

高维可积模型构造和解析解

林 机

(浙江师范大学 物理系, 浙江 金华 321004)

摘要: 根据 Virasoro 可积性(具有无限维无中心 Virasoro 型对称代数意义下的可积性)的定义建立了一种系统构造(3+1)维 Virasoro 可积模型的方法. 利用广义 Virasoro 型对称代数的每一种具体实现, 可以得到大量的高维 Virasoro 意义下可积模型. 同时, 还获得了具有共形不变性、Painlevé 和 Lax 对意义下的高维可积方程. 最后, 研究了部分方程的解析解.

关键词: Virasoro 对称代数; 高维模型; 解析解; 可积性

中图分类号: O411

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0003-05

近几十年来, 人们已经找到了众多(1+1)维和(2+1)维的完全可积模型, 即具有无穷多对称、反散射可解、具有 Lax 对、具有双线性形式、具有 Darboux 变换等性质的模型^[1-9]. 但对高维可积模型还知之甚少, 特别是(3+1)维及更高维的可积模型. 因此, 寻找高维可积模型, 特别是具有实际意义的高维可积模型已成为许多数学家和物理学家感兴趣的重要研究课题. 例如, Calogero 等^[10]利用(1+1)维的强对称算子已经方便地得到了一类(2+1)维可积模型, 他们又利用渐近 Fourier 展开法, 得到了与原方程具有相同维数的新可积模型^[10-13]; 我国著名数学家谷超豪院士已将 AKNS 方程和(2+2)维杨-Mills 场方程推广到高维条件可积情形(称方程数多于应变变量数的可积模型为条件可积)^[14]; Jimbo 和 Miwa 给出的 Kadomtsev-Petviashvili(KP)梯队(hierarchy)亦可看成是高维条件可积模型^[15]; 楼森岳教授利用强对称算子方法^[16]、非局域对称约束和 Lax 对^[17-18]、共形不变^[19]及广义 Virasoro 对称代数方法^[20]等寻找(3+1)维, 甚至更高维可积模型方面做了大量开创性工作.

本文将进一步利用广义 Virasoro 对称代数方法、共形不变方法和不同对称, 寻求高维在其他意义下可积的模型, 并研究一些高维模型的可积性质和精确解.

1 高维 Virasoro 可积系统的构造

首先, 我们构造在广义 Virasoro 意义下可积的(3+1)维模型. 众所周知, 所有已知的(2+1)维可积模型都具有如下一个完全同构的无限维的广义的无中心 Virasoro 对称代数:

$$[\sigma(f_1), \sigma(f_2)] = \sigma(\dot{f}_2 f_1 - f_1 \dot{f}_2), \quad (1)$$

其中: σ 是对称代数的生成元; f 是某个自变量(如时间 t)的任意函数, 且原模型与 f 无关; $\dot{f}$ 表示 f 关于其应变变量的一阶导数. 而所有已知的(2+1)维不可积模型都不具有这种对称代数. 根据这一事实, 楼森岳等提出了具有广义 Virasoro 对称代数意义下的可积性概念^[21], 即若一个高维模型具有广义的 Virasoro 对称代数式(1), 则称该模型是 Virasoro 可积的. 我们将此思想推广到(3+1)维真实的物理系统, 寻找高维可积模型. 具体地, 实现广义对称代数式(1)的向量场应有如下形式:

$$\begin{aligned} V = & X(x, y, z, t, u) \partial_x + Y(x, y, t, u) \partial_y + \\ & Z(x, y, t, u) \partial_z + T(x, y, t, u) \partial_t + \\ & U(x, y, t, u) \partial_u, \end{aligned} \quad (2)$$

为了具体实现李代数式(1), 我们选择式(1)中的 f 是关于 t 的函数, 并限制 T 、 X 、 Y 、 Z 和 U 为:

$$T = f(t),$$

$$\{X, Y, Z, U\} = \left\{ \sum_{i=1}^n f^{(i)} X_i, \sum_{i=1}^n f^{(i)} Y_i, \sum_{i=1}^n f^{(i)} Z_i, \sum_{i=1}^n f^{(i)} U_i \right\},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

同样, 我们还必须给出标量函数 u 的各阶偏导数 $u_x, u_y, \dots, u_{x^i y^j z^m t^n}$ 的所有扩张. (3+1) 维中 k 级延长结构的一般形式为:

$$pr^k V = V + U^x \partial_{u_x} + U^y \partial_{u_y} + U^z \partial_{u_z} + U^t \partial_{u_t} + \dots + \sum_{1 \leq i+j+m+n \leq k} U^{x^i y^j z^m t^n} \partial_{u_{x^i y^j z^m t^n}}, \quad (4)$$

$$U^{x^i y^j z^m t^n} = D_x U^{x^{i-1} y^j z^m t^n} - (D_x X) u_{x^{i-1} y^j z^m t^n} - (D_x Y) u_{x^{i-1} y^{j+1} z^m t^n} - (D_x Z) u_{x^{i-1} y^j z^{m+1} t^n} - (D_x T) u_{x^{i-1} y^j z^m t^{n+1}}, \quad (5)$$

其中: D_x, D_y, D_z 和 D_t 是全微分. 对于每个满足 Virasoro 李代数式(1)的对称, 利用式(5), 即可求得相应的 k 级扩张及相应的(3+1)维的群不变方程:

$$\Delta(x, y, z, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t, \dots, u_{x^i y^j z^m t^n}, \dots) = 0, \quad (6)$$

其中: 函数 Δ 满足:

$$pr^{(k)} V \cdot \Delta = 0. \quad (7)$$

接着是寻找式(7)的用自变量 x, y, z, t 和因变量 u 表示的特征解. 从特征解中可得到一组积分不变量 $I_r(x, y, z, t, u, \dots, u_{x^i y^j z^m t^n})$ ($1 \leq i+j+p+q \leq k, r=1, 2, 3, \dots$), 而群不变方程(6)可改写成:

$$H(I_1, I_2, I_3, \dots, I_r, \dots) = 0, \quad (8)$$

其中: 所有的群不变量可从下列特征方程求得:

$$\frac{dt}{T} = \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{du}{U} = \dots = \frac{du_{x^i y^j z^m t^n}}{U^{x^i y^j z^m t^n}} = \dots, \quad (9)$$

具体地, 将向量场 V 的各级扩张代入式(9), 然后进行简单的积分计算, 就可得到众多的群不变量; 再由群不变量即可得到一般的群不变量方程. 一般地, 类似(2+1)维的情形, 这样得到的不变量方程往往是与 f 相关的. 为了得到在具有 Virasoro 对称代数意义下可积的(3+1)维方程, 必须从中找出与 f 无关的群不变量方程. 对于满足 Virasoro 对称代数式(1)的不同的具体实现, 可给出许多不同的群不变方程. 为了得到有意义的(3+1)维可积模型, 必须选择多种具体实现来构造大量的模型^[22-25].

这里举几个具体对称实现可得到(3+1)维在具

有 Virasoro 对称代数意义下可积模型的例子.

例1 选择对称代数关系式(1)中的实现为:

$$\sigma_1 = V_1 = -f(t) \partial_t - c_2 x \dot{f} \partial_x - c_3 y \dot{f} \partial_y - c_4 z \dot{f} \partial_z + (c_1 u \dot{f} + 2c_5 yz) \partial_u, \quad (10)$$

其中: c_1, c_2, c_3 和 c_4 满足 $c_4 + c_3 + c_1 = 1$, 可得到至少以下3个具有 Virasoro 对称代数意义下可积的(3+1)维方程:

$$u_{xt} + A(u_y u_{xz} + u_z u_{xy}) + B u_{yy} + C u_{zz} = 0, \quad (11)$$

$$u_{xt} - A(u_y u_{xz} - u_x u_{yz}) - C(u_z u_{xy} + u_x u_{yz}) + B u_{yy} = 0, \quad (12)$$

$$u_{xt} + A u_x u_{yz} + B u_y u_{xz} + C u_z u_{xy} = 0. \quad (13)$$

例2 选择以下实现:

$$\sigma_2 = V_2 = f(t) \partial_t + (c_2 x \dot{f} + c_5 \ddot{f}) \partial_x + c_3 y \dot{f} \partial_y + c_4 z \dot{f} \partial_z + (c_1 u \dot{f} + c_6 xy z \ddot{f}) \partial_u, \quad (14)$$

可获得在具有 Virasoro 对称代数性质意义下可积的(3+1)维模型:

$$2c_6(u_{xt} u_{xxxx} - u_{xxx} u_{xxx}) + (2c_2 - c_1) u_{xx} u_{xxxx} u_{xyz} - (3c_2 - c_1) u_{xyz} u_{xxx}^2 + c_3 u_{xz} (u_{xy} u_{xxx} - u_{xxx} u_{xxx}) + c_4 u_{yz} (u_{xxx} u_{xxx} - u_{xxx} u_{xxx}) = 0, \quad (15)$$

$$u_{xt} + A u_{yz} u_{xt} + B u_{xz} u_{xy} + C u_{yz} u_{xz} + (A + B - 2C - 1/2c_6) u_{yz} u_{xxx} = 0, \quad (16)$$

其中: A, B, C 为任意常数.

例3 选择如下的对称实现:

$$\sigma_3 = V_3 = f(t) \partial_t + (c_2 x \dot{f} + c_5 \ddot{f}) \partial_x + c_3 y \dot{f} \partial_y + c_4 z \dot{f} \partial_z + (c_1 u \dot{f} + c_6 xy z \ddot{f}) \partial_u, \quad (17)$$

也能获得具有性质的高维可积模型:

$$c_6(u_{xt} u_{xxxx} - u_{xxx} u_{xxx}) + (2c_2 - c_1) u_{xx} u_{xxxx} u_{yz} - (3c_2 - c_1) u_{yz} u_{xxx}^2 + c_3 u_{xz} (u_{xx} u_{xxx} - u_{xxx} u_{xxx}) + c_4 u_{xy} (u_{xxx} u_{xxx} - u_{xxx} u_{xxx}) = 0, \quad (18)$$

其中: c_3, c_4 和 c_6 是任意常数.

另外, 研究发现, 利用 Virasoro 对称代数方法可将一些著名的(2+1)维可积模型扩展为(3+1)维模型, 如取对称实现为:

$$\sigma_4 = V_4 = -f(t) \partial_t - c_2 x \dot{f} \partial_x - c_3 y \dot{f} \partial_y - c_4 z \dot{f} \partial_z + (c_1 u \dot{f} + c_5 xy z \ddot{f}) \partial_u, \quad (19)$$

给出的高维模型为:

$$u_{xxt} + Au_{xxx}u_{yz} + Bu_{xyy}u_{xz} + Cu_{xy}u_{xxz} + Du_{xx}u_{xyy} + eu_{xxx}u_{yz} = 0, \quad (20)$$

其中: A 、 B 、 C 、 D 和 e 是任意常数. 我们发现当 $z = x$, $u_x = v$ 时, 方程(20)退化为(2+1)维可积破裂孤子方程:

$$v_{xt} = (B + D)v_x v_{xy} + (A + C)v_y v_{xx} + v_{xxx}, \quad (21)$$

即方程(20)是(2+1)维破裂孤子方程在(3+1)维中的扩展. 对于不同的对称实现, 我们还可得到:

$$u_{yzt} + au_{yyy}u_{yz} + bu_{xz}u_{xyy} + cu_{yy}u_{yyz} + (9c - 2b)u_{xx}u_{yz} + (12c - 2b - 3a)u_{xx}u_{yz} + eu_{yyy}u_{yz} + hu_{xxx}u_{yz} = 0, \quad (22)$$

如果 $a = c$, $b = 0$, $z = x$, (3+1)维Virasoro意义下可积方程(22)将退化为(2+1)维的 Nizhnik-Novikov-Veselov(NNV)可积方程:

$$u_{xyt} + a(u_{xy}u_{xyy} + u_{yy}u_{xyy}) + 9a(u_{xx}u_{xyy} + u_{xxx}u_{xy}) + eu_{yyy} + hu_{xxx} = 0, \quad (23)$$

即方程(22)是(2+1)维NNV方程在(3+1)维的扩展.

2 高维 Lax 对可积系统的构造

Calogero 等^[10-11]提出了所谓的渐近 Fourier 展开约化方法来获得一些新的可积模型. 这种约化方法体现了非线性项在方程中的重要性. 由于这种方法能保证方程的一些可积性不变, 因此, 约化而得的方程也是在某些意义下可积的. 这种约化方法不仅可以解释方程的可积性, 而且可用于研究可积方程之间的关系, 甚至检验非线性偏微分演化方程的可积性; 最重要的是能说明可积演化方程之间的相互关系. 另外, 此约化方法还可应用于常微分方程来构造近似解^[26-27].

近来, Maccari^[28]将渐近 Fourier 展开约化方法用于一些(1+1)维和(2+1)维具有 Lax 对的可积模型, 得到了一些新的有着相同维数、也在 Lax 对意义下可积的模型, 并得到了一个在等离子体物理中具有广泛应用的重要模型. 从一个(2+1)维可积源模型:

$$U_t - U_{xxx} - 6\beta U U_x - \frac{2}{3}\alpha^2 \beta U^2 U_x + 3W_y + 3\alpha U_x W = 0, \quad W_x = U_y \quad (24)$$

出发, 利用Calogero建立的渐近Fourier约化方法得到一个相同维数广义DSI模型:

$$i\Psi_\tau + L_1\Psi + \chi\Psi + \Phi\Psi = 0, \quad L_2\chi = L_3|\Psi|^2, \quad (25)$$

$$\Phi_\xi = \chi_\eta \pm |\Psi|_\eta^2,$$

其中:

$$L_1 = \frac{a^2 + b^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

$$L_2 = \frac{b^2 - a^2}{4} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - a \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

$$L_3 = \pm \left(\frac{b^2 - a^2}{4} + \frac{2(a-1)b^2}{(a-2)^2 + b^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mp \left(a - \frac{2b^2}{(a-2)^2 + b^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \mp \frac{\partial^2}{\partial \eta^2},$$

其中: $a = \alpha K_2 / (\beta K_1)$, $b = \alpha K_1 / \beta$, $\Psi = \Psi(\xi, \eta, \tau)$ 为复函数, $\Phi = \Phi(\xi, \eta, \tau)$, $\chi = \chi(\xi, \eta, \tau)$ 为实函数. 这个(2+1)维的广义DSI方程具有Lax对. 根据原方程的Lax对, 可以得到新方程的Lax对, 即

$$L\hat{\phi} = 0, \quad \hat{\phi}_\tau + A\hat{\phi} = 0, \quad (26)$$

$$L = \begin{pmatrix} \partial_\eta + \frac{a-b}{2}\partial_\xi & i\frac{a+b-2}{\sqrt{2(a-2)^2+2b^2}}\Psi \\ i\frac{a-b-2}{\sqrt{2(a-2)^2+2b^2}}\Psi^* & \partial_\eta - \frac{a+b}{2}\partial_\xi \end{pmatrix},$$

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1\partial_\xi^2 + a_2\chi + a_3|\Psi|^2 + a_4\Phi & \rightarrow \\ b_4\Psi^*\partial_\xi + b_6\Psi_\xi^* + b_7\Psi_\eta^* & \\ \leftarrow & a_5\Psi\partial_\xi + a_6\Psi_\xi + a_7\Psi_\eta \\ b_1\partial_\xi^2 + b_2\chi + b_3|\Psi|^2 + b_4\Phi & \end{pmatrix}, \quad (28)$$

从Lax对的相容条件:

$$L_\tau = [L, A], \quad (29)$$

给出广义(2+1)维DSI方程(25).

3 (3+1)维可积模型的精确解

用不同的方法研究一些(3+1)维模型的精确解. 如楼森岳^[29]推广了WTC法中的Pickering^[30]非标准Painlevé截断展开, 分析了(3+1)维Painlevé可积模型的精确解; Lou^[31]运用双线性Hirota方法得到了(3+1)维KdV方程的类dromion结构及Toda等研究的(3+1)维方程的行波解. 这里, 研究得到的(3+1)

维几个方程的精确解仅以(3+1)维的破裂孤子方程(20)为例, 令 $v = u_x$, $w = u_y$, 可改写成如下的场量 u 的势形式体系:

$$v_{xt} + \frac{b+c}{4}v_{xx}w_z + bw_{xx}v_z + cv_yv_{xz} + \frac{b+c}{4}v_xv_{yz} + ev_{xyz} = 0, \quad v_y = w_x, \quad (30)$$

利用标准的 WTC 截断展开, 得到 v 和 w 的精确解:

$$v = \frac{8ek_1}{(b+c)(1+e^{(-k_1x-f)})}, \quad (31)$$

$$w = \frac{8e}{b+c} \left(\frac{f_y}{1+e^{(-k_1x-f)}} + g^{-1}g_y \right) + w_1,$$

其中: b 、 c 、 e 和 k_1 是任意常数; $f \equiv f(y, z, t)$ 是一个新引入的与 x 无关的任意函数, 而 g 和 w_1 满足:

$$2g_t - ek_1g_{yz} + ek_1(2g^{-1}g_yg_z + f_yg_z + f_zg_y) = 0,$$

$$\frac{b+c}{4}k_1w_{1z} + f_t + ek_1(f_{yz} + f_yf_z) + (f_t + ek_1(f_yg_z + f_zg_y + g_{yz}))g^{-1} = 0, \quad (32)$$

这里 $g = g(y, z, t)$, $w_1 = w_1(y, z, t)$.

由于函数 $f(y, z, t)$ 的任意性, 通过适当选择函数 f 可以得到(3+1)维方程的丰富结构解, 如单曲面孤子、环孤子、曲面孤子形成的 dromion 解等. 对于(3+1)维的 NNV 方程, 同样可得到多孤子解^[25].

4 总结与讨论

我们建立了一种构造高维 Virasoro 可积模型的方法, 利用 Virasoro 型对称代数的每一种具体实现, 可以得到大量的高维 Virasoro 可积模型. 选择了多种具体的(3+1)维真实物理时空的实现, 给出了一些具有 Virasoro 型对称代数的(3+1)维模型. 其中有些是数学物理界众所周知的(2+1)维可积模型, 如(2+1)维破裂孤子方程和(2+1)维 NNV 方程在(3+1)维中的推广. 利用 WTC 奇性分析方法的 Kruskal 简化形式, 我们发现有些(3+1)维 Virasoro 可积模型同时也是 Painlevé 可积的. 另外, 渐近 Fourier 展开约化方法是从可积的源模型中得到具有相同维数新的可积方程, 我们利用此方法得到了具有 Lax 对的广义 DSI 模型. 进一步应用标准的 Painlevé 截断展开形式得到了(3+1)维破裂孤子方程, 同样得到了丰富的局域结构, 如单曲面孤子、环孤子(由圆柱隐孤子)、平面隐孤子(或曲面隐孤

子形成的)和 dromion 解. 对于(3+1)维 NNV 方程, 通过标准的 Painlevé 截断展开形式, 得到了方程的一些单孤波解、二孤子解和三孤子解. 由于高维模型的解中通常包含任意函数, 从而可以肯定, 高维模型中存在丰富的局域相干结构应是普遍的现象.

参考文献:

- [1] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1990.
- [2] Rogers C, Shadwick W F. Bäcklund Transformations and Their Applications[M]. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [3] Wahlquist H D, Estabrook F B. Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg-de Vries equation[J]. Physical Review Letters, 1973, 31(23):1386-1390.
- [4] Gu C H. On the Bäcklund transformations for the generalized hierarchies of compound MKdV-SG equations [J]. Letters in Mathematical Physics, 1986, 12(1):31-41.
- [5] Gu C H, Hu H S. A unified explicit form of Bäcklund transformations for generalized hierarchies of KdV equations[J]. Letters in Mathematical Physics, 1986, 11(4):325-335.
- [6] Liu Q P. Modifications of k -constrained KP hierarchy[J]. Physics Letters A, 1994, 187(5/6):373-381.
- [7] Liu Q P, Xiong C S. The $W_3(2)$ algebra and the related hierarchies[J]. Physics Letters B, 1994, 327(3/4):257-265.
- [8] Gardner C S. Korteweg-de Vries equation and generalizations IV: The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system[J]. Journal of Mathematical Physics, 1971, 12(8):1548-1551.
- [9] Bogoyavlensky O. Five constructions of integrable dynamical systems connected with the Korteweg-de Vries equation[J]. Acta Applicandae Mathematica, 1988, 13(3): 227-266.
- [10] Calogero F, Eckhaus W. Nonlinear evolution equations, rescalings, model PDEs and their integrability: I[J]. Inverse Problems, 1987, 3(2):229-262.
- [11] Calogero F, Eckhaus W. Nonlinear evolution equations, rescalings, model PDEs and their integrability: II[J]. Inverse Problems, 1988, 4(1):11-33.
- [12] Maccari A. The Kadomtsev-Petviashvili equation as a source of integrable model equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1996, 37(12):6207-6212.
- [13] Maccari A. The Boussinesq equation as a source of equations integrable by the spectral transform[J]. Nonlinearity, 1997, 10(4):849-856.
- [14] Maccari A. A generalized Hirota equation in 2+1

- dimensions[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1998, 39(12):6547-6551.
- [15] Maccari A. Non-resonant interacting ion acoustic waves in a magnetized plasma[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1999, 32(4):693-709.
- [16] 楼森岳. 高维可积模型探索[J]. *中国科学(A 辑)*: 1997, 27(10):941-948.
- [17] Lou S Y, Hu X B. Infinitely many Lax pairs and symmetry constraints of the KP equation[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1997, 38(12):6401-6427.
- [18] Lou S Y. (2+1)-dimensional integrable models from the constraints of the KP equation[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 1997, 27(2):249-252.
- [19] Lou S Y. KdV extensions with Painlevé property[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1998, 39(4):2112-2121.
- [20] Lin J, Lou S Y, Wang K L. (3+1)-dimensional integrable models with infinitely dimensional Virasoro type symmetry algebra and the Painlevé property[J]. *Zeitschrift Für Naturforschung A*, 2000, 55(6/7):589-594.
- [21] Lou S Y, Hu X B. Infinitely many symmetries of the Davey-Stewartson equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1994, 27(7):L207-L212.
- [22] Lin J, Lou S Y, Wang K L. High-dimensional integrable models with infinitely dimensional Virasoro-type symmetry algebra[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2001, 35(1):7-10.
- [23] 林机, 汪克林. 具有广义 Virasoro 对称代数的(3+1)维 Painlevé 可积模型[J]. *物理学报*, 2001, 50(1):13-20.
- [24] Lin J, Lou S Y, Wang K L. High-dimensional Virasoro integrable models and exact solutions[J]. *Physics Letters A*, 2001, 287(3/4):257-267.
- [25] Lin J, Qian X M. High-dimensional integrable models with conformal invariance[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2003, 40(3):259-261.
- [26] Maccari A. The non-local oscillator[J]. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, 1996, 111(8):917-930.
- [27] Maccari A. The dissipative non-local oscillator in resonance with a periodic excitation[J]. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, 1996, 111(10):1173-1186.
- [28] Maccari A. A new integrable Davey-Stewartson-type equation[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1999, 40(8):3971-3977.
- [29] 楼森岳. 推广的 Painlevé 展开及 KdV 方程的非标准截断解[J]. *物理学报*, 1998, 47(12):1937-1945.
- [30] Pickering A. A new truncation in Painlevé analysis[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1993, 26(17):4395-4405.
- [31] Lou S Y. Dromion-like structures in a (3+1)-dimensional KdV-type equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1996, 29(18):5989-6001.

High-dimensional integrable model construction and analytical solution

LIN Ji

(Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

Abstract: On the basis of the definition of Virasoro's integrability (with infinite dimensional and no-center Virasoro-type symmetric algebra), the method of constructing higher-dimension Virasoro of integrable model is presented. A large number of higher-dimensions integrable models can be obtained through each of specific realizations of the generalized Virasoro-type symmetric algebra. In addition, the high-dimensional integrable equations with conformally invariance, Painlevé and Lax pair are also obtained. Finally, the analytical solutions of some equations are studied.

Key words: Virasoro symmetric algebra; higher-dimensional integrable model; exact solutions; integrability

(责任编辑 史小丽)