

具有奇性系数的半线性椭圆方程大解的存在性

吴柯柯, 沃维丰*

(宁波大学 数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 研究了一类带奇性系数和一般梯度项的半线性椭圆方程大解的存在性. 首先得到解的梯度估计, 然后证明了方程在边界值等于 n 时解的存在性, 最后利用上下解的方法得到了大解的存在性.

关键词: 半线性椭圆方程; Keller-Osserman 条件; 边界爆破; 存在性

中图分类号: O175.29

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 03-0069-05

本文主要研究如下半线性椭圆边界的爆破问题:

$$\begin{cases} \Delta u + c(x)u + g(|\nabla u|) = f(u), & x \in \Omega, \\ u = \infty, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是光滑有界区域; f 和 g 是单调递增的连续函数; $c(x)$ 有奇性, 即当 $d(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega) \rightarrow 0^+$ 时, $c(x) \rightarrow \infty$. 当函数 $u(x) \in C^1(\Omega)$ 在弱的意义下满足问题(1)(其中 $u = \infty$ 的意义为 $d(x) \rightarrow 0^+$ 时 $u(x) \rightarrow \infty$), 则称函数 $u(x)$ 为问题(1)的解(也称为大解). 本文将研究问题(1)解的存在性.

关于椭圆方程边界爆破问题已有大量研究. 1957 年 Keller^[1]和 Osserman^[2]研究了不含梯度项的问题, 即 $\Delta u = f(u), x \in \Omega, u = +\infty, x \in \partial\Omega$, 他们证明了对于一般单调递增的非线性函数 $f(u)$, 上述问题有解, 当且仅当 Keller-Osserman 条件成立, 即

$$\int_1^\infty \frac{ds}{\sqrt{F(s)}} < \infty, \quad (2)$$

其中: $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

对于一般的 $f(u)$, 更多的结果参见文献[3].

对于含有梯度项的边界爆破问题, 1996 年 Bandle 等^[4]考虑了问题 $\Delta u \pm |\nabla u|^q = f(u), x \in \Omega, u = \infty, x \in \partial\Omega$, 得到了当 $f(u) = u^p$ 和 e^u 时问题解的

存在性结果. 文献[5-6]研究了带加权函数的问题: $\Delta u \pm |\nabla u|^q = b(x)f(u), x \in \Omega$. 文献[7]考虑了含一般梯度项 $\Delta u \pm g(|\nabla u|) = f(u), x \in \Omega, u = \infty, x \in \partial\Omega$, 非负解的存在性和不存在性. 文献[8]研究了问题 $Lu = k(x)f(u), x \in \Omega, u = \infty, x \in \partial\Omega$, 解的存在性和唯一性, 这里 $L = a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + b_i(x)u_{x_i} + c(x)u$ 是一致的完全非线性椭圆算子, 其中 $c(x)$ 有奇性, 但是没有考虑一般的非线性梯度项.

本文推广了文献[7]中方程, 研究了含奇性系数方程解的存在性. 相对于文献[8], 考虑了简化的椭圆算子 Δ , 研究了更一般的带非线性梯度项的方程, 所采用的证明方法可应用于更一般的方程, 例如更一般的系数及带扰动项的情形.

1 预备知识和引理

本文采用的符号和条件如下:

令 $\Omega \in C^2$ 是包含在 $\mathbb{R}^N$ 的有界区域, 对于 $\delta > 0$, 使用下面的符号:

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega : d(x) < \delta\},$$

$$\Omega^\delta = \{x \in \Omega : d(x) > \delta\}.$$

因为 $\Omega \in C^2$ 且有界, 注意到存在常数 $\mu > 0$ 使得 $d \in C^2(\overline{\Omega_\mu})$, 且在 Ω_μ 上有 $|\nabla d(x)| = 1$. 证明可以参考文献[9].

为了得到问题(1)解的存在性, 假设系数

$c(x) \in C^1(\Omega)$, 且满足如下条件:

$$d^2(x)c(x) \leq \eta(d(x)), x \in \Omega, d(x) \leq \delta_0, \quad (3)$$

而且对于所有的 $x \in \Omega$, $c(x) \leq 0$. 其中 $\delta_0 > 0$, $\eta: (0, \delta_0] \rightarrow (0, \eta(\delta_0)]$ 是一个单调递增的函数, 满足 Dini 条件, 即

$$\int_0^{\delta_0} \frac{\eta(s)}{s} ds < \infty.$$

下面会用到关于 f 的条件:

f 是单调递增的连续函数, 且满足:

$$f(0) = 0, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = -\infty, \quad (5)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{tf(t)} > 0, \quad (6)$$

如果 f 满足 Keller-Osserman 条件(式(2)和式(4)), 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{F(t)}}{f(t)} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{f(t)} = 0, \quad (7)$$

如果 f 满足 Keller-Osserman 条件(式(2)、式(4)和式(6)), 则

$$\lim_{d(x) \rightarrow 0} |c(x)| \frac{\psi(d(x))}{f(\psi(d(x)))} = 0. \quad (8)$$

式(8)的证明参见文献[10]中推论 3.1.

此外, 用到关于 g 的条件:

g 是单调递增的连续函数, 且满足:

$$g(0) = 0, \quad (9)$$

存在常数 $C > 0$, 使得对于充分大的 t 有:

$$|g(t)| \leq Ct^2. \quad (10)$$

对于任意 t 有:

$$\frac{g(t)}{g'(t)} t \leq 2. \quad (11)$$

定义非减函数 ψ 满足:

$$\int_{\psi(t)}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{2F(s)}} = t, t > 0.$$

由此可以得到:

$$\psi'(t) = -\sqrt{2F(\psi(t))}, \psi''(t) = f(\psi(t)), t > 0.$$

在研究问题(1)解的存在性前, 先考虑问题式(12)解的存在性.

令 $\Omega_j = \{x \in \Omega : d(x) > 1/j\}$, $j \in N$ 是 Ω 的开集的序列.

$$\begin{cases} \Delta u + c(x)u + g(|\nabla u|) = f(u), x \in \Omega_j, \\ u = n, x \in \partial\Omega_j, \end{cases} \quad (12)$$

其中: $n \in N$.

为了证明式(12)解的存在性, 将截断非线性函数 $g(|\nabla u|)$, 对于 $t \geq 0$ 时定义 $\tilde{g}(t) = g(\sqrt{t})$. 选择 $M > 0$, 令 g_M 是一个单调递增有界函数, 使得对于 $t \in [0, M]$ 有 $g_M = \tilde{g}(t)$.

考虑下面的截断问题:

$$\begin{cases} \Delta u + c(x)u + g_M(|\nabla u|^2) = f(u), x \in \Omega_j, \\ u = n, x \in \partial\Omega_j. \end{cases} \quad (13)$$

因为 $\underline{u} = 0$ 是问题(13)的下解, $\bar{u} = n$ 是问题(13)的上解, 参考文献[11]上下解方法可以得到问题(13)存在解. 并由比较原理(文献[12]中引理 2.2)可以得到问题(13)的解是唯一的.

为了证明问题(13)的解也是问题(12)的解, 需要选择合适的 M . 这将需要证明问题(13)的解的梯度一致有界. 有下面引理 1 可知, 只要得到问题(13)的解的梯度在边界上有界即可.

引理 1 假设 u 是问题(13)的解, 且 f 满足条件式(4), g 满足条件式(9)和式(11), 则

$$|\nabla u| \leq \sup_{\partial\Omega_j} |\nabla u| + C \|u\|_{C^0(\Omega_j)},$$

其中: C 只依赖于 $\|c(x)\|_{C^1(\Omega_j)}$.

证明 令 $\{f_k\}_{k=1}^\infty, \{g_k\}_{k=1}^\infty \subseteq C^\infty(R)$. 对于所有的 k , f_k 和 g_k 是递增序列, 且在 R 的紧集上一致收敛到 $\hat{f}$ 和 g_M . 假设函数 f_k 和 g_k 是一致有界的, 考虑下面问题:

$$\begin{cases} \Delta u + c(x)u + g_k(|\nabla u|^2) = f_k(u), x \in \Omega_j, \\ u = n, x \in \partial\Omega_j. \end{cases} \quad (14)$$

通过上述讨论可知式(14)存在唯一解 u_k .

令 $v_k = |\nabla u_k|^2$, 则可以得到:

$$\Delta v_k = 2 \sum_{i,j=1}^N (\partial_{ij} u_k)^2 + 2 \sum_{i=1}^N \partial_i u_k \Delta(\partial_i u_k).$$

另一方面, 对式(14)关于 x_i 求导, 再乘以 $2\partial_i u_k$ 可以得到:

$$\begin{aligned} \Delta(|\nabla u_k|^2) &= 2 \sum_{i,j=1}^N (\partial_{ij} u_k)^2 - 2\partial_i c \partial_i u_k u_k - \\ &\quad 2c(x)(\partial_i u_k)^2 + 2f'_k(u_k)(\partial_i u_k)^2 - \end{aligned}$$

$$2g'_k(|\nabla u_k|^2)\partial_i u_k \partial_i (|\nabla u_k|^2).$$

现在需要考虑另一项 u_k^2 , 经计算可得:

$$\Delta(u_k^2) = 2|\nabla u_k|^2 + 2u_k \Delta u_k = 2|\nabla u_k|^2 +$$

$$2u_k(-c(x)u_k + f_k u_k - g_k(|\nabla u_k|^2)).$$

通过柯西不等式和式(11), 对于充分大的 $\lambda > 0$, 可以得到:

$$\Delta(|\nabla u_k|^2 + \lambda u_k^2) = 2 \sum_{i,j=1}^N (\partial_{ij} u_k)^2 - 2\partial_i c \partial_i u_k u_k -$$

$$2c(x)(\partial_i u_k)^2 + 2f'_k(u_k)(\partial_i u_k)^2 -$$

$$2g'_k(|\nabla u_k|^2)\partial_i u_k \partial_i (|\nabla u_k|^2) + 2\lambda |\nabla u_k|^2 -$$

$$2\lambda u_k^2 c(x) + 2\lambda u_k f_k(u_k) -$$

$$2\lambda u_k g_k(|\nabla u_k|^2) \geq 2|D^2 u_k|^2 +$$

$$(2\lambda - C_1)|\nabla u_k|^2 -$$

$$2g'_k(|\nabla u_k|^2)\partial_i u_k \partial_i (|\nabla u_k|^2) -$$

$$2\lambda u_k g_k(|\nabla u_k|^2) =$$

$$2|D^2 u_k|^2 + (2\lambda - C_1)|\nabla u_k|^2 -$$

$$2g'_k(|\nabla u_k|^2)\partial_i u_k \partial_i (|\nabla u_k|^2 + \lambda |u_k|^2) +$$

$$2\lambda g'_k(|\nabla u_k|^2)|\nabla u_k|^2 u_k.$$

$$(2 - \frac{g_k(|\nabla u_k|^2)}{g'_k(|\nabla u_k|^2)|\nabla u_k|^2}) \geq 0,$$

其中: C_1 是一个正常数, 且只依赖于 $\|c(x)\|_{C^1(\Omega)}$.

因此, 由最大值原理可以得到:

$$|\nabla u_k|^2 \leq \sup_{\partial\Omega_j} |\nabla u_k|^2 + C_2 |u|_{C^0(\Omega_j)}, \quad (15)$$

其中: $C_2 > 0$, 且只依赖于 $\|c(x)\|_{C^1(\Omega)}$.

对式(15)两边取极限, 因为 f_k 和 g_k 一致有界, 由文献[9]中定理 8.33 可以得到:

$$|u_k|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}_j)} \leq C_3,$$

其中: C_3 是一个不依赖于 k 的正数; $\alpha \in (0,1)$.

通过对序列 u_k 取极限可以得到 $u_k \rightarrow u_0$, 因为 u_0 是式(13)的一个解, 由唯一性 $u_0 = u$, 可知 $u_k \rightarrow u$. 对式(15)取极限可以得到引理 1 的结论.

下面证明 u 的梯度在边界上有界. 若 u 是问题(13)的解, 因为 $c(x)$ 是有界的, 所以可以得到:

$$\Delta u + g_M(|\nabla u|^2) = f(u) - c(x)u \leq$$

$$f(u) + C_4 u = \tilde{f}(u),$$

其中: $\tilde{f}(u) = f(u) + C_4 u$; $C_4 = \sup_{\Omega} c(x)$ 为正常数.

因此可以得到 u 是问题:

$$\begin{cases} \Delta u + g_M(|\nabla u|) = \tilde{f}(u), & x \in \Omega, \\ u = n, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (16)$$

的上解.

由文献[7]中关于边界梯度估计的讨论结果可知, 问题(16)的解 $\tilde{u}$ 的梯度在边界上有界, 即

$$|\nabla u(x_0)|^2 < M.$$

由比较原理可得 $\tilde{u} \leq u$, 因此有:

$$0 < \frac{\partial u}{\partial \nu} \leq \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu},$$

即可以得到 u 的梯度在边界上有界.

由上述讨论可得到关于问题(12)解的存在性结果.

引理 2 假设 f 满足条件式(4), g 满足条件式(9)和式(11), 则问题(12)存在解 $u_n \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, $n \in N$.

由文献[7]中定理 A.1 类似的讨论可以得到问题(12)的解的内部梯度估计.

引理 3 假设 f 满足条件式(4), g 满足条件式(9)和式(10). 令 $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ 是问题(12)的解, 则对于任一光滑的子区域 $\Omega' \subset \subset \Omega'' \subset \subset \Omega$, 存在常数 C 使得:

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u| \leq C,$$

其中: C 与 $|f(u)|_{L^\infty(\Omega^*)}$, Ω' , Ω'' , g , c 有关.

2 问题(1)解的存在性

定理 1 假设 f 满足条件式(2)和式(4)~(6), g 满足条件式(9)~(11), 且以下条件成立:

$$\inf_{\xi > 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\xi - \frac{f(\xi t)}{f(t)} + \frac{g(\xi \sqrt{2F(t)})}{f(t)} \right) < 0, \quad (17)$$

和

$$\sup_{\xi > 0} \liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\xi - \frac{f(\xi t)}{f(t)} + \frac{g(\xi \sqrt{2F(t)})}{f(t)} \right) > 0, \quad (18)$$

则问题(1)存在解 $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$, 并且 u 是最大解.

证明 令 $\Omega_j = \{x \in \Omega : d(x) > 1/j\}$, $j \in N$ 是 Ω 的开集的序列. 考虑下面问题的存在解:

$$\begin{cases} \Delta w + c(x)w + g(|\nabla w|) = f(w), & x \in \Omega_j, \\ w = \infty, & x \in \partial\Omega_j. \end{cases} \quad (19)$$

证明 $v_j = A\psi(d(x) - 1/j) + \gamma$ 是问题(19)的上解, 这里 A 和 γ 是大于 0 的常数.

$$\begin{aligned} \Delta v_j + c(x)v_j + g(|\nabla v_j|) &= \\ \Delta(A\psi(d(x) - 1/j) + \gamma) &+ \\ c(x)(A\psi(d(x) - 1/j) + \gamma) &+ \\ g(|\nabla(A\psi(d(x) - 1/j) + \gamma)|) &\leq \\ Af(\psi(d(x) - 1/j)) - & \\ A\sqrt{2F(\psi(d(x) - 1/j))}\Delta d + & \\ Ac(x)\psi(d(x) - 1/j) + & \\ g(A\sqrt{2F(\psi(d(x) - 1/j))}) &\leq \\ f(\psi(d(x) - 1/j)) \cdot & \\ \left(A + A\frac{\sqrt{2F(\psi(d(x) - 1/j))}}{f(\psi(d(x) - 1/j))}|\Delta d| + \right. & \\ A\frac{\psi(d(x) - 1/j)}{f(\psi(d(x) - 1/j))}|c(x)| + & \\ \left. \frac{g(A\sqrt{2F(\psi(d(x) - 1/j))})}{f(\psi(d(x) - 1/j))} \right) & \end{aligned}$$

由条件式(17), 选择充分小的 $\varepsilon > 0$, 存在合适的正常数 A , 使得式(20)成立:

$$\limsup_{0 < d(x) - 1/j \rightarrow 0} \left(A - \frac{f(A\psi(d(x) - 1/j))}{f(\psi(d(x) - 1/j))} + \frac{g(A\sqrt{2F(\psi(d(x) - 1/j))})}{f(\psi(d(x) - 1/j))} \right) < -2\varepsilon, \quad (20)$$

即

$$A + \varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{f(A\psi(d(x) - 1/j))}{f(\psi(d(x) - 1/j))} - \frac{g(A\sqrt{2F(\psi(d(x) - 1/j))})}{f(\psi(d(x) - 1/j))}.$$

由条件式(7)和式(8), 取充分小的 $\varepsilon > 0$, 当 $d(x) - 1/j \rightarrow 0$ 对于所有的 $x \in \Omega_j$ 有:

$$A\frac{\sqrt{2F(\psi(d(x) - 1/j))}}{f(\psi(d(x) - 1/j))}|\Delta d| +$$

$$A\frac{\psi(d(x) - 1/j)}{f(\psi(d(x) - 1/j))}|c(x)| < \varepsilon, \quad (21)$$

因此, 对于所有的 $x \in \Omega_j$ 有:

$$\begin{aligned} \Delta v_j + c(x)v_j + g(|\nabla v_j|) &\leq f(\psi(d(x) - 1/j)) \cdot \\ \left(A + \varepsilon + \frac{g(A\sqrt{2F(\psi(d(x) - 1/j))})}{f(\psi(d(x) - 1/j))} \right) &\leq \\ f(\psi(d(x) - 1/j)) \cdot & \\ \left(-(\varepsilon/2) + \frac{f(A\psi(d(x) - 1/j))}{f(\psi(d(x) - 1/j))} \right) &\leq f(v_j), \end{aligned}$$

且在 $\partial\Omega_j$ 上 $v_j = \infty$, 因此 v_j 是问题(19)的上解.

由引理 2 可知, 问题

$$\begin{cases} \Delta w + c(x)w + g(|\nabla w|) = f(w), & x \in \Omega_j, \\ w = n, & x \in \partial\Omega_j, \end{cases}$$

存在解 $w_{j,n}$. 因为问题(19)的上解 v_j 是局部有界, 所以 $w_{j,n}$ 在 Ω_j 内是局部一致有界. 又因为 $w_{j,n}$ 关于 n 是单调递增, 因此在 Ω_j 内, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $w_{j,n} \rightarrow w_j$. 应用引理 3 和经典理论可得到 $w_{j,n}$ 局部一致 $C^{1,\alpha}$ 估计, $\alpha \in (0,1)$. 然后, 通过对角论证可得到 $w_{j,n} \rightarrow w_j$, 因此 w_j 是问题(19)的解. 通过运用标准的方法讨论得到 $w_j \in C^{1,\alpha}(\Omega_j)$, $\alpha \in (0,1)$.

证明 $\underline{u} = A\psi(d(x)) - \gamma$ 是问题(1)在 Ω 内的下解, 这里 A 和 γ 是大于 0 的常数. 证明 $\underline{u}$ 是问题(1)在 Ω^δ 内的下解过程与证明 v_j 是方程(19)的上解过程类似, 证明省略.

选取 γ 使得 $\underline{u}$ 是问题(1)在 Ω^δ 的下解. 令 $\eta := \min\{A(\Delta\psi(d(x)) + c(x)\psi(d(x))) : x \in \Omega^\delta\}$, η 与 γ 无关. 由条件式(5)可得, 当 $\gamma \rightarrow \infty$ 时有 $f(A\psi(\delta) - \gamma) \rightarrow -\infty$. 因此可选择 $\gamma > 0$ 充分大使 $f(A\psi(\delta) - \gamma) \leq \eta$. 固定 γ 可使在 Ω^δ 内有:

$$\Delta(\underline{u}) + c(x)(\underline{u}) + g(|\nabla \underline{u}|) \geq A\Delta\psi(\delta) +$$

$$Ac(x)\psi(d(x)) \geq \eta \geq f(A\psi(\delta) - \gamma) = f(\underline{u}),$$

由此可得 $\underline{u}$ 是问题(1)在 Ω 内的下解.

再者, 对于每一个正整数 j , 由比较原理可得在 Ω_{j-1} 上 $w_j \leq w_{j-1}$ 成立, 即 $\{w_j\}_{k=j-1}^\infty$ 在 Ω_{j-1} 是单调递减序列. 因 w_j 是局部一致有界, 又由在 Ω_j 内 $w_j \geq \underline{u}$, 且 $w_j \in C^{1,\alpha}(\Omega_j)$, $\alpha \in (0,1)$. 因此, 通过标准估计, 可得 $w_j \rightarrow u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ 是问题(1)的解.

如果 v 是方程(1)的任意一个解, 由比较原理可得在 Ω_j 上有 $v \leq w_j$, $j \geq 1$, 即在 Ω 内有 $v \leq u$,

因此, u 是问题(1)的最大解.

参考文献:

- [1] Keller J B. On solutions of $\Delta u = f(u)$ [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1957, 10(4):503-510.
- [2] Osserman R. On the inequality $\Delta u \geq f(u)$ [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1957, 7(4):1641-1647.
- [3] Dumont S, Dupaigne L, Goubet O, et al. Back to the Keller-Osserman condition for boundary blow-up solutions[J]. Advanced Nonlinear Studies, 2007, 7(2): 271-298.
- [4] Bandle C, Giarrusso E. Boundary blow up for semilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms[J]. Advances in Differential Equations, 1996, 1(1):133-150.
- [5] Zhang Z J. Boundary blow-up elliptic problems with nonlinear gradient terms and singular weights[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 2008, 138(6):1403-1424.
- [6] Liu S, Xu Y. Boundary blow-up solutions to semilinear elliptic equations with nonlinear gradient terms[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2014(9): 1-20.
- [7] Alarcón S, García-Melián J, Quaas A. Keller-Osserman type conditions for some elliptic problems with gradient terms[J]. Journal of Differential Equations, 2012, 252(2): 886-914.
- [8] Mohammed A, Porru G. Large solutions for non-divergence structure equations with singular lower order terms[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2017, 35:470-482.
- [9] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic partial differential equations of second order[M]. Berlin: Springer, 1983.
- [10] Mohammed A, Porru G. Large solutions to non-divergence structure semilinear elliptic equations with inhomogeneous term[J]. Advances in Nonlinear Analysis, 2017, 8(1):517-532.
- [11] Deuel J, Hess P. A criterion for the existence of solutions of non-linear elliptic boundary value problems[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 1976, 74:49-54.
- [12] Felmer P L, Quaas A. On the strong maximum principle for quasilinear elliptic equations and systems[J]. Advances in Differential Equations, 2002, 7(1):25-46.

Existence of large solutions for semilinear elliptic equations with singular coefficients

WU Keke, WO Weifeng^{*}

(School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: In order to study the existence of large solutions for semilinear elliptic equations with singular coefficients and general gradient terms, we first prove the gradient estimate, and obtain the existence of solutions when the boundary value is equal to n . Finally, the existence of large solution of the studied equation is obtained by using the method of sub-solutions and super-solutions.

Key words: semilinear elliptic equation; Keller-Osserman condition; boundary blow-up; existence

(责任编辑 史小丽)