

非线性科学中的对称性研究及其应用

楼森岳

(宁波大学 物理科学与技术学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 自1990年宁波大学非线性科学课题组完成非线性系统对称性约化的第1个对称性专题研究以来, 宁波大学的非线性科学研究, 特别是非线性系统的对称性研究成为一个特色, 引起了同行的广泛关注. 宁波大学非线性科学团队在对称性研究方面的主要进展有: 递推算子的因式化和逆递推算子及逆对称和逆可积梯队、形式级数对称法、非局域对称及其局域化、达布变换和非局域对称、条件对称和分离变量法、对称群直接法、群不变非线性系统分类、超对称和玻色化、留数对称、从对称性到达布变换、非局域对称的对称性约化和相容 Riccati 展开法、完备对称和可积性、大气和海洋系统中的对称性应用、离散对称和多地物理学、局域对称和非局域对称的对偶及可积系统的正梯队和负梯队的对偶等.

关键词: 逆对称; 非局域对称局域化; 对称分类; 完备对称; 留数对称; 超对称系统玻色化

中图分类号: O411

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0001-02

1990年宁波师范学院(1996年并入宁波大学)组建了第1个非线性科学研究团队, 并成立了现代物理研究所. 团队成立后, 把主攻方向锁定为非线性系统的对称性及其应用研究. 非线性系统的求解非常困难, 没有统一的方法. 由于描述自然规律的最基本模型往往是根据对称性来建立的, 如描述构成宇宙的所有基本粒子和相互作用的标准模型是根据拉格朗日量具有 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 的局域对称性来决定的, 因此, 我们有一个信念或猜想: 能够用别的办法求解的问题有可能能用对称性的方法来求解. 我们选择的第1个研究专题是非线性系统对称性约化的直接法. 对称性约化直接法的第1篇文章是由著名的数学物理学家 Clarkson 和 Kruskal 在1989年对单分量(1+1)维系统建立(简称CK法). 这种方法初学者不需要具备高深的数学基础即可入门, 当年我们团队成功地将CK法进行了完善, 并推广到(2+1)维系统和多分量系统.

为了深入研究非线性系统的对称性, 需要 we 们掌握严格的数学理论, 如群论及非线性可积系

统理论. 为此, 1992年我们选择了谷超豪先生等的关于对称性和可积系统的专著作为学习严格数学理论的切入点, 并由此成功地完成了非线性系统对称性的第2个创新专题研究: 递推算子的因式化、逆递推算子和逆对称及逆可积梯队及递推算子的本征值问题.

对于(1+1)维可积系统, 可以由递推算子从数个种子对称得到数族无穷多对称. 然而, 对于高维非线性系统不存在合适简便的递推算子, 如何寻求无穷多对称成为一个困难的课题. 利用物理学研究者惯用的从特殊到一般的归纳推广思想, 我们成功地完成了第3个对称性研究专题: 建立了形式级数对称法, 在可积系统领域发现了 w_∞ 代数, 并将其推广为广义 w_∞ 代数.

非局域对称研究是宁波大学非线性科学课题组的一大特色. 根据(2+1)维可积系统, 虽然没有递推算子, 但是有各种好的可积性质, 如 Lax 可积性、潘勒韦可积性、达布变换、贝克隆变换等. 根据 Lax 可积性, 非局域对称和可积逆梯队可以由

收稿日期: 2020-05-11.

宁波大学学报(理工版) 网址: <http://journal.lg.nbu.edu.cn/>

基金项目: 国家自然科学基金 (11975131).

作者简介: 楼森岳 (1957-), 男, 浙江宁波人, 教授, 主要研究方向: 非线性物理、应用数学、粒子物理和量子场论、非线性大气和海洋动力学. E-mail: lousenyue@nbu.edu.cn

Lax 算子得到;对于潘勒韦可积系统,非局域对称可以表现为留数对称;对于达布变换可积系统和贝克隆变换可积系统,非局域对称可由这些变换的无穷小变换来表达.某些非局域对称可以被局域化.非局域对称局域化后,可以很方便地得到相应的有限变换(Levi 变换、达布变换和贝克隆变换)和群不变解以及孤立子和各种其他非线性波的相互作用.最近,我们发现整族的一般局域对称和整族的非局域对称存在一一对应关系,即整族的非局域对称都可以局域化.非局域对称局域化的另一个有意义的副产品是 CRE/CTE 可积性的发现.

对于我们的“用别的办法能解决的问题都有可能能用对称性的办法来解决”的信念或猜想也许难以得到证明,但是已经由很多实例得到验证.这里列举一些具体例子:(1)任意一阶自治标量系统的所有解可以由对称性得到.(2)很多数学物理学家坚信可积系统的所有解都可以由达布变换得到,而达布变换可以由对称性来导出.(3)潘勒韦可积系统的所有解可以由关于任意奇性流形的无穷级数展开式来表示,潘勒韦展开式中包含足够多的任意函数,将所有任意函数作任意无穷小增量,然后按无穷小展开得到的所有一级无穷小的集合即潘勒韦可积系统的完备对称,其有限变换即为潘勒韦可积系统的所有解.(4)所有多线性分离变量可积系统的多线性分离变量解都可由一般条件对称得到.(5)包含 n 个任意函数(或参数)的特解(或实验数据拟合曲线),原则上可以通过用 n 个场的各阶偏导数来替换,替换后的解成为一般条件对称,应用这个一般条件对称于原方程即可得到原特解.

在非线性系统的对称性研究中,离散对称性用得很少.2013 年, Ablowitz 和 Musslimani 提出了一个非局域的非线性薛定谔方程;随后非局域系统成为非线性系统研究的一个热点.2016 年,我们提出所有的局域系统都存在非局域推广,关键点在于离散对称性的应用.因此,我们提出了多地系统和多地物理学的概念.特别对于二地系统,我们称之为 Alice-Bob 系统.各种非局域系统可以由更

高分量局域系统的离散对称性约化得到,从而非局域系统的求解可以直接使用局域系统的各种有效方法加离散对称条件约束得到.然而,非局域系统具有许多局域系统所没有的新的数学和物理特征.目前发现的最主要的新的数学和物理特征有:(1)描述各种遥相关事件可能的多地关联;(2)类似于量子系统的量子禁戒,对经典非局域系统存在经典禁戒;(3)非局域对称可引起结构相变;(4) Hirota 可积性的弱化;(5)大量一阶和二阶可积系统的出现;(6)新的非局域激发模式等.

大量的实际物理模型本质上都是不可积的问题,可积模型只是实际不可积系统的各种理想近似.因此,对于不可积系统对应的各种实际问题,可以引入各种微扰理论,以可定性描述实际问题的理想(可积)系统为零级近似,然后利用各种微扰方法来争取定量研究实际问题.各种微扰方法中,对称微扰方法和同伦对称微扰方法是非常有效的微扰和非微扰近似方法.运用对称性方法,我们还具体研究了一些与实际天气/气候相关的数学物理问题,如台风问题,洪水、干旱和雪灾相关的大气阻塞问题等.

为了将引力和其他 3 种相互作用统一起来,数学物理学家们引进了超对称的概念.对应的在非线性可积系统中自然引进了超对称可积系统.超对称可积系统中由于非对易的费米场的引入使得求解非常困难.为此,我们建立了玻色化方法,使得非对易系统可以通过可对易的系统来求解.最近,我们进一步引进了任对称的思想,由此可以成功建立和研究暗方程,研究二维拓扑物理中起关键作用的任意子问题,建立任代数和任微积分理论及任可积系统理论.

30 年来,宁波大学非线性科学课题组的对称性研究对宁波大学、浙江省甚至全国的非线性科学发展起到了一定的推动作用.本专辑中,各位专家对上述不少问题做了专题论述,相信本非线性物理专辑将对非线性科学的教学和研究发展起到些许积极作用.

(责任编辑 史小丽)