

二维反谐振子在恒定垂直外磁场下的逗留时间

郭伟, 陈寅, 潘孝胤*

(宁波大学 物理科学与技术学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 粒子逗留时间的计算是量子力学基本问题之一. 本文对处于垂直外磁场下的二维反谐振势模型运用费曼路径积分方法, 得到了初始时刻位于原点的高斯波包随时间的演化方程, 然后计算了带电粒子的逗留时间. 根据计算结果讨论了初始高斯波包在不同宽度情况下, 磁场对逗留时间的影响. 结果显示, 逗留时间刚开始随着磁场强度的增加单调增加, 但当磁场强度足够大, 使得拉莫尔频率 ω_c 超过谐振子频率 ω_0 时, 逗留时间将变成无穷大, 这与三维情况下的逗留时间仍然持续增加的结果有很大不同.

关键词: 逗留时间; 反谐振子; 路径积分; 磁场

中图分类号: O413.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 03-0081-05

计算粒子处于不稳定平衡区域附近停留的时间即逗留时间, 是量子力学中的一个基本问题^[1-6]. 这一问题通常会被理想化为一个粒子或者准粒子在反谐振势中的模型. 这种理想化情况已经被精确求解并且被广泛运用于各种领域, 比如宇宙演化^[7]、反映散射^[8]、微波散射器^[9]以及作为各种近似模型的测试依据^[10]. 而另一方面, 最近几十年有大量关于系统处于恒定磁场下的研究, 其中有些取得了突破性成果并且在量子霍尔效应^[11-13]、量子点^[14-17]和巨磁电阻^[18-19]等新的领域也展开了相关研究. 因此, 研究处于反谐振势中的粒子或准粒子在外部磁场下的动力学理论有非常重要的意义, 可以在理论上解释当今许多物理现象和实验结果. 基于上述动机, 本文研究了磁场作用对反谐振势中带电粒子逗留时间的影响.

1 在恒定垂直磁场下的二维反谐振子模型

首先考虑一个二维系统的粒子或准粒子, 其带电量为 q , 有效质量为 m^* , 被限制于一个反谐振势, 处于沿 z 方向、大小为 B 的磁场中. 该磁场可写为 $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, 其中 $B_z = B$. 则系统的哈密顿量可以表示为

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m^*}(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 - \frac{1}{2}m^*\omega_0^2(x^2 + y^2), \quad (1)$$

式中, $\vec{A}$ 为磁场正则规范下的磁矢势, 可表示为

$$\vec{A}(\vec{\rho}) = \left(\frac{B}{2}\right)(-y\hat{i} + x\hat{j}), \quad (2)$$

式中, $\hat{i}, \hat{j}$ 为系统二维坐标矢量. 此时, 哈密顿量可以改写为

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m^*}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{2}m^*\omega_0^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}m^*\omega_c^2(x^2 + y^2) + \omega_c\hat{L}_z, \quad (3)$$

式中: $\omega_c = qB/(2m^*c)$ 为拉莫尔频率; $\hat{L}_z$ 为 z 方向上的角动量. 可以看出, 将频率为 ω_0 的二维谐振子处于恒定匀强磁场 B 时哈密顿量中的 ω_0 替换为 $i\omega_0$, 就可以得到哈密顿量表达式(3). 因此, 通过相似的替换就可以得到系统的传播子, 即

$$K_0(x_b, y_b; x_a, y_a; t) = \frac{m^*\Omega}{2\pi i \hbar \sinh \Omega t} \cdot \exp\left\{\frac{im^*\Omega}{2\hbar \sinh \Omega t}[(x_a^2 + x_b^2 + y_a^2 + y_b^2)\cosh \Omega t - 2(x_b x_a + y_b y_a)\cos \omega_c t + 2(x_a y_b + x_b y_a)\sin \omega_c t]\right\}, \quad (4)$$

式中, $\Omega^2 = \omega_0^2 - \omega_c^2$.

收稿日期: 2019-08-09.

宁波大学学报(理工版)网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金(11375090); 宁波大学王宽诚幸福基金.

第一作者: 郭伟(1986-), 男, 安徽六安人, 在读硕士研究生, 主要研究方向: 路径积分相关计算. E-mail: guoweibu@foxmail.com

*通信作者: 潘孝胤(1974-), 男, 浙江宁海人, 研究员, 主要研究方向: 凝聚态物理. E-mail: panxiaoyin@nbu.edu.cn

本文考虑一个初始时刻位于坐标原点的二维高斯波包

$$\psi(x_0, y_0) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\lambda_0^2}{2}(x_0^2 + y_0^2)}, \quad (5)$$

式中, λ_0 为反映波包宽度的参数. 利用费曼路径积分方法^[20-21], 得到波包在任意时刻 t 的函数,

$$\psi(x, y, t) = \iint K_0(x_b, y_b; x_0, y_0; t) \cdot \psi(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad (6)$$

将式(4)代入式(6), 计算积分可得

$$\psi(x, y, t) = m^* \Omega \lambda_0 \cdot \exp \left\{ \frac{-m^* \Omega}{2\hbar} \cdot \left(\frac{i\lambda_0^2 \hbar \cosh \Omega t + m^* \Omega \sinh \Omega t}{-\lambda_0^2 \hbar \sinh \Omega t + i m^* \Omega \cosh \Omega t} \rho^2 \right) \right\} / (\sqrt{\pi} (i\lambda_0^2 \hbar \sinh \Omega t + m^* \Omega \cosh \Omega t)), \quad (7)$$

通过式(7)可以得到概率密度函数

$$\rho_0(x, y, t) = |\psi(x, y, t)|^2 = \frac{1}{2\pi\sigma_0^2(t)} \exp \left\{ \frac{-(x^2 + y^2)}{2\sigma_0^2(t)} \right\}, \quad (8)$$

这是一个二维的高斯分布, 其标准偏差 $\sigma_0(t)$ 为

$$\sigma_0(t) = \sqrt{\frac{\lambda_0^4 \hbar^2 \sinh^2 \Omega t + m^{*2} \Omega^2 \cosh^2 \Omega t}{2\lambda_0^2 m^{*2} \Omega^2}}. \quad (9)$$

对于不同初始高斯波包宽度 λ_0 , 在几个不同磁场强度 B 下, $\sigma_0(t)$ 随时间的演化函数如图 1 所

示. 结果表明随着时间的增加, $\sigma_0(t)$ 单调地增加. 特别地, 当 t 很大、 $\omega_c \rightarrow \omega_0$ 时, 有 $\sigma_0(t) \sim kt / \sqrt{2}$ (参数设定为: $m^* = \hbar = \omega_0 = 1$). 然而, 当磁场强度变得足够大, 使 $\omega_c > \omega_0$ 时, $\sigma_0(t)$ 将变成振荡函数, 其值在 1.0 上下振荡.

在 t 时刻, 粒子处于以原点为中心, 半径为 R 的圆形区域内的概率为

$$Q(R, t) = \iint_{x^2 + y^2 \leq R^2} \rho(x, y, t) dx dy = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma_0^2(t)}}. \quad (10)$$

该函数描述了随时间增加系统保持平衡的能力. 按照文献[1]中的定义写出逗留时间,

$$T = \int_0^\infty Q(R, t) dt. \quad (11)$$

然而式(11)无法得到精确的解析解. 为了研究磁场对逗留时间的影响, 本文通过数值计算进行分析.

图 2 表示在 λ_0 和 ω_c 的不同取值情况下, 函数 $Q(R, t)|_{R=1}$ 值随时间的变化情况. 图像清楚地显示, $Q(R, t)$ 随着时间的增加而减小, 并且当 $t \rightarrow \infty$ 时趋向于常数 1. 当磁场强度减弱时, $Q(R, t)$ 随时间衰减得更快. 逗留时间 T 作为 ω_c 的函数, 其图像如图 3 所示. 可以看出, 逗留时间 T 随着 ω_c 的增加而增加, 并且当 $\omega_c \rightarrow \omega_0$ 时趋近于一常数. 该常数和初始高斯波包有关, 即对不同的初始高斯波包

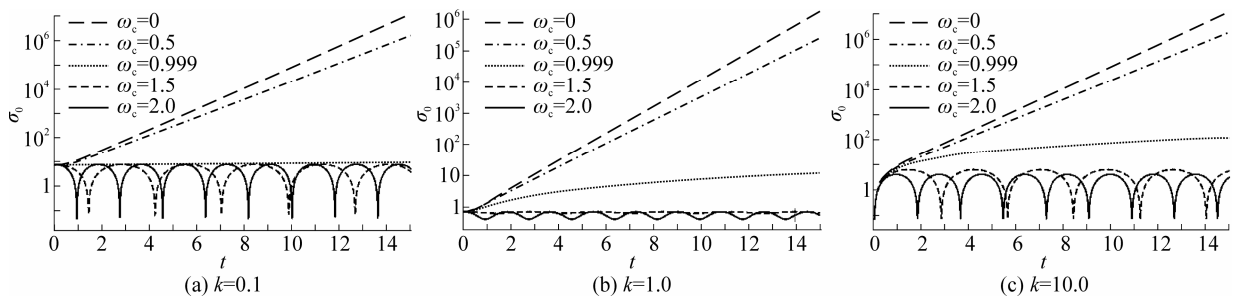


图 1 $\sigma_0(t)$ 的函数图像

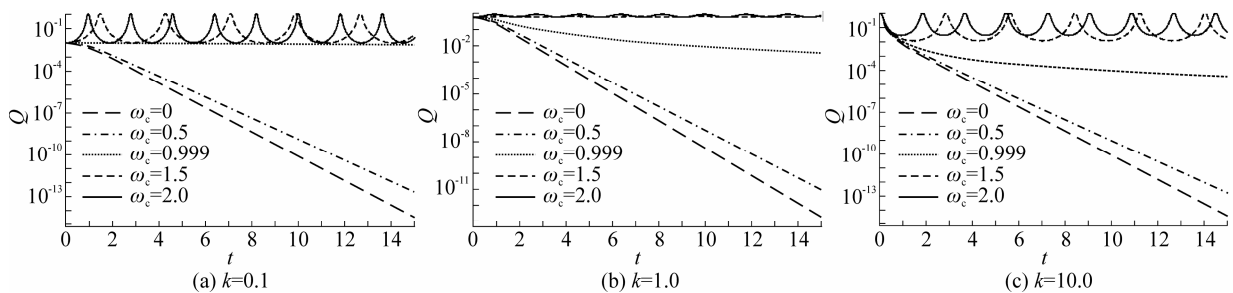
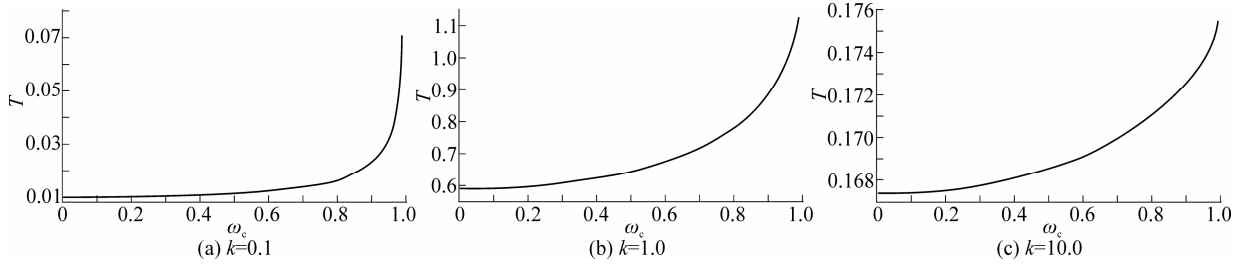


图 2 $Q(R, t)|_{R=1}$ 的函数图像

图3 逗留时间 T 作为 ω_c 的函数的图像

宽度该常数不同. 数值分析结果显示, 当 $\lambda_0 = \sqrt{\frac{m^* \omega_0}{\hbar}}$ 时, 也就是高斯波包初始宽度等于对应谐振子基态的宽度时, 该常数达到最大值.

当磁场强度增加到 $\omega_c > \omega_0$ 的区域时, $\sigma_0(t)$ 变成围绕 1.0 振荡的振荡函数. 这将导致图 2 所示的结果: $Q(R, t)$ 成为一个振荡函数. 事实上, 在此情况下系统将维持稳定, 逗留时间将变得无穷大. 由图 3 可以看出, 对不同初始宽度的高斯波包, 逗留时间随磁场强度的增加而增大, 并且当磁场强度达到 $\omega_c \rightarrow \omega_0$ 时, 逗留时间将变得无穷大, 表明此时系统稳定.

2 恒定垂直外磁场下三维各向同性反谐振子的比较

为便于比较, 本文给出三维反谐振子在恒定垂直磁场下的逗留时间结果, 具体计算类似于三维反谐振子在恒定倾斜磁场下的情形^[22]. 考虑三维系统中带电量为 q , 质量为 m^* 的粒子或准粒子, 处于各向同性的反谐振势和沿 z 方向强度为 B 的恒定磁场中. 系统哈密顿量为

$$\hat{H} = \frac{1}{2m^*} (\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A})^2 - \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 (x^2 + y^2 + z^2). \quad (12)$$

类似二维情况, 本文考虑一个初始时刻位于原点的三维高斯波包随时间的演化.

$$\Psi(\vec{r}_0) = \psi(x_0, y_0) \phi(z_0), \quad (13)$$

$$\text{式中, } \psi(x_0, y_0) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\lambda_0^2}{2}(x^2+y^2)}, \quad \phi(z_0) = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\lambda_0^2}{2}z_0^2}.$$

仍然运用费曼路径积分方法, 得到任意时刻 t 的波包函数, 再得到概率密度,

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(x, y, t) \rho_z(z, t), \quad (14)$$

$\rho_0(x, y, t)$ 的表达式由式(8)给出, 而

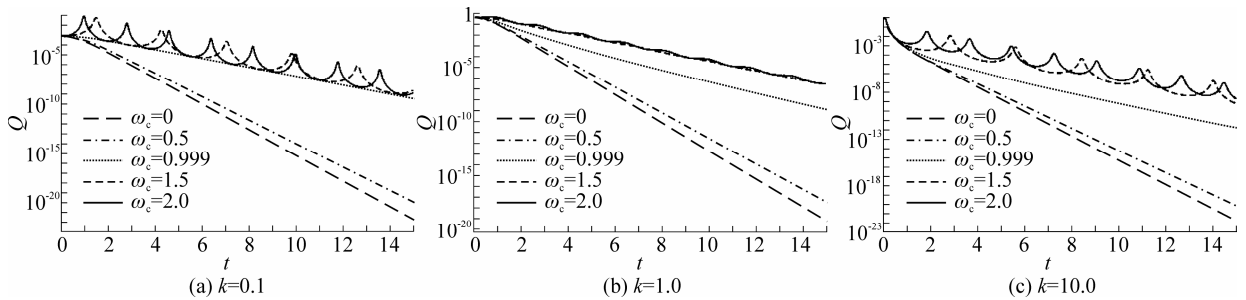
$$\rho_z(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z(t)}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2(t)}\right\}, \quad (15)$$

$$\text{式中, } \sigma_z(t) = \sqrt{\frac{\lambda_0^4 \hbar^2 \sinh^2 \omega_0 t + m^{*2} \omega_0^2 \cosh^2 \omega_0 t}{2\lambda_0^2 m^{*2} \omega_0^2}}. \quad \text{因}$$

此, 在 t 时刻, 在以原点为中心, 半径为 R 的球形区域内找到粒子的概率为^[22]

$$Q(R, t) = \text{erf}\left(\frac{R}{\sqrt{2\sigma_z(t)}}\right) - e^{\frac{-R^2}{2\sigma_0^2(t)}} \sqrt{\frac{\sigma_0^2}{\sigma_z^2 - \sigma_0^2}} \text{erf}i\left(\sqrt{\frac{\sigma_z^2 - \sigma_0^2}{2\sigma_0^2 \sigma_z^2}} R\right), \quad (16)$$

式中, $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 和 $\text{erf}i(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{t^2} dt$ 分别为误差函数和虚误差函数^[23]. 图 4 所示为在不同 λ_0 值及几个不同磁场强度 B 下的 $Q(R, t)|_{R=1}$ 函数图像. 显然, 除了数值更小以外, 变化规律与二维情况相似. 然而, 当 $\omega_c > \omega_0$ 时, $\sigma_0(t)$ 变成衰减的振荡函数, 并最终趋近于 0.

图4 $Q(R, t)|_{R=1}$ 的函数图像

与二维情况类似,通过积分可以得到三维情况下的逗留时间,

$$T = \int_0^{\infty} Q(R, t) dt. \quad (17)$$

上式积分仍然与二维情况一样不能得到解析解,本文通过数值计算进行分析,结果如图5所示.显然,三维情况下逗留时间作为 ω_c 的函数在 $\omega_c < \omega_0$ 区域的表现规律与二维情况类似,只是逗留时间更短.当 $\omega_c > \omega_0$ 时,逗留时间的变化规律变得与二维情况下不同,逗留时间仍然是 ω_c 的增函数.该现象可以这样解释:与二维情况相比,即使 $\omega_c > \omega_0$ 时粒子被限制在 x - y 平面,但是仍然受到 z 方向来自于反谐振势的附加力,这使得粒子沿 z 方向运动从而导致粒子的逗留时间有限.

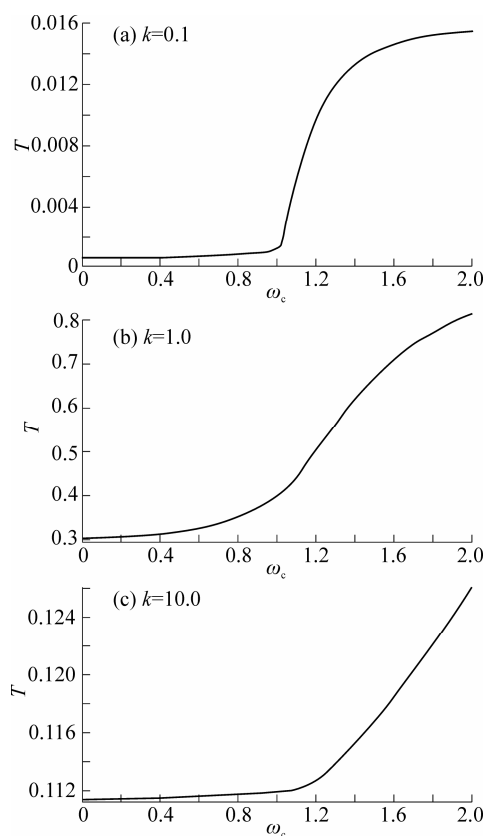


图5 逗留时间 T 作为 ω_c 的函数的图像

3 结论

本文利用费曼路径积分方法研究了处于恒定垂直磁场中的二维反谐振子,分析了磁场对逗留时间的影响,并且与恒定垂直磁场中三维反谐振子的结果进行了比较.结果显示,当拉莫尔频率

$\omega_c < \omega_0$ 时,两者逗留时间都是 ω_c 的单调递增函数,并且在 $\omega_c \rightarrow \omega_0$ 时趋近一常数.该常数的值取决于初始高斯波包的宽度,当初始高斯波包的宽度等于相应谐振子基态波函数的宽度,即 $\lambda_0 = \sqrt{\frac{m^* \omega_0}{\hbar}}$ 时,达到最大值.

然而,当磁场强度足够强以至于 $\omega_c > \omega_0$ 时,两种模型下的逗留时间变化规律将会变得截然不同.在二维模型中,系统将会变得稳定,逗留时间会变成无穷大.而在三维模型中逗留时间仍然是 ω_c 的单调递增函数.这是因为磁场仅仅会影响粒子 x - y 平面的运动而对 z 方向没有影响导致了逗留时间是有限的.

参考文献:

- [1] Barton G Quantum mechanics of the inverted oscillator potential[J]. Annals of Physics, 1986, 166(2):322-363.
- [2] Baskoutas S, Jannussis A. Quantum tunnelling effect for the inverted Caldirola-Kanai Hamiltonian[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1992, 25(23): L1299-L1304.
- [3] Baskoutas S, Jannussis A, Mignani R. Quantum tunnelling of a damped and driven, inverted harmonic oscillator[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1993, 26(23):7137-7147.
- [4] Guo G J, Ren Z Z, Ju G X, et al. Quantum tunneling effect of a time-dependent inverted harmonic oscillator [J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2011, 44(18):185301 [2019-01-16]. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/44/18/185301>.
- [5] Guo G J, Ren Z Z, Ju G X, et al. Quantum tunneling effect of a driven inverted harmonic oscillator[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2011, 44(30):305301 [2018-10-09]. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/44/30/305301>.
- [6] Guo G J, Ren Z Z, Ju G X, et al. The sojourn time of the inverted harmonic oscillator on the noncommutative plane[J/OL]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2011, 44(42):425301 [2018-09-21]. <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/44/42/425301>.
- [7] Felder G, Frolov A, Kofman L, et al. Cosmology with negative potentials[J/OL]. Physical Review D, 2002, 66(2):023507 [2018-09-25]. <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.66.023507>.

- [8] AbuSalbi N, Kouri D, Baer M, et al. A study of the quantal time delay matrix in collinear reactive scattering[J]. The Journal of Chemical Physics, 1985, 82(10):4500-4508.
- [9] Sargent M, Scully M O, Lamb W E. Laser Physics[M]. New Jersey: Addison-Wesley, 1974.
- [10] Cooper F, Milton K A M, Simmons L M. Quantum roll: A study of the long-time behavior of the finite-element method[J]. Physical Review D, 1985, 32(8):2056-2060.
- [11] MacDonald A H. Quantum Hall Effect: A Perspective[M]. Dordrecht, Netherlands: Springer, 1989.
- [12] Chakraborty T, Pietilainen P. The Fractional Quantum Hall Effect[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.
- [13] Prange R E, Girvin S M. The Quantum Hall Effect[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [14] Chakraborty T. Quantum Dots[M]. Amsterdam: Elsevier, 1999.
- [15] Jacak L, Harylak P, Wöjs A. Quantum Dots[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.
- [16] Alhassid Y. The statistical theory of quantum dots[J]. Reviews of Modern Physics, 2000, 72:895-986.
- [17] Hanson R, Kouwenhoven L P, Petta J R, et al. Spins in few-electron quantum dots[J]. Reviews of Modern Physics, 2007, 79(4):1217-1265.
- [18] Fert A. Origin, development, and future of spintronics (Nobel lecture)[J]. Angewandte Chemie International Edition, 2008, 47(32): 5956-5967.
- [19] Grünberg P A. Nobel lecture: From spin waves to giant magnetoresistance and beyond[J]. Reviews of Modern Physics, 2008, 80(4):1531-1540.
- [20] Feynman R P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics[J]. Reviews of Modern Physics, 1948, 20(2):367-387.
- [21] Feynman R P, Hibbs A R. Quantum Mechanics and Path Integrals[M]. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [22] Wang Y J, Guo W, Pan X Y. The sojourn time of the inverted isotropic harmonic oscillators in a tilted magnetic field[J/OL]. Physica Scripta, 2020, 95:045810 [2020-02-17]. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ab6b41>.
- [23] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2010.

The sojourn time of the inverted 2D harmonic oscillators under a constant perpendicular magnetic field

GUO Wei, CHEN Yin, PAN Xiaoyin *

(School of Physical Science and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: The calculation of sojourn time is a fundamental problem in quantum mechanics. In this paper, we study the magnetic effects on the sojourn time of the two-dimensional (2D) charged inverted harmonic oscillator under a constant perpendicular magnetic field. We obtain the time evolution of a Gaussian wave-packet initially centered at the origin by employing the Feynman path integral approach, followed by acquiring the integral expression for the sojourn time. Consequently, the magnetic effect on the sojourn time for the Gaussian wave-packets with different values of the initial width are discussed. It is shown that the sojourn time works as a function of the strength of the magnetic field increase. However, when the strength of the magnetic field is so large that the Larmor frequency ω_c passes over the inverted harmonic oscillator frequency ω_0 , the sojourn time becomes infinity. This finding is quite different from the 3D case in which it remains an increasing function.

Key words: sojourn time; inverted harmonic oscillator; path integral; magnetic field

(责任编辑 韩 超)