 参考文献[3]中的速度矢量图

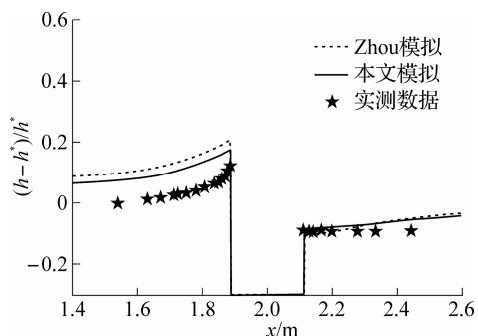


图 4 渠道中心线上水深的对比

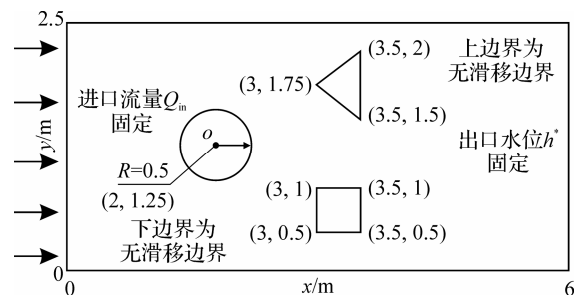


图 5 流道示意图

拟了流量驱动的浅水流. 模拟的流道情况如图 5 所示, 其中, 流道长 6 m, 宽 2.5 m, 矩形区域(等宽、平底)内的圆柱、方柱、三棱柱用来比拟建筑物, 左端为入口, 入口流量及出口水位皆为定值.

分别用 Zhou 和 Li 以及本文提出模型模拟上述

浅水流, 基于图形处理单元的并行计算开发环境 CUDA(Compute Unified Device Architecture)编制相应的 LB 程序. 模拟选取网格大小为 601×251 , 设置入口流量为 $Q_{in} = 0.02 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, 下游出口水位高度为 $h^* = 0.05 \text{ m}$, $\Delta x = \Delta y = 0.01 \text{ m}$, $\Delta t = 0.005 \text{ s}$, $\tau = 0.9$ (在本文模型中取 $A = 0$), 上、下边界均采用无滑移边界. 其中, 就 Zhou 模型模拟而言, 其 LB 程序编制的正确性已在文献[18]中验证. 为了与 Zhou 的结果进行定量比较, 选取 3 种模型计算迭代 50 万步得到的横截面 $x = 2.0 \text{ m}$ 和 $x = 3.25 \text{ m}$ 上的水平速度进行对比. 图 6 结果显示, 3 种模型模拟结果的变化趋势基本相同, 且差异不明显, 由此表明, 编制的另 2 种模型的 LB 程序的正确性.

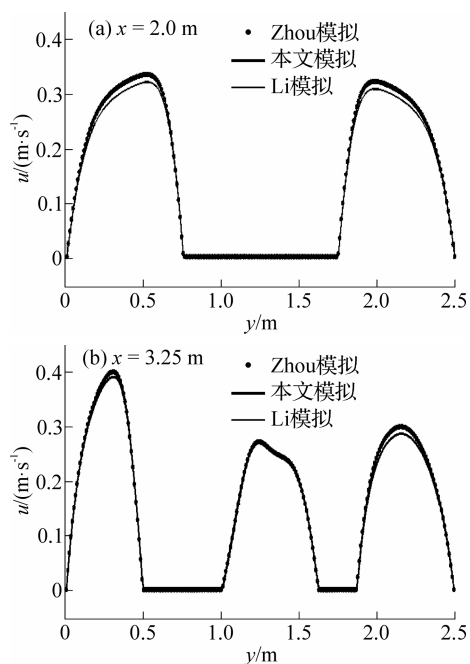


图 6 3 种模型模拟在不同横截面上的水平速度

为了比较模型的计算效率, 在 3 种模型的模拟中均设定入口流量为 $Q_{in} = 0.02 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ 和黏性系数 ν 为定值. 当流场的全局相对误差 $R \leq 1 \times 10^{-8}$ 时, 终止计算, 其中对 R 的定义同式(34). 表 1 给出了每组模拟所用的计算步数和时间. 由表 1 数据可见, 当本文模型设置参数 $A = 0$ 时, 3 种模型模拟所需计算步数基本相同, 皆为 50 万步左右. 在所需计算时间方面, Zhou 模型为 174.74 s; 本文为 202.16 s; Li 为 305.53 s. Li 模型的计算时间最长, 可能是将二次深度项从 EDF 中移出作为外力项的处理破坏了模型的并行性. 本文模型计算时间比 Zhou 模型

计算时间长是由于引入参数 A 导致计算量增大. 显然, 当调节参数 A 后, 本文模型在每组参数下模拟所用的计算步数与时间都大幅度减少. 例如, 当取 $A = 0.01$ 时, 计算步数和时间分别仅为 28.1 万步与 106.18 s, 相较于 $A = 0$ 时的模拟用时减少了约 1/2, 小于 Zhou 的模拟用时的 2/3, 约为 Li 的模拟用时的 1/3. 由此表明, 调节参数 A 可以显著增快本文模型的收敛速度, 使得模型的计算效率显著提高且达到 3 种模型中的最佳.

表 1 入口流量为 $Q_{in} = 0.02 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, 3 种模型皆达到 $R = 1 \times 10^{-8}$ 时所用的计算步数和时间

模型	参数 A	τ	计算步数/步	计算时间/s
Zhou	—	0.90	5.00×10^5	174.74
Li	—	0.90	4.95×10^5	305.53
本文	0.00	0.90	5.00×10^5	202.16
	0.01	0.91	2.81×10^5	106.18
	0.02	0.92	2.95×10^5	111.45
	0.04	0.94	3.00×10^5	113.66
	0.08	0.98	3.09×10^5	116.35

为进一步检验本文模型的稳定性, 在上述算例的模拟中增大入口流量至 $Q_{in} = 0.024 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, 得 Zhou 和 Li 以及本文所提模型计算结果的全局相对误差(表 2). 表 2 中某些组计算迭代 80 万步所得误差较 50 万步的稍大, 100 万步的误差又较 80 万步的稍小. 可见误差并不随着计算步数的增大而单调递减, 但总体维持在同个量级上, 这可能是由于入口流量增大导致此时流动处于非稳态流动. 由表 2 可知, Zhou 模型在入口流量为 $Q_{in} = 0.024 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 计算过程中不会发散, 能够得出相应的模拟结果. 而 Li 模型在这种工况的计算过程中会直接发散, 即无法完成模拟. 在本文模型的模拟中, 设置 $A = 0$ 所得的误差与 Zhou 模型基本相近, 继续调节参数 A 进行模拟, 也能够得出相应模拟结果. 由此再次说明, Zhou 模型和本文模型的稳定性较 Li 模型更好. 然后, 对比了 Zhou 模型和本文模型分别迭代 50 万步、80 万步和 100 万步模拟得到的水平速度, 发现 2 种模型的计算步数从 50 万步增加到 80 万步乃至 100 万步, 所得结果都不发生改变. 因此为便于比较, 这里选取 Zhou 模型和本文模型迭代 50 万步模拟得到的横截面 $x = 3.25 \text{ m}$ 上的水平速度作对比. 由图 7 可见, 不同参数 A 下模拟得

到的水平速度与 Zhou 模型的结果相互吻合,表明本文所提出模型模拟的数值结果是准确的,并且适当地调节参数 A 也不会影响最终模拟结果的准确性.

表 2 入口流量为 $Q_{in}=0.024 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$, 计算步数分别为 50 万、80 万和 100 万步时的全局相对误差

模型	参数 A	τ	R		
			50 万步	80 万步	100 万步
Zhou	—	0.90	7.63×10^{-3}	7.71×10^{-3}	7.59×10^{-3}
Li	—	0.90	—	—	—
本文	0.00	0.90	7.06×10^{-3}	7.71×10^{-3}	7.59×10^{-3}
	0.02	0.92	6.23×10^{-3}	5.93×10^{-3}	6.03×10^{-3}
	0.04	0.94	4.05×10^{-3}	4.07×10^{-3}	3.98×10^{-3}

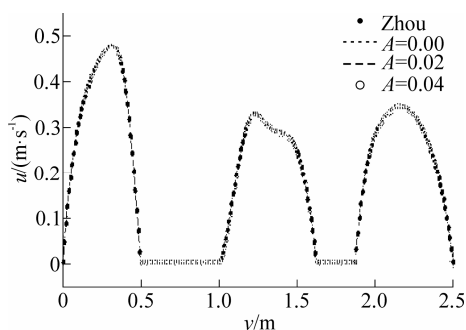


图 7 Zhou 和本文模型中 3 种取值下模拟得到的水平速度

接下来, 将入口流量增大到 $Q_{in}=0.0261 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$, 可得 3 种模型计算结果的全局相对误差(表 3). 由表 3 可知, Zhou 模型和 Li 模型在计算过程中均会发散, 无法完成模拟. 虽然在本文模型的模拟中, 设置 $A=0$ 时计算也会发散, 但调节参数 A 后的计算不再发散, 能够得出此工况下的模拟结果. 综上所述, 本文模型在适当地调节参数 A 后能够模拟更大流量的浅水流, 即本文所提出模型的稳定性

表 3 入口流量为 $Q_{in}=0.0261 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$, 计算步数分别为 50 万、80 万和 100 万步时的全局相对误差

模型	参数 A	τ	R		
			50 万步	80 万步	100 万步
Zhou	—	0.90	—	—	—
Li	—	0.90	—	—	—
本文	0.00	0.90	—	—	—
	0.04	0.94	1.45×10^{-2}	1.45×10^{-2}	1.33×10^{-2}
	0.08	0.98	1.18×10^{-2}	1.15×10^{-2}	1.19×10^{-2}
	0.12	1.02	9.10×10^{-3}	9.46×10^{-3}	9.02×10^{-3}
	0.16	1.06	5.62×10^{-3}	5.73×10^{-3}	5.74×10^{-3}

较 Zhou 模型和 Li 模型稍好一些.

5 结论

Yang 等^[14]针对求解不可压 Navier-Stokes 方程的 LBGK 模型提出了一种修正方案, 本文借鉴其改进模型的思路提出了一种求解二维浅水波方程的 LBGK 模型改进方案, 将一个修正项添加在标准 LBGK 模型的演化方程中, 作为源项的一部分, 使得在恢复宏观方程后流体黏性系数与无量纲松弛时间的关系中被引入了一个可调参数. 通过调节该参数的值, 无量纲松弛时间的值可保持在一个使计算稳定的范围内, 从而提高了模型的稳定性, 研究得出以下结论:

(1)在提出的改正模型正确恢复至二维浅水波方程的过程中, 应变率张量的计算采用了一个高效的局部计算格式. 梯度的计算仅通过局部信息便可得出, 避免了差分运算, 使得改进的 LBGK 模型保持了天然的并行性, 且易于处理具有复杂边界的物理问题.

(2)在质量和动量守恒的基础上, 依据非平衡态函数反弹法则, 提出了适用于本文所提出模型的边界处理方法, 解决了因流体宏观速度 u 的计算包含外力 F 而导致已有进、出口边界处理方案不适用的问题.

(3)数值模拟结果表明, 与 Zhou 模型和 Li 模型相比, 本文提出的模型在提高精度的同时能够调节参数 A , 使得模型的计算效率显著提高、稳定性也略有增强, 因此有效地提升了 LBM 模拟复杂浅水流的能力.

参考文献:

- [1] Salmon R. The lattice Boltzmann method as a basis for ocean circulation modeling[J]. Journal of Marine Research, 1999, 57(3):503-535.
- [2] 冯士德, 赵颖, 茑原道久, 等. 旋转流场中的格子波耳兹曼模型[J]. 地球物理学报, 2002, 45(2):170-175.
- [3] Zhou J G. Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows[M]. Berlin: Springer, 2004:7-18.
- [4] Thömmes G, Seaid M, Banda M K. Lattice Boltzmann methods for shallow water flow applications[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2007, 55(7):673-692.
- [5] Klar A, Seaid M, Thömmes G. Lattice Boltzmann

- simulation of depth-averaged models in flow hydraulics [J]. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2008, 22(7):507-522.
- [6] Liu H F, Li M, Zhao Y W. Application of the lattice Boltzmann method in shallow water lake[J]. *Advanced Materials Research*, 2011, 356:2333-2337.
- [7] Zhou J G. Enhancement of the LABSWE for shallow water flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, 230(2):394-401.
- [8] Li S T, Huang P, Li J M. A modified lattice Boltzmann model for shallow water flows over complex topography [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2015, 77(8):441-458.
- [9] Peng Y, Zhou J G, Zhang J M, et al. Lattice Boltzmann modeling of shallow water flows over discontinuous beds[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2014, 75(8):608-619.
- [10] Peng Y, Zhang J M, Zhou J G. Lattice Boltzmann model using two relaxation times for shallow-water equations[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2016, 142(2):5017-5025.
- [11] Lallemand P, Luo L S. Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance and stability[J]. *Physical Review E*, 2000, 61(6):6546-6562.
- [12] Xiang X, Wang Z, Shi B. Modified lattice Boltzmann scheme for nonlinear convection diffusion equations[J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2012, 17(6):2415-2425.
- [13] Inamuro T. A lattice kinetic scheme for incompressible viscous flows with heat transfer[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2002, 360(1792):477-484.
- [14] Yang X G, Shi B C, Chai Z H. Generalized modification in the lattice Bhatnagar-Gross-Krook model for incompressible Navier-Stokes equations and convection-diffusion equations[J]. *Physical Review E*, 2014, 90(1): 13309-13326.
- [15] Zou Q, He X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model[J]. *Physics of Fluids*, 1997, 9(6):1591-1598.
- [16] Liu H F. Lattice Boltzmann simulations for complex shallow water flows[J]. *Clinical Infectious Diseases*, 2009, 28(3):560-571.
- [17] Yulistiyanto B, Zech Y, Graf W H. Flow around a cylinder: Shallow-water modeling with diffusion-dispersion[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1998, 124(4):419-429.
- [18] Mei Q Y, Zhang W H, Wang Y H, et al. Lattice Boltzmann study on seawall-break flows under the influence of breach and buildings[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2017, 68(4):525-535.

A modified lattice Boltzmann model for shallow water flows

CHEN Wenwen¹, ZHANG Wenhuan^{1,2*}, WANG Yihang^{1,2}, ZHU Qiaoli¹

(1.School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2.Ningbo Collaborative Innovation Center of Nonlinear Hazard System of Ocean and Atmosphere, Ningbo 315211, China)

Abstract: A modified lattice Boltzmann model is proposed to simulate shallow water flows. The new model introduces an adjustable parameter in the relationship between the viscosity coefficient and the dimensionless relaxation time by adding a correction term to the evolution equation, so that the dimensionless relaxation time is adjustable when the viscosity coefficient is fixed. In order to verify the accuracy and stability of the model, the flow around the cylinder and the discharge-driven shallow water flow without external force is simulated. The numerical results show that compared with the previous approaches, the proposed model is improved not only in accuracy, but also in computational efficiency and stability.

Key words: lattice Boltzmann model; shallow water equations; dimensionless relaxation time; stability; boundary conditions

(责任编辑 章践立)