

基于投资衍生产品的缴费型养老金的最优投资策略

黄 婵¹, 王 伟^{1*}, 温利民²

(1. 宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211; 2. 江西师范大学 数学与信息科学学院, 江西 南昌 330022)

摘要: 研究确定缴费(DC)型养老金可投资衍生产品时的最优投资问题. 假设在金融市场中有 3 种可投资产品, 包含 1 种无风险资产、1 种股票和 1 种金融衍生产品. 假定养老金管理者以最大化养老金的期末财富效用为目标, 运用动态随机规划原理, 分别得到了指数效用和幂效用 2 种情况下 DC 型养老金最优投资策略的显式解, 给出了风险敞口的数值结果, 并分析了模型参数对风险敞口的影响.

关键词: 缴费型养老金; 动态规划原理; 最优投资; 衍生产品

中图分类号: O211.9

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 01-0080-08

由于养老金数额巨大, 养老金投资回报的好坏在很大程度上决定着投保人退休时的养老金水平, 所以关于养老金的资产配置是政府和养老金管理机构非常重视的问题. 1952 年, Markowitz^[1]发表的“投资组合选择”文章, 标志了现代投资组合理论的创立. 在缴费(Defined Contribution, DC)型养老金最优投资方面, Gao^[2]以最大化终值财富的幂效用和指数效用为目标, 利用随机控制理论得到 DC 型养老金的最优投资策略的解析解. 由于养老金属于长期投资, Zhang 等^[3]进一步考虑了通货膨胀风险下养老金的最优投资问题. 在国内, 殷俊等^[4]考虑了随机利率和通货膨胀风险下养老金的投资组合, 并给出常相对风险规避型(Coefficient of Relative Risk Aversion, CRRA)效用函数下的最优投资策略. 考虑到长寿风险对养老金的重要影响, 王力平等^[5]假定了死亡率服从指数分布, 以最大化养老金的期末财富效用为目标, 得到最优投资策略, 并发现死亡率直接影响发放阶段的最优投资比例. 何林等^[6]给出了积累期最优投资策略的显式解, 并分析了积累期缴费率、目标替代率、人口老龄化程度等对养老金投资中风险资产配置比例的影响. 岳公正等^[7]以股票、基金、国债和 1 年期银行存款为研究对象, 分析了这 4 种投资工具的风

险、收益及其投资组合, 发现与股市投资相比, 基金投资更有利于分散投资风险. 此外, 有实证研究表明^[8], 风险资产价格的波动并不是一个常数. 因此, 王远野等^[9]进一步考虑了波动率风险, 并假定 DC 型养老金具有保费返还条款, 研究了均值方差准则下的最优投资问题.

目前, 有关考虑 DC 型养老金可以用来投资金融市场中衍生产品的研究报道较为鲜见. Zeng 等^[10]假定养老金管理者不但可以投资金融市场中的股票, 还可以投资衍生产品, 得到了 CRRA 效用下 DC 型养老金的稳健最优投资策略. 与文献[10]相比, 本研究考虑了指数效用和幂效用情况下 DC 型养老金的最优投资问题, 设置幂效用的风险厌恶系数为 0 与 1 之间的常数. 利用随机控制理论和分离变量法得到了指数效用和幂效用情况下的最优投资策略的显式解, 并通过数值结果对最优投资策略进行了敏感性分析.

1 金融市场模型

考虑一个带滤流的完备的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$, 而且满足一般条件, 其中 $T > 0$ 是给定的常数. (Z_{1t}, Z_{2t}) 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ 上的二维布朗运动. 假定金融市场是

收稿日期: 2018-11-07.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 教育部人文社科基金 (15YJA910004, 18YJC910012); 浙江省自然科学基金 (LY17G010003).

第一作者: 黄婵 (1994-), 女, 山西大同人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: hotop2015@163.com

*通信作者: 王伟 (1982-), 男, 安徽安庆人, 博士/副教授, 主要研究方向: 金融数学. E-mail: wangwei2@nbu.edu.cn

无套利和无摩擦的, 并且投资 3 种可交易资产, 分别是无风险债券 B 、股票 S 和以该股票为基础资产的衍生产品 D 。

无风险债券在时刻 t 的价格 $B(t)$ 满足:

$$dB(t) = rB(t)dt, B(0) = 1, \quad (1)$$

其中: $r > 0$, 表示无风险利率。

股票的动态价格过程满足如下随机微分方程:

$$dS(t) = S(t)(r + \lambda_1 Y(t))dt + S(t)\sqrt{Y(t)}dZ_{1t}, S(0) = \bar{s} > 0, \quad (2)$$

其中: $\lambda_1 > 0$ 为常数, 是股票价格风险 Z_{1t} 的市场风险价格; $Y(t)$ 为股票价格的方差, 且满足如下的 Heston 随机波动率模型:

$$dY(t) = k(a - Y(t))dt + \delta\sqrt{Y(t)}(\rho dZ_{1t} + \sqrt{1 - \rho^2}dZ_{2t}), Y(0) = \bar{y} > 0, \quad (3)$$

其中: $a > 0, k > 0, \delta > 0, \rho \in (-1, 1)$ 均为常数; a 是波动率长期均值水平; k 是关于波动率的均值回复速率; δ 是波动率 Y 的波动率。

为了获得衍生产品的价格, 本文采用文献[11]的方法, 定义一个价格核函数 $\{p(t)\}_{t \in [0, T]}$ 为金融市场的所有风险因素定价:

$$dp(t) = -p(t)(rdt + \lambda_1\sqrt{Y(t)}dZ_{1t} + \lambda_2\sqrt{Y(t)}dZ_{2t}), \quad (4)$$

其中: λ_2 为波动率风险 Z_{2t} 的市场风险价格。

通过无套利价格可以得到衍生产品价格 $D(t)$ 满足以下随机微分方程^[10]:

$$dD(t) = rD(t)dt + (D_S S(t) + D_Y \rho \delta)(\lambda_1 Y(t)dt + \sqrt{Y(t)}dZ_{1t}) + D_Y \sqrt{1 - \rho^2} \delta (\lambda_2 Y(t)dt + \sqrt{Y(t)}dZ_{2t}), \quad (5)$$

其中: D_S 和 D_Y 是 $D(t)$ 关于股票价格 $S(t)$ 和方差 $Y(t)$ 的一阶导数。

2 财富动态过程

为了研究方便, 且不失一般性, 本文采用文献[2]中假设, 即假定只有 1 个投资者, 连续缴费, 且缴费率是常数 c 。在时刻 t , 假定投资在 S 上的金额占总财富的比例是 π_{1t} , 投资在 D 上的金额占总财富的比例为 π_{2t} , 投资在 B 上的比例为 $1 - \pi_{1t} - \pi_{2t}$ 。令 $X^\pi(t)$ 表示在 t 时刻养老金的财富, 则 $X^\pi(t)$ 满足以下方程:

$$dX^\pi(t) = \frac{\pi_{1t} X^\pi(t)}{S(t)} dS(t) + \frac{\pi_{2t} X^\pi(t)}{D(t)} dD(t) + \frac{(1 - \pi_{1t} - \pi_{2t}) X^\pi(t)}{B(t)} dB(t) + cdt, \quad (6)$$

结合式(1)(2)和(5)可得:

$$dX^\pi(t) = rX^\pi(t)dt + \theta_{1t} X^\pi(t)(\lambda_1 Y(t)dt + \sqrt{Y(t)}dZ_{1t}) + \theta_{2t} X^\pi(t)(\lambda_2 Y(t)dt + \sqrt{Y(t)}dZ_{2t}) + cdt, \quad (7)$$

其中:

$$\theta_{1t} = \pi_{1t} + \frac{D_S S(t) + \rho \delta D_Y}{D(t)} \pi_{2t}, \quad (8)$$

$$\theta_{2t} = \frac{\delta \sqrt{1 - \rho^2} D_Y}{D(t)} \pi_{2t}. \quad (9)$$

定义 1 (可允许策略) 风险敞口 $\theta_t = (\theta_{1t}, \theta_{2t})$ 是可允许的, 如果 θ_{1t}, θ_{2t} 是 $\mathcal{F}_t$ 可预料的, 且有:

$$E\left[\int_0^T (\theta_{1t}^2 + \theta_{2t}^2) Y(t) dt\right] < \infty,$$

并在给定 $X^\pi(0) = x_0$ 下使得方程(7)有唯一强解, 其中 $E[\cdot]$ 表示期望。

令 Λ 表示所有可允许风险敞口策略 $\theta_t = (\theta_{1t}, \theta_{2t})$ 的集合, 投资者的目标是寻找最优策略, 使得终端财富的期望效用达到最大, 即

$$\sup_{\theta \in \Lambda} E[U(X^\pi(T))],$$

这里 $U(x)$ 是效用函数, $E[\cdot]$ 表示在概率测度 P 下的期望。

定义上述问题的值函数为:

$$V(t, x, y) = \sup_{\theta \in \Lambda} E[U(X^\pi(T)) | X^\pi(t) = x, Y(t) = y], \quad (10)$$

所有的 $(x, y) \in R_+ \times R$, 满足边界条件 $V(T, x, y) = U(x)$ 。如果 $V(t, x, y) \in C^{1,2,2}$, 运用随机动态规划原理可得 HJB 方程为:

$$\sup_{\theta \in \Lambda} \mathcal{H}(t, x, y) = 0, \quad (11)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, x, y) = & V_t + V_x(r + \theta_{1t}\lambda_1 y + \theta_{2t}\lambda_2 y)x + V_x c + \\ & \frac{1}{2} V_{xx}(\theta_{1t}^2 + \theta_{2t}^2)x^2 y + V_y k(a - y) + \\ & \frac{1}{2} V_{yy} \delta^2 y + V_{xy}(\theta_{1t} \rho + \theta_{2t} \sqrt{1 - \rho^2}) \delta xy, \end{aligned}$$

这里 V_t, V_x, V_y 分别是 $V(t, x, y)$ 关于变量 t, x, y 的一阶导数, V_{xx}, V_{yy} 是 $V(t, x, y)$ 关于变量 x, y 的二阶导数, V_{xy} 是 $V(t, x, y)$ 关于变量 x, y 的混合导数.

此外, 若 $V_{xx} < 0$, 则可以利用一阶最优性条件获得最优解. 对 $\mathcal{H}(t, x, y)$ 关于 θ_1, θ_2 分别求一阶导数, 并令其等于 0, 再求解可得:

$$\theta_{1t}^* = -\frac{V_x \lambda_1 + V_{xy} \rho \delta}{V_{xx} x}, \quad (12)$$

$$\theta_{2t}^* = -\frac{V_x \lambda_2 + V_{xy} \sqrt{1-\rho^2} \delta}{V_{xx} x}. \quad (13)$$

把方程(12)和(13)代入方程(11), 则 $V(t, x, y)$ 满足方程:

$$\begin{aligned} V_t + V_y k(a-y) + V_x (rx+c) + \frac{1}{2} V_{yy} \delta^2 y - \\ \frac{(V_x \lambda_1 + V_{xy} \rho \delta)^2 y}{2V_{xx}} - \\ \frac{(V_x \lambda_2 + V_{xy} \sqrt{1-\rho^2} \delta)^2 y}{2V_{xx}} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

另外, 通过方程(12)和(13)可以发现, 如果想获得最优风险敞口 $\theta_{1t}^*, \theta_{2t}^*$, 必须要得到 $V(t, x, y)$ 的解析解. 但方程(14)的终端条件 $V(T, x, y) = U(x)$ 中 $U(x)$ 是一般函数, 不能获得 $V(t, x, y)$ 的具体表达式. 因此, 本文只考虑在一些特殊效用函数下的最优风险敞口的表达式.

3 最优投资策略

3.1 指数效用函数

假设 DC 型养老金管理者的效用函数是指数效用函数, 其中风险厌恶系数 $\alpha > 0$ 为常数, 且效用函数满足:

$$U(x) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}.$$

对于养老基金管理者, 其目标是使得终端财富的期望效用达到最大, 即

$$V(t, x, y) = \sup_{\theta \in \Lambda} E \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha X^\pi(T)} \mid X^\pi(t) = x, Y(t) = y \right], \quad (15)$$

且满足边界条件:

$$V(T, x, y) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}.$$

定理 1 在指数效用函数下, 最优风险敞口为:

$$\theta_{1t}^* = \frac{\lambda_1 + \rho \delta N(t)}{\alpha x} e^{-r(T-t)}, \quad (16)$$

$$\theta_{2t}^* = \frac{\lambda_2 + \sqrt{1-\rho^2} \delta N(t)}{\alpha x} e^{-r(T-t)}. \quad (17)$$

最优值函数为:

$$V(t, x, y) = -\exp \{ -\alpha e^{r(T-t)} x + M(t) + N(t)y \}, \quad (18)$$

其中: $M(t)$ 和 $N(t)$ 分别由方程(28)和(29)给出.

最优投资策略为:

$$\begin{aligned} \pi_{1t}^* = \frac{\lambda_1 + \rho \delta N(t)}{\alpha x} e^{-r(T-t)} - \\ \frac{(D_S S(t) + \rho \delta D_Y)(\lambda_2 + \sqrt{1-\rho^2} \delta N(t))}{\alpha x \delta \sqrt{1-\rho^2} D_Y} e^{-r(T-t)}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\pi_{2t}^* = \frac{(\lambda_2 + \sqrt{1-\rho^2} \delta N(t)) D(t)}{\alpha x \delta \sqrt{1-\rho^2} D_Y} e^{-r(T-t)}. \quad (20)$$

证明 首先猜测方程(14)解的形式为:

$$V(t, x, y) = -\exp \{ -\alpha e^{r(T-t)} x + M(t) + N(t)y \},$$

其中: 终端条件 $M(T) = 0, N(T) = 0$. 对 $V(t, x, y)$ 关于变量 t, x, y 分别求一阶导数和二阶导数.

$$V_t = (\alpha r e^{r(T-t)} x + M_t + N_t y) V(t, x, y), \quad (21)$$

$$V_x = -\alpha e^{r(T-t)} V(t, x, y), \quad V_y = N(t) V(t, x, y), \quad (22)$$

$$V_{xx} = \alpha^2 e^{2r(T-t)} V(t, x, y), \quad (23)$$

$$V_{xy} = -\alpha e^{r(T-t)} N(t) V(t, x, y), \quad (24)$$

$$V_{yy} = N^2(t) V(t, x, y), \quad (25)$$

将方程(21)~(25)代入 HJB 方程(14)中, 可得:

$$\begin{aligned} M_t - \alpha c e^{r(T-t)} + N(t) k a + [-k N(t) + N_t - \\ \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - (\lambda_1 \rho + \lambda_2 \sqrt{1-\rho^2}) \delta N(t)] y = 0. \end{aligned}$$

再通过分离变量 y 和其他变量后得到方程:

$$M_t - \alpha c e^{r(T-t)} + k a N(t) = 0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} N_t - N(t) [k a + (\lambda_1 \rho + \lambda_2 \sqrt{1-\rho^2}) \delta] - \\ \frac{1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

因为 $M(T) = 0$ 和 $N(T) = 0$, 通过求解方程(26)和

(27)得到:

$$M(t) = \alpha c(1 - e^{r(T-t)}) + ka \int_t^T N(s) ds, \quad (28)$$

$$N(t) = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{2[ka + (\lambda_1 \rho + \lambda_2 \sqrt{1 - \rho^2})\delta]} [\exp\{[ka + (\lambda_1 \rho + \lambda_2 \sqrt{1 - \rho^2})\delta](T-t)\} - 1]. \quad (29)$$

将 V_x, V_{xy}, V_{xx} 的表达式代入式(12)和(13), 可得最优风险敞口的表达式(16)和(17).

另外, 由 θ 和 π 之间的关系式(8)和(9)可得最优投资策略 π_{1t}^* 和 π_{2t}^* 满足式(19)和(20).

3.2 幂效用函数

假定养老金管理者的效用函数 $U(x)$ 服从幂效用函数, 满足

$$U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, \quad x > 0,$$

其中: $\gamma \in (0, 1)$, 风险厌恶系数为 $1 - \gamma$.

根据效用函数的结构, 猜想方程(14)的解 $V(t, x, y)$ 具有如下形式:

$$V(t, x, y) = \frac{(x + m(t))^\gamma}{\gamma} g(t, y), \quad (30)$$

其中: $m(T) = 0, g(T, y) = 1$. 对 $V(t, x, y)$ 关于变量 t, x, y 求导得:

$$V_t = \left(\frac{\gamma m_t}{x + m(t)} + \frac{g_t}{g(t, y)} \right) V(t, x, y), \quad (31)$$

$$V_x = \frac{\gamma V(t, x, y)}{x + m(t)}, \quad (32)$$

$$V_y = \frac{g_y V(t, x, y)}{g(t, y)}, \quad (33)$$

$$V_{xx} = \frac{\gamma(\gamma - 1)V(t, x, y)}{(x + m(t))^2}, \quad (34)$$

$$V_{xy} = \frac{\gamma g_y V(t, x, y)}{(x + m(t))g(t, y)}, \quad (35)$$

$$V_{yy} = \frac{g_{yy} V(t, x, y)}{g(t, y)}, \quad (36)$$

将式(31)~(36)代入方程(14), 则方程(14)可写为:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma m_t}{x + m(t)} + \frac{g_t}{g(t, y)} + \frac{\gamma(rx + c)}{x + m(t)} + \frac{k(a - y)g_y}{g(t, y)} + \\ & \frac{g_{yy}\delta^2 y}{2g(t, y)} + \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\gamma y}{2(1 - \gamma)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda_1 \rho + \lambda_2 \sqrt{1 - \rho^2})g_y \delta \gamma y}{(1 - \gamma)g(t, y)} + \\ & \frac{g_y^2 \delta^2 \gamma y}{2(1 - \gamma)g^2(t, y)} = 0. \end{aligned}$$

注意

$$\frac{\gamma(rx + c)}{x + m(t)} = r\gamma + \frac{\gamma(c - rm(t))}{x + m(t)},$$

于是有:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma(m_t + c - rm(t))}{x + m(t)} + r\gamma + \frac{g_t}{g(t, y)} + \frac{k(a - y)g_y}{g(t, y)} + \\ & \frac{g_{yy}\delta^2 y}{2g(t, y)} + \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\gamma y}{2(1 - \gamma)} + \\ & \frac{(\lambda_1 \rho + \lambda_2 \sqrt{1 - \rho^2})g_y \delta \gamma y}{(1 - \gamma)g(t, y)} + \\ & \frac{g_y^2 \delta^2 \gamma y}{2(1 - \gamma)g^2(t, y)} = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

则方程(37)满足如下 2 个方程:

$$m_t + c - rm(t) = 0, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & g_t + (r\gamma + \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\gamma y}{2(1 - \gamma)})g(t, y) + g_y(k(a - y) + \\ & \frac{(\lambda_1 \rho + \lambda_2 \sqrt{1 - \rho^2})\delta \gamma y}{1 - \gamma}) + \frac{g_{yy}\delta^2 y}{2} + \\ & \frac{g_y^2 \delta^2 \gamma y}{2(1 - \gamma)g(t, y)} = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

因此, 很容易得到方程(38)的解满足:

$$m(t) = \frac{c}{r}(1 - e^{-r(T-t)}). \quad (40)$$

为了求解方程(39), 令 $g(t, y) = h^\beta(t, y)$, 其中 β 是一个常数, 则方程(39)可写为:

$$\begin{aligned} & \beta h^{\beta-1}(t, y)h_t + (r\gamma + \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\gamma y}{2(1 - \gamma)})h^\beta(t, y) + \\ & \beta h^{\beta-1}(t, y)h_y(k(a - y) + \\ & \frac{(\lambda_1 \rho + \lambda_2 \sqrt{1 - \rho^2})\delta \gamma y}{1 - \gamma}) + \\ & \frac{\beta h^{\beta-1}(t, y)h_{yy}\delta^2 y}{2} + (\frac{\beta(\beta - 1)}{2} + \\ & \frac{\beta^2 \gamma}{2(1 - \gamma)})h^{\beta-2}(t, y)h_y^2 \delta^2 y = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

令 $\beta = 1 - \gamma$, 则方程(41)中的最后一项等于零. 因此方程(41)可变换为:

$$h_t + h_y(ka + \eta y) + \frac{1}{2} h_{yy} \delta^2 y = -\left(\frac{r\gamma}{1-\gamma} + \varpi y\right)h(t, y), \quad (42)$$

其中:

$$\eta := -k + \frac{(\lambda_1 \rho + \lambda_2 \sqrt{1-\rho^2})\delta\gamma}{1-\gamma},$$

$$\varpi := \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\gamma}{2(1-\gamma)^2},$$

并且 $h(T, y) = 1$.

为了求解方程(42), 先定义一个与 P 等价的概率测度 Q :

$$\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp\left\{\int_0^T \frac{\lambda_1 \gamma \sqrt{Y(u)}}{(1-\gamma)} dZ_{1u} + \int_0^T \frac{\lambda_2 \gamma \sqrt{Y(u)}}{(1-\gamma)} dZ_{2u} - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\gamma^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) Y(u)}{(1-\gamma)^2} du\right\},$$

根据 Girsanov 定理, 可得:

$$Z_{1t}^Q = Z_{1t} - \int_0^t \frac{\lambda_1 \gamma \sqrt{Y(u)}}{(1-\gamma)} du,$$

$$Z_{2t}^Q = Z_{2t} - \int_0^t \frac{\lambda_2 \gamma \sqrt{Y(u)}}{(1-\gamma)} du,$$

它们在测度 Q 下是 2 个标准的布朗运动. 因此, 方程(3)可以写为:

$$dY(t) = (ka + \eta Y(t))dt + \delta \sqrt{Y(t)}(\rho dZ_{1t}^Q + \sqrt{1-\rho^2} dZ_{2t}^Q). \quad (43)$$

通过 Feynman-Kac 公式, 方程(42)的解满足:

$$h(t, y) = e^{\frac{r\gamma}{1-\gamma}(T-t)} E_Q[e^{\int_t^T \varpi Y(u) du} | Y(t) = y]. \quad (44)$$

引理 1 方程(44)中 $h(t, y)$ 可以写成仿射形式, 满足:

$$h(t, y) = \exp\left\{\frac{r\gamma}{1-\gamma}(T-t) + A(t) + B(t)y\right\},$$

其中:

$$A(T)=0, B(T)=0, A(t)=ak \int_t^T B(u) du.$$

此外, 令

$$\Delta = \eta^2 - 2\varpi\delta^2,$$

其中:

$$\eta := -k + \frac{(\lambda_1 \rho + \lambda_2 \sqrt{1-\rho^2})\delta\gamma}{1-\gamma},$$

$$\varpi := \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\gamma}{2(1-\gamma)^2}.$$

$B(t)$ 满足:

(1)若 $\Delta > 0$, 则

$$B(t) = \frac{2\varpi(e^{\sqrt{\Delta}(T-t)} - 1)}{(-\eta + \sqrt{\Delta})e^{\sqrt{\Delta}(T-t)} + \eta + \sqrt{\Delta}}; \quad (45)$$

(2)若 $\Delta = 0$, 则

$$B(t) = \frac{2\eta}{2\delta^2 - \eta\delta^2(T-t)} - \frac{\eta}{\delta^2}; \quad (46)$$

(3)若 $\Delta < 0$, 则

$$B(t) = -\frac{\eta}{\delta^2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{\delta^2} \tan(\arctan \frac{\eta}{\sqrt{-\Delta}} + \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}(T-t)). \quad (47)$$

证明 令

$$G(t, y) = \mathbb{E}_Q[e^{\int_t^T \varpi Y(u) du} | Y(t) = y] = \exp(A(t) + B(t)y),$$

对 $e^{\int_0^t \varpi Y(u) du} G(t, y)$ 用伊藤公式得:

$$\begin{aligned} de^{\int_0^t \varpi Y(u) du} G(t, y) &= \varpi y e^{\int_0^t \varpi Y(u) du} G(t, y) dt + \\ &e^{\int_0^t \varpi Y(u) du} (G_t dt + G_y(ka + \eta y) dt + \\ &\frac{1}{2} G_{yy} \delta^2 y dt + G_y \delta \sqrt{y} (\rho dZ_{1t}^Q + \sqrt{1-\rho^2} dZ_{2t}^Q)), \end{aligned} \quad (48)$$

将 $G_t = G(t, y)(A_t + B_t y)$, $G_y = G(t, y)B(t)$, $G_{yy} = G(t, y) \cdot B^2(t)$ 代入方程(48)得:

$$\begin{aligned} de^{\int_0^t \varpi Y(u) du} G(t, y) &= (A_t + akB(t)) \cdot \\ &e^{\int_0^t \varpi Y(u) du} G(t, y) dt + e^{\int_0^t \varpi Y(u) du} (\varpi + B_t + \\ &\eta B(t) + \frac{1}{2} \delta^2 B^2(t)) y G(t, y) dt + \\ &e^{\int_0^t \varpi Y(u) du} G_y \delta \sqrt{y} (\rho dZ_{1t}^Q + \sqrt{1-\rho^2} dZ_{2t}^Q). \end{aligned}$$

因为 $e^{\int_0^t \varpi Y(u) du} G(t, y)$ 是 Q 鞅, 因此有:

$$(A_t + akB(t))G(t, y) + (\varpi + B_t + \eta B(t) + \frac{1}{2}\delta^2 B^2(t))yG(t, y) = 0, \quad (49)$$

则需要满足以下 2 个方程:

$$A_t + akB(t) = 0, \quad (50)$$

$$\varpi + B_t + \eta B(t) + \frac{1}{2}\delta^2 B^2(t) = 0. \quad (51)$$

首先对方程(50)求解, 可得 $A(t) = ak \int_t^T B(u) du$, 接着求解方程(51), 令

$$\varpi + \eta B(t) + \frac{1}{2}\delta^2 B^2(t) = 0, \quad (52)$$

再定义方程(52)的判别式为:

$$\Delta = \mu^2 - 2\varpi\delta^2,$$

若 $\Delta > 0$, 方程(51)可化简为:

$$\frac{1}{2}\delta^2(B(t) - \frac{-\eta + \sqrt{\Delta}}{\delta^2})(B(t) - \frac{-\eta - \sqrt{\Delta}}{\delta^2}) = -B_t,$$

则

$$\frac{\delta^2}{2\sqrt{\Delta}} \int_t^T (\frac{1}{B(u) - (-\eta + \sqrt{\Delta})/\delta^2} - \frac{1}{B(u) - (-\eta - \sqrt{\Delta})/\delta^2}) dB(u) = -\frac{1}{2}\delta^2(T - t). \quad (53)$$

经计算可得方程(53)的解 $B(t)$ 满足方程(45).

若 $\Delta = 0$, 方程(51)可以写成:

$$\frac{1}{2}\delta^2(B(t) + \frac{\eta}{\delta^2})^2 = -B_t, \quad (54)$$

对方程(54)求解, 可得其解 $B(t)$ 满足方程(46).

若 $\Delta < 0$, 方程(51)可变化为:

$$\frac{1}{2}\delta^2((B(t) + \frac{\eta}{\delta^2})^2 + \frac{-\Delta}{\delta^4}) = -B_t, \quad (55)$$

对方程(55)进行求解, 可得 $B(t)$ 满足方程(47).

最后注意 $E_Q[e^{\int_t^T \omega Y_u du} | Y(t) = y] = e^{A(t) + B(t)y}$, 并

结合式(44), 便可得到 $h(t, y) = e^{\frac{r\gamma}{1-\gamma}(T-t) + A(t) + B(t)y}$.

定理 2 最优值函数满足:

$$V(t, x, y) = \frac{(x + m(t))^\gamma}{\gamma} e^{r\gamma(T-t) + (1-\gamma)(A(t) + B(t)y)}, \quad (56)$$

其中: $m(t) = \frac{C}{r}(1 - e^{-r(T-t)})$, $A(t)$ 和 $B(t)$ 可见引理

1, 最优风险敞口为:

$$\theta_{1t}^* = (1 + \frac{m(t)}{x}) \frac{\lambda_1 + \rho\delta(1-\gamma)B(t)}{(1-\gamma)}, \quad (57)$$

$$\theta_{2t}^* = (1 + \frac{m(t)}{x}) \frac{\lambda_2 + \sqrt{1-\rho^2}\delta(1-\gamma)B(t)}{1-\gamma}. \quad (58)$$

最优投资策略 π_{1t}^*, π_{2t}^* 满足:

$$\pi_{1t}^* = (1 + \frac{m(t)}{x}) \left\{ \frac{\lambda_1 + \rho\delta(1-\gamma)B(t)}{1-\gamma} - \frac{[\lambda_2 + \sqrt{1-\rho^2}\delta(1-\gamma)B(t)](D_S S(t) + \rho\delta D_Y)}{(1-\gamma)\delta\sqrt{1-\rho^2}D_Y} \right\}, \quad (59)$$

$$\pi_{2t}^* = (1 + \frac{m(t)}{x}) \frac{[\lambda_2 + \sqrt{1-\rho^2}\delta(1-\gamma)B(t)]D(t)}{(1-\gamma)\delta\sqrt{1-\rho^2}D_Y}. \quad (60)$$

证明 由 $g(t, y) = h(t, y)^\beta$ 和 $\beta = 1 - \gamma$ 有:

$$g(t, y) = e^{r\gamma(T-t) + (1-\gamma)(A(t) + B(t)y)}, \quad (61)$$

再结合式(30)和(61)得到式(56). 再将式(32)(34)和(35)中 V_x, V_{xy}, V_{xx} 的表达式代入式(12)和(13), 即可得到式(57)和(58). 再根据 θ 和 π 之间的关系式(8)和(9), 可以得最优投资策略 π_{1t}^* 和 π_{2t}^* 满足式(59)和(60).

4 数值算例

本文给出一些投资策略的数值结果, 并分析模型参数对最优投资的影响. 为了方便, 仅考虑了 θ_{1t}^* 和 θ_{2t}^* , 而没有给出 π_{1t}^* 和 π_{2t}^* , 因为 π_{1t}^* 和 π_{2t}^* 可以通过式(8)和(9)得到. 如果不作特别说明, 数值分析中一些基本参数满足:

$$r = 0.05, k = 4, a = 0.169,$$

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -6, \delta = 0.15,$$

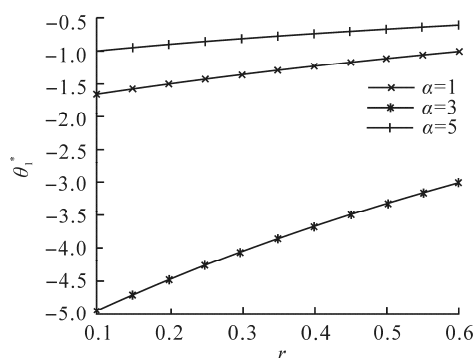
$$\alpha = 5, \gamma = 0.5, \rho = -0.4,$$

$$x = 1, T = 5, t = 0.$$

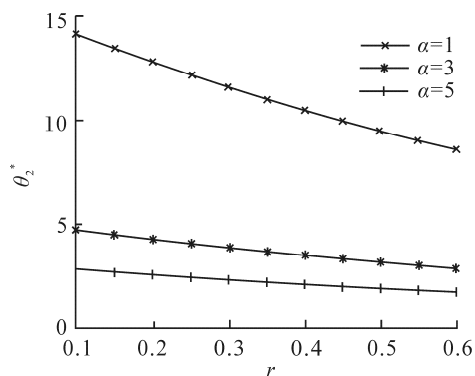
在图 1 和图 2 中分别分析了指数效用和幂效用情况下利率和风险厌恶系数对市场风险敞口 θ_1^* 和波动率风险敞口 θ_2^* 的影响. 观察图 1 和图 2 可以发现, 随着利率 r 的增加, θ_1^* 和 θ_2^* 的绝对值都减少, 尽管由于参数选取的原因, 图 2 的数值变化不是特

别明显. 究其原因是因为利率越大投资者更愿意把资金投入无风险资产上, 从而减少了在风险资产上的投资. 值得注意的是指数效用的风险厌恶系数为 α , 幂效用的风险厌恶系数为 $1-\gamma$. 从图 1 和图 2 还可发现, 随着风险厌恶系数 α 和 $1-\gamma$ 的增加, 投资者对风险的厌恶程度越高, 故风险敞口 θ_1^* 和 θ_2^* 的绝对值随着风险厌恶系数变大而减小.

本文分别考虑了指数效用和幂效用情况下养老金缴费率 c 对风险敞口 (θ_1^*, θ_2^*) 的影响(图 3). 从图 3(a)中可发现, 随着养老金缴费率的增加, 风险敞口 θ_1^* 和 θ_2^* 的值保持不变, 这是由指数效用本身

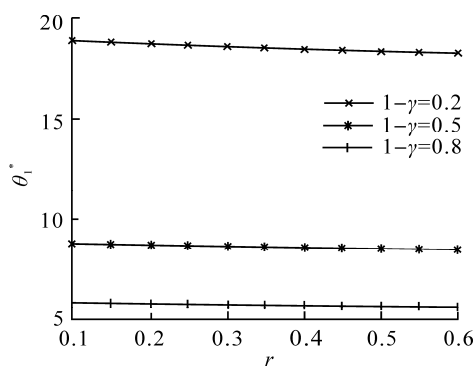


(a) 利率 r , 风险厌恶系数 α , 风险敞口 θ_1^*

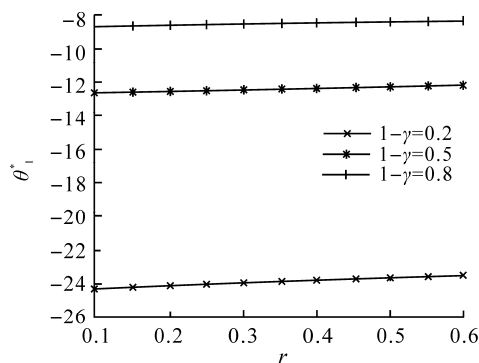


(b) 利率 r , 风险厌恶系数 α , 风险敞口 θ_2^*

图 1 指数效用下利率和风险厌恶系数对风险敞口的影响

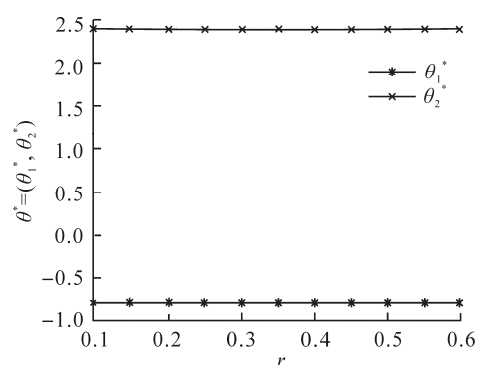


(a) 利率 r , 风险厌恶系数 $1-\gamma$, 风险敞口 θ_1^*

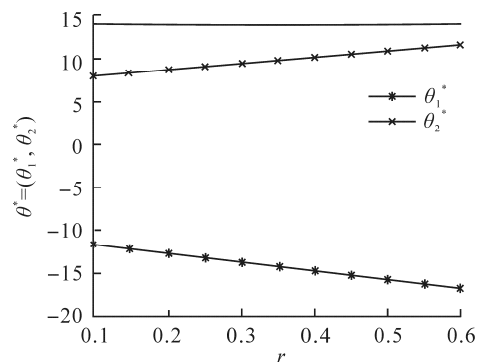


(b) 利率 r , 风险厌恶系数 $1-\gamma$, 风险敞口 θ_1^*

图 2 幂效用下利率和风险厌恶系数对风险敞口的影响



(a) 指数效用



(b) 幂效用

图 3 指数和幂效用下缴费率对风险敞口的影响

的原因造成的. 而从图 3(b)中可发现, 随着养老金缴费率的增加, 风险敞口 θ_1^* 和 θ_2^* 的绝对值增加, 这是因为随着养老金缴费率的增加, 养老金管理者有更多的资金积累, 使得他们愿意承受更大的风险, 获得更高的回报. 因此, 会投资更多的风险资产.

5 结语

本文主要研究了幂效用和指数效用 2 种情形下确定缴费型养老金的最优投资问题, 得到了最

优投资策略和最优风险敞口的显示解. 研究结果表明: 无论是幂效用还是指数效用, 随着市场利率和风险厌恶系数的增加, 市场风险敞口和波动率风险敞口的绝对值都是减少的; 而随着养老金缴费率的增加, 市场风险敞口和波动率风险敞口的绝对值是增加的. 在后续工作中, 我们将进一步研究含通货膨胀风险和衍生产品情形下确定缴费型养老金的最优投资问题. 此外, 本文中假定利率是常数, 后续将进一步研究当利率满足随机利率的情况.

参考文献:

- [1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. The Journal of Finance, 1952, 7(1):77-91.
- [2] Gao J W. Optimal portfolios for DC pension plans under a CEV model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2009, 44(3):479-490.
- [3] Zhang A H, Ewald C O. Optimal investment for a pension fund under inflation risk[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2010, 71(2):353-369.
- [4] 殷俊, 李媛媛. 基于随机利率和通货膨胀的缴费确定型养老金计划最优资产配置策略[J]. 当代经济科学, 2013, 35(2):11-20; 124.
- [5] 王力平, 张元萍. 考虑死亡率的 DC 型养老金资产配置研究的统一框架[J]. 保险研究, 2014(4):121-127.
- [6] 何林, 梁宗霞. DC 型养老金积累期最优资产配置问题研究[J]. 保险研究, 2016(6):102-111.
- [7] 岳公正, 王俊停. 我国社会养老保险基金组合投资风险比较分析[J]. 统计与决策, 2018(8):156-159.
- [8] Heston S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options[J]. The Review of Financial Studies, 1993, 6(2):327-343.
- [9] 王远野, 樊顺厚, 常浩. 通胀风险与波动风险环境下带有保费返还条款的 DC 型养老金计划[J]. 系统科学与数学, 2018, 38(4):423-437.
- [10] Zeng Y, Li D P, Chen Z, et al. Ambiguity aversion and optimal derivative-based pension investment with stochastic income and volatility[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2018, 88:70-103.
- [11] Liu J, Pan J. Dynamic derivative strategies[J]. Journal of Financial Economics, 2003, 69(3):401-430.

Optimal investment strategies for defined contribution pension with a financial derivative

HUANG Chan¹, WANG Wei^{1*}, WEN Limin²

(1.School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China;

2.School of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

Abstract: The optimal investment problem for DC pension with a financial derivative is studied. We assume that there are three assets in a financial market, including a risk-free asset, a stock and a financial derivative. Assuming that the pension manager aims to maximize the expected utility of the terminal wealth, we use the dynamic stochastic programming principle to obtain the closed-form solutions of the optimal strategies of DC pension fund in both the exponential utility and the power utility. The numerical results of risk exposure and the effect of model parameters on risk exposure are analyzed.

Key words: defined contribution fund; dynamic programming principle; optimal investment; derivative

(责任编辑 史小丽)