

低阶 CA-广群及其分类

毛小燕^{1,2}, 特木尔朝鲁^{2*}

(1. 宁波大学科学技术学院 信息工程学院, 浙江 宁波 315300; 2. 上海海事大学 文理学院, 上海 201306)

摘要: 群是描述基于结合律的对称性的基本代数结构. 为了表达更一般的对称性(或变异对称性), 群的概念被以各种方式推广. 循环结合广群(CA-广群)是以非结合环、左弱 Novikov 代数和 CA-AG-广群为背景, 基于循环结合律的代数结构, 对于探讨低阶 CA-广群及其分类进而深入研究 CA-广群具有重要意义. 本文介绍了 CA-广群、中智扩展三元组群(NET-群)等基本概念及其基本性质, 并借助 Matlab 软件设计计算程序得到了全部 3 阶和 4 阶不同构的 CA-广群, 也给出其完全分类.

关键词: 循环结合广群(CA-广群); 中智扩展三元组群(NET-群); CA-NET-广群; 分类

中图分类号: O152.7

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 03-0063-06

在代数系统中, 结合运算往往对应着某种非结合运算, 甚至相互决定, 例如交换群上的加法与减法相互决定, 域上非零元的乘法与除法相互决定, 数域上矩阵代数的加法和乘法对应着李运算. 众所周知, 所谓广群(groupoid)就是在非空集合 X 中引进某种二元运算的一种代数系, 也称群胚^[1].

对于代数运算, 结合律非常重要, 它描述了运算的对称性. 根据结合律, 将群的概念作为描述对称性的基本代数结构来研究. 为了表达更一般的对称性(或变异对称性), 群被以各种方式推广, 例如正则半群^[2]、广义群(generalized group)^[3]、中智三元群^[4]、AG-广群(Abel Grassmann's groupoid)^[5]、循环结合广群(Cyclic Associative groupoid, 简称为 CA-广群)^[6]等.

在非结合环、非结合代数、图像处理和网络等诸多领域, 非结合性具有重要的研究意义. 早在 1954 年, Sholander^[7]就使用了“循环结合律”(Cyclic Associative Law)这一术语. 之后, 循环结合律在多个代数系统中被研究. Kleinfeld^[8]、詹建明等^[9]、Behn 等^[10]、Iqbal 等^[11]、Zhang 等^[6]研究了满足(对偶)循环结合律的环和相关代数系统, 得到了一些比较有用的结果.

本文重点研究 3 阶和 4 阶 CA-广群, 并给出其完全分类.

1 预备知识

定义 1^[1] 设 S 是一个非空集合, “ $\cdot$ ”是 S 中的一个二元运算, 则称 $(S, \cdot)$ 是一个广群.

定义 2^[6] 一个广群 $(S, \cdot)$ 称为循环结合广群, 如果 $\forall a, b, c \in S$, 恒有 $a \cdot (b \cdot c) = c \cdot (a \cdot b)$ (循环结合律).

循环结合广群简称为 CA-广群, 这里的“ $\cdot$ ”经常省略不写. 由 $a(bc)=c(ab)$, $c(ab)=b(ca)$ 有 $a(bc)=b(ca)$, 所以, 循环结合律也经常被写成 $\forall a, b, c \in S$, 恒有 $a(bc)=b(ca)$. 循环结合律的对偶形式如下:

$$\forall a, b, c \in S, \text{ 恒有 } (c \cdot b) \cdot a = (b \cdot a) \cdot c,$$

$$\text{或者 } (c \cdot b) \cdot a = (a \cdot c) \cdot b.$$

需要说明的是, 文献[12]中定义的轮迴广群与定义 2 中的循环结合广群涵义相同. 文献[6]中对循环结合群讨论的更加详细深入, 并且通过多个文献说明了循环结合律的研究渊源及其广泛研究价值, 加之早在 1954 年就有“循环结合律”术语^[7], 因此本文沿用文献[6]中循环结合广群(CA-广群)的说法.

定理 1^[6] (1) 每一个交换半群都是一个 CA-广

收稿日期: 2020-01-29.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.g.nbu.edu.cn/>

基金项目: 浙江省自然科学基金(LY20A010012); 宁波市横向课题(汽车爆胎自救辅助装置报警系统建模、仿真、开发及评估).

第一作者: 毛小燕(1980—), 女, 浙江衢州人, 讲师, 主要研究方向: 代数学、复杂信息决策理论与方法. E-mail: maoxiaoyan@nbu.edu.cn

*通信作者: 特木尔朝鲁(1962—), 男, 蒙古族, 内蒙古通辽人, 教授, 主要研究方向: 力学. E-mail: tmchaolu@shmtu.edu.cn

群 $(S, \cdot)$; (2) 设 $(S, \cdot)$ 是一个 CA-广群. 如果 $(S, \cdot)$ 是可交换的, 那么 $(S, \cdot)$ 一定是交换半群.

定义 3^[13] Abel-Grassmann 广群(以下简称为 AG-广群)指满足条件 $(ab)c=(cb)a$ 的广群.

该名称是由 Stojan Bogdanovic 在法国尼斯的一次学术研讨会上建议的, 首次出现在文献[13]中. 此广群又称为左几乎半群^[14](简称 LA-半群)或左反转广群^[15]或右模广群^[16].

定理 2^[17] 对任意的 AG-广群 $(S, \cdot)$, 中间律成立, 即

$$\forall a, b, c, d \in S, \text{ 恒有 } (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d).$$

定义 4^[4] 设 S 是一个非空集合, “ $\cdot$ ”是 S 中的一个二元运算. 如果

$$\forall a \in S, \exists \text{neut}(a), \text{anti}(a) \in S,$$

使得

$$\text{neut}(a) \cdot a = a \cdot \text{neut}(a) = a, \text{anti}(a) \cdot a = a \cdot \text{anti}(a) = \text{neut}(a),$$

则 $(S, \cdot)$ 称为中智扩展三元组集, $\text{neut}(a)$ 称为元素 a 的中性元, $\text{anti}(a)$ 称为元素 a 的反元, $(a, \text{neut}(a), \text{anti}(a))$ 称为中智扩展三元组.

定义 5^[4] 设 $(S, \cdot)$ 是一个中智扩展三元组集, 如果:

(1) 二元运算“ $\cdot$ ”在 S 中是封闭的, 即 $\forall a, b \in S$, 有 $a \cdot b \in S$;

(2) $(S, \cdot)$ 是结合的, 即 $\forall a, b, c \in S$, 有 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

那么, $(S, \cdot)$ 称为中智扩展三元组群(简称为 NETG).

定义 6^[18] 设 $(S, \cdot)$ 是一个半群, 如果存在 S 上的一元运算: $a \mapsto a^{-1}$, 使得 $(a^{-1})^{-1} = a$, $a \cdot a^{-1} \cdot a = a$, $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a$, 则称 $(S, \cdot)$ 为完全正则的.

定理 3^[19] 设 $(S, \cdot)$ 是一个广群. 那么 $(S, \cdot)$ 是中智扩展三元组群当且仅当它是完全正则半群.

2 三阶 CA-广群

设 $S = \{a, b, c\}$, “ $\cdot$ ”是 S 中的一个二元运算, 那么所有可能的运算表有 $3^9 = 19683$ 种. 图 1 是判断 2 个运算表是否同构的程序, 图 2 则是找出所有非同构运算表的程序.

借助 Matlab 2019a 软件, 经 167.97 s 得到非同构的运算表有 3 330 种.

```
function true=condition_isomor (T1, T2, F)
[m, n]=size (T1); nf=length (F(:, 1)); true=0;
for i=1:nf; f=F(i, :); t=0;
    for x=1:m
        for y=1:n; if T2(f(x), f(y))~f(T1(x, y))~f(T1(x, y))
            t=1; break; end; end
        if t==1; break; end; end
    if t==0; ture=1; return; end; end
```

图 1 判断 2 个运算表是否同构

```
function T_nois=table_nonisomor(T_all, F)
lt=length(T_all); s=0; I_iso=ones(1, lt);
for i=1:lt-1; T1=T_all{i};
    for j=i+1:lt
        T2=T_all{j}; t=condition_isomor(T1, T2, F);
        if t==1; I_iso(i)=0; break; end; end; end;
    for i=1:lt
        if I_iso(i)==1; s=s+1; T_nois{s}=T_all{i}; end; end
```

图 2 计算所有非同构运算表

其运行命令为:

```
tic; T=[]; for k1=1:3; for k2=1:3; for k3=1:3;
T=[T;[k1,k2,k3]]; end; end; end
s=0; for k1=1:27; for k2=1:27; for k3=1:27; s=
s+1; T_all{s}=T([k1,k2,k3],:); end; end; end
F=perms(1:3); F=F(1:factorial(3)-1, :); T_nois=
table_nonisomor(T_all, F); toc
```

图 3 是判断运算表是否满足循环结合律的程序, 图 4 则是找出所有 CA-广群的程序.

```
function true=condition_CA(T)
n=length(T(:, 1)); true=1;
for a=1:n; for b=1:n; for c=1:n
    if T(a, T(b, c))~T(c, T(a, b))
        true=0; return ;end; end; end; end
```

图 3 判断运算表是否满足循环结合律

```
function CA=CA_groupoid(T_nois)
lt=length(T_nois); s=0;
for i=1:lt
    T=T_nois{i}; t=condition_CA(T)
    if t==1; s=s+1; CA{s}=T; end; end
```

图 4 计算所有 CA-广群

借助 Matlab 2019a 软件, 经 0.02 s 得到非同构的三阶 CA-广群有 18 个.

其运行命令为:

```
tic; CA=CA_groupoid(T_nois); toc
```

定理 4 不同构的三阶广群一共有 3 330 个, 其中 CA-广群有 18 个.

图 5 是判断运算表是否满足结合律的程序, 图 6 则是找出所有 CA-半群的程序.

```
function true=condition_associ(T)
n=length(T(:, 1)); true=1;
for a=1:n; for b=1:n; for c=1:n
    if T(T(a, b), c)~=T(a, T(b, c))
        true=0; return; end; end; end; end
```

图 5 判断运算表是否满足结合律

```
function CA_SG=CA_semigroup(CA)
lt=length(CA); s=0;
for i=1:lt
    T=CA{i}; t=condition_associ(T)
    if t==1; s=s+1; CA_SG{s}=T; end; end
```

图 6 计算所有 CA-半群

借助 Matlab 2019a 软件, 经 0.009 s 得到非同构的三阶 CA-半群有 12 个.

其运行命令为:

```
tic; CA_SG=CA_semigroup(CA); toc
```

图 7 是判断元素是否存在单位元和逆元的程序, 图 8 是判断运算表是否为 CA-NET-广群的程序, 图 9 是找出所有 CA-NET-广群的程序. 借助 Matlab 2019a 软件, 经 0.03 s 得到非同构的三阶 CA-NET-广群有 5 个.

其运行命令为:

```
tic; CA_NET=CA_neextr(CA); toc
```

定理 5 不同构的三阶 CA-广群共 18 个, 详细

```
function nean=condition_nean(T, a)
n=length(T(:, 1)); nean=0;
for p=1:n
    if T(a, p)==a && T(p, a)==a
        ne=p;
    for q=1:n
        if T(a, q)==ne && T(q, a)==ne
            nean=1; return; end; end; end; end
```

图 7 判断元素是否存在中性元和反元

```
function true=condition_neextr(T)
n=length(T(:, 1)); true=1;
for a=1:n
    nean=condition_nean(T, a)
    if nean==0
        true=0; return
    end
end
```

图 8 判断是否为 CA-NET-广群

```
function CA_NET=CA_neextr(CA)
lt=length(CA); s=0;
for i=1:lt
    T=CA{i}; t=condition_neextr(T)
    if t==1
        s=s+1; CA_NET{s}=T;
    end
end
```

图 9 计算所有 CA-NET-广群

分类如下: (1)非交换 CA-广群 6 个, 它们都不是半群; (2)可交换 CA-广群 12 个, 它们都是半群, 其中, 7 个不是 CA-NET-群(可换正则半群), 5 个 CA-NET-群(包括 1 个循环群).

·	a	b	c
a	c	b	b
b	b	b	b
c	c	b	b

·	a	b	c
a	c	b	b
b	c	b	b
c	c	b	b

·	a	b	c
a	c	c	c
b	b	c	c
c	b	c	c

·	a	b	c
a	c	c	c
b	b	c	c
c	c	c	c

·	a	b	c
a	c	c	c
b	c	a	c
c	c	a	c

·	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	a	c

图 10 非交换 CA-广群的运算表

·	a	b	c
a	c	b	c
b	b	b	b
c	c	b	c

·	a	b	c
a	c	b	c
b	b	c	b
c	c	b	c

·	a	b	c
a	c	c	b
b	c	c	b
c	b	b	c

·	a	b	c
a	c	c	c
b	c	a	c
c	c	c	c

·	a	b	c
a	c	c	c
b	c	b	c
c	c	c	c

·	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	c	c	c

·	a	b	c
a	c	a	c
b	a	b	c
c	c	c	c

图 11 CA-半群的运算表

图 10 中是 6 个不同构三阶非交换 CA-广群的运算表, 图 11、图 12、图 13 是不同构三阶可换 CA-广群的运算表, 其中, 图 12 是三阶 CA-NET-群的运算表, 图 13 是三阶循环群的运算表.

·	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	c
c	c	c	c

·	a	b	c
a	c	a	a
b	a	b	c
c	a	c	c

·	a	b	c
a	c	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

·	a	b	c
a	a	c	c
b	c	b	c
c	c	c	c

图 12 CA-NET-群的运算表

·	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

图 13 CA-NET-循环群的运算表

3 四阶 CA-广群

设 $S=\{a, b, c, d\}$, “ $\cdot$ ”是 S 中的一个二元运算,

那么所有可能的运算表有 $4^{16}=4294967296$ 种. 其中, $\{a \cdot a, a \cdot b, a \cdot c, a \cdot d\}$ 的所有可能运算集只有 $4^4=256$ 种, 图 14 是找出所有这种非同构运算集的程序, 其中, 判断 2 个运算集是否同构的程序如图 1 所示.

借助 Matlab 2019a 软件, 经 0.05 s 得到 $\{a \cdot a, a \cdot b, a \cdot c, a \cdot d\}$ 的非同构运算集有 52 种.

其运行命令为:

```
tic; F=[ones(factorial(3), 1), perms(2:4)]; F=F(1:
factorial(3)-1,:); aset=set_noniso(F); toc
```

```
function aset=set_noniso(F1)
aset=[1, 1, 1, 1];
for k1=1:4; for k2=1:4; for k3=1:4; for k4=1:4
    T1=[k1, k2, k3, k4]; l=length(aset(:, 1)); t1=1;
    for j=1:l; T2=aset(j, :); t2=condition_isomor(T1, T2, F1);
        if t2==1; t1=0; break; end; end
    if t1==1; aset=[aset; T1]; end; end; end; end; end
```

图 14 计算 $\{a \cdot a, a \cdot b, a \cdot c, a \cdot d\}$ 的所有非同构运算集

```
function CA=Table_all(aset, F)
[m, n]=size(aset); CA{1}=ones(n); s=1; T1=zeros(n); ln=4^3;
T=[]; for k1=1:n; for k2=1:n; for k3=1:n; T=[T; [k1, k2, k3]]; end; end; end
for i=1:m; T1(1, :)=aset(i, :);
    if T1(1, 1)==1; for c=2:n; T1(c, 1)=T1(1, T1(1, c)); end
        for k1=1:ln; for k2=1:ln; for k3=1:ln; T1(2:n, 2:n)=T([k1, k2, k3], :); t1=condition_CA(T1);
            if t1==1; t2=1; for j=1:s; T2=CA{j}; t3=condition_isomor(T1, T2, F);
                if t3==1; t2=0; break; end; end; if t2==1; s=s+1; CA{s}=T1; end; end; end; end; end
        else; for c=2:n; T1(c, 2)=T1(1, T1(1, c)); end
            for k1=1:ln; for k2=1:ln; for k3=1:ln; T1(2:n, [1, 3, 4])=T([k1, k2, k3], :); t1=condition_CA(T1);
                if t1==1; t2=1; for j=1:s; T2=CA{j}; t3=condition_isomor(T1, T2, F);
                    if t3==1; t2=0; break; end; end; if t2==1; s=s+1; CA{s}=T1; end; end; end; end; end; end; end
```

图 15 计算所有 CA-广群

```
function [CA_C, CA_NC]=CA_con(CA)
lt=length(CA); n=length(CA{CA{1}(1, :)}); s1=0; s2=0;
for i=1:lt; T=CA{i}; t=1;
    for a=1:n-1
        for b=a+1:n; if T(a, b)==T(b, a); t=0; break; end; end
        if t==0; break; end
    end
    if t==1; s1=s1+1; CA_C{s1}=T; else; s2=s2+1;
    CA_NC{s2}=T; end
end
```

图 16 计算所有(非)交换 CA-广群

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	b	a

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	b	b

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	b
d	a	a	a	b

.	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	b	a
d	a	a	b	b

图 17 非交换 CA-半群的运算表

序号	{aa, ab, ac, ad; ba, bb, bc, bd; ca, cb, cc, cd; da, db, dc, dd}	序号	{aa, ab, ac, ad; ba, bb, bc, bd; ca, cb, cc, cd; da, db, dc, dd}
1	{a, a, a, a; a, b, a, a; a, a, c, a; a, a, a, d}	9	{a, a, a, a; a, b, c, d; a, c, d, b; a, d, b, c}
2	{a, a, a, a; a, b, a, a; a, a, c, c; a, a, c, d}	10	{a, a, a, d; a, b, a, d; a, a, c, d; d, d, d, a}
3	{a, a, a, a; a, b, a, a; a, a, c, d; a, a, d, c}	11	{a, a, a, d; a, b, b, d; a, b, c, d; d, d, d, a}
4	{a, a, a, a; a, b, a, b; a, a, c, c; a, b, c, d}	12	{a, a, a, d; a, b, c, d; a, c, b, d; d, d, d, a}
5	{a, a, a, a; a, b, b, b; a, b, c, b; a, b, b, d}	13	{a, a, c, c; a, b, c, d; c, c, a, a; c, d, a, b}
6	{a, a, a, a; a, b, b, b; a, b, c, c; a, b, c, d}	14	{a, a, c, d; a, b, c, d; c, c, d, a; d, d, a, c}
7	{a, a, a, a; a, b, b, b; a, b, c, d; a, b, d, c}	15	{a, b, c, d; b, a, d, c; c, d, a, b; d, c, b, a}(群)
8	{a, a, a, a; a, b, b, d; a, b, c, d; a, d, d, b}	16	{a, b, c, d; b, a, d, c; c, d, b, a; d, c, a, b}(循环群)

图 18 CA-NET-群的运算表

图 15 是找出所有 CA-广群的程序, 其中判断是否满足循环结合律的程序如图 3 所示, 判断 2 个运算表是否同构的程序如图 1 所示。

借助 Matlab 2019a 软件, 经 28.92 s 得到非同构的四阶 CA-广群有 256 个。

其运行命令为:

```
tic; F=perms(1:4); F=F(1:factorial(4)-1, :); CA=
Table_all(aset, F); toc
```

图 16 是根据可交换性对 CA-广群进行分类的程序, 还可以利用图 5~图 9 的程序对四阶(非)交换 CA-广群进行分类。

借助 Matlab 2019a 软件, 经 0.04 s 得到非同构的四阶 CA-NET-可换半群 16 个, 四阶非交换半群 4 个。

其运行命令为:

```
tic; [CA_C, CA_N]=CA_com(CA); SG_N=CA_
semigroup(CA_N); SG_C=CA_semigroup(CA_C);
NET_C=CA_neextr(CA_C); toc
```

定理 5 非同构的四阶 CA-广群共 256 个, 详细分类如下:

(1)非交换 CA-广群 198 个, 其中 4 个是 CA-半群、其余 194 个均不是半群;

(2)可交换 CA-广群 58 个, 它们都是半群, 其

中 42 个不是 CA-NET-群(可换正则半群), 16 个是 CA-NET-群(包括 2 个群, 其中 1 个是循环群)。

图 17 则是不同构四阶非可换 CA-半群的运算表, 而图 18 是不同构四阶可换正则半群的运算表。

参考文献:

- [1] Boruvka O. Foundations of the Theory of Groupoids and Groups[M]. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1974.
- [2] Hall T E. On regular semigroups[J]. Journal of Algebra, 1973, 24(1):1-24.
- [3] Akinmoyewa J T. A study of some properties of generalized groups[J]. Octagon Mathematical Magazine, 2009, 17(2):599-626.
- [4] Smarandache F, Ali M. Neutrosophic triplet group[J]. Neural Computing & Applications, 2018, 29(7):595-601.
- [5] Stevanovic N, Protic P V. Some decompositions on Abel-Grassmann's groupoids[J]. Pure Mathematics and Applications, 1997, 8(2):355-366.
- [6] Zhang X H, Ma Z R, Yuan W T. Cyclic associative groupoids (CA-groupoids) and cyclic associative neutrosophic extended triplet groupoids[J]. Neutrosophic Sets and Systems, 2019, 29:19-29.
- [7] Sholander M. Medians, lattices, and trees[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1954, 5(5):808-812.

- [8] Kleinfeld M. Rings with $x(yz)=y(zx)$ [J]. Communications in Algebra, 1995, 23(13):5085-5093.
- [9] 詹建明, 谭志松. 左弱 Novikov 代数[J]. 数学杂志, 2005, 25(2):135-138.
- [10] Behn A, Correa I, Hentzel I R. Semiprimality and nilpotency of nonassociative rings satisfying $x(yz)=y(zx)$ [J]. Communications in Algebra, 2008, 36(1):132-141.
- [11] Iqbal M, Ahmad I, Shah M, et al. On cyclic associative Abel-Grassman groupoids[J]. British Journal of Mathematics & computer Science, 2016, 12(5):1-16.
- [12] 李宪年, 宋子伦. 轮迴广群[J]. 陕西工学院学报, 2001, 17(4):61-63.
- [13] Keedwell A D, J. Dénes J. Latin Squares and Their Applications[M]. Akademia kiado, Hungary, Budepest, 1974.
- [14] Kazim M, Nasseerudin M. On almost semigroup[J]. Alig Bull Math, 1972, 2:1-7.
- [15] Holgate P. Groupoids satisfying simple intertive law[J]. Math Student, 1992, 61:101-104.
- [16] Mushtaq Q, Iqbal Q. Decomposition of a locally associative LA-semigroup[J]. Semigroup Forum, 1990, 41:155-164.
- [17] Dudek W A, Gigon R S. Completely inverse AG^{**} -groupoids[J]. Semigroup Forum, 2013, 76:107-123.
- [18] Howie J M. Fundamentals of Semigroup Theory[M]. Oxford: Oxford University Press, 1995.
- [19] Zhang X H, Wu X Y, Mao X Y, et al. On neutrosophic extended triplet groups (loops) and Abel-Grassmann's groupoids (AG-groupoids)[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2019, 37:5743-5753.
- [20] Zhang X H, Mao X Y, Smarandache F, Park C. On homomorphism theorem for perfect neutrosophic extended triplet groups[J]. Information, 2018, 9(9):237-248.
- [21] Zhang X H, Mao X Y, Wu Y T, et al. Neutrosophic filters in Pseudo-BCI algebras[J]. International Journal for Uncertainty Quantification, 2018, 8(6):511-526.
- [22] Mao X Y, Zhou H J. Classification of proper hyper BCI-algebras of order 3[J]. Applied Mathematics & Information Sciences, 2015(1):387-393.
- [23] 毛小燕, 张小红, 周晖杰. 元素个数不超过 6 的真伪 BCK-代数[J]. 模糊系统与数学, 2013(6):105-115.
- [24] Iqbal M, Ahmad I. Some congruences on CA-AG-groupoids[J]. Punjab University Journal of Mathematics, 2019, 51(3):71-87.
- [25] Yuan W T, Zhang X H. Regular CA-groupoids and cyclic associative neutrosophic extended triplet groupoids (CA-NET-groupoids) with green relations[J]. Mathematics, 2020, 8(2):204-224.
- [26] Ma Z R, Zhang X H, Smarandache F. Some results on various cancellative CA-Groupoids and variant CA-groupoids[J]. Symmetry, 2020, 12(2):315-335.

Low-order CA-groupoids and resulting classification

MAO Xiaoyan^{1,2}, TEMUER Chaolu^{2*}

(1.College of Information Engineering, College of Science and Technology of Ningbo University, Ningbo 315300, China;

2.College of Arts and Sciences, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China)

Abstract: Group is the basic algebraic structure that describes symmetry based on associative law. In order to express more general symmetry (or variation symmetry), the concept of group is generalized in various ways. Cyclic associative groupoid (CA-groupoid) is the concept proposed based on the law of cyclic association and the background of non-associative ring, left weakly Novikov algebra and CA-AG-groupoid. It is of great significance to explore low-order CA-groupoid and their classification for the further study of CA-groupoid. In this paper the basic concepts are first introduced, and the triplet group (NETG) is extended with properties of CA-groupoids and neutrosophic. Next, a calculation program is designed using Matlab software to obtain all non-isomorphic CA-groupoids of order 3 and order 4. Finally the complete classification is determined.

Key words: cyclic associative groupoid (CA-groupoid); neutrosophic extended triplet group (NETG); CA-NET-groupoid; classification

(责任编辑 章践立)