

玻色化方法在超对称可积系统的应用

任 博, 俞 军

(绍兴文理学院 物理系, 浙江 绍兴 312000)

摘要: 利用玻色化方法可以避免超对称可积系统中反对易费米场带来的计算困难. 本文以 $N=1$ 超对称mKdVB系统为例, 利用玻色化方法, 将其转化为只有玻色场的耦合系统. 应用标准的WTC方法, 证明了该耦合系统具有Painlevé性质. 运用Painlevé截断方法, 可以得到玻色化后超对称mKdVB系统的非局域对称. 为了求解与非局域对称相关的Lie第一性原理, 引入新的场将玻色化后系统拓展为更大的系统. 通过引入新的场, 该非局域对称局域化为Lie点对称. 因此, 可以利用Lie点对称约化方法研究拓展后的系统, 得到超对称mKdVB系统的孤子与其他孤波相互作用解.

关键词: 超对称可积系统; 玻色化方法; Painlevé性质; 非局域对称; 对称约化

中图分类号: O411.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0008-07

超对称理论指出每一种基本粒子都有与之对应的超对称伙伴粒子, 该理论的研究起源于20世纪70年代. 在欧洲大型强子对撞机实验中, 一个重要实验目标就是寻找超对称粒子. 到目前为止, 实验中尚未发现超对称粒子存在的证据. 理论上, 利用超对称理论可以解释高能物理标准模型质量等级问题, 标准模型理论框架下圈图发散问题, 强、电磁与弱相互作用在大统一能标耦合常数不相等问题, 宇宙观察存在暗物质的问题等^[1]. 此外, 超对称在非线性的可积系统的应用也是目前非常热门的研究课题.

超对称进入到可积系统中, 极大地拓宽了非线性可积系统的研究范围. 超对称非线性可积系统是利用非线性可积系统引入了一种具有反对易性质的参量(Grassmann奇参量)构造得到. 超对称非线性可积系统是超对称玻色场和费米场耦合的超对称系统, 该系统在超对称变换下保持不变, 且在费米场趋于零时, 超对称系统退化为最初的非线性可积系统. 1984年, 数学物理学家Kupershmidt通过引入1个Grassmann参量, 对空间超化构造了 $N=1$ 的超对称Korteweg-de Vries(KdV)方程, 且超对称KdV方程在空间超对称变换下保持不变^[2]. 1985年, Manin

等^[3]对空间超化构造了超Kadomtsev-Petviashvili (KP)系列方程, 通过约化超KP方程可得到超KdV方程, 还得到了超KdV方程的Lax对和守恒律等可积性质. 随后, 通过引入2个、3个和4个Grassmann参量, 构造了 $N=2,3,4$ 的超对称KdV方程^[4-5]. 除了对空间超化外, 刘青平教授等通过对时间超化得到了超对称Ito方程, 并构造了超对称Ito方程的Lax对, 非线性叠加公式和孤子解等性质^[6]. 范恩贵教授结合超对称KdV方程和超对称Sawada-Kotera-Ramani方程构造了超对称KdV-Sawada-Kotera-Ramani方程, 并应用超黎曼函数和双线性形式得到了该方程的准周期解等性质^[7].

对于超对称可积系统, 由于超对称系统存在了费米场, 费米场的反对易性给处理超对称系统带来诸多不便. 最近, 有学者提出一种玻色化方法, 该方法引入2个新的费米场, 可以把 $N=1$ 超对称系统转化为只有玻色场的耦合系统, 可以避免超对称方程中反对易费米场带来的计算困难^[8]. 楼森岳教授等拓展了玻色化方法, 引入任意费米场研究 $N=1$ 超对称可积系统, 得到了一些不同于利用其他方法的研究结果^[9-10]. 我们应用玻色化方法具体研究了 $N=2$ 的超对称KdV系统, 得到了超对称KdV系统的

行波解和对称约化解^[11].

本文将研究B形式的超对称mKdV系统(超对称mKdVB), 说明玻色化方法在超对称可积系统的应用. 具体结构如下: 第2部分利用玻色化方法, 将超对称mKdVB系统转化为只有玻色场的耦合系统; 应用标准的奇异分析, 证明耦合系统有Painlevé性质. 第3部分利用Painlevé截断方法, 得到了玻色化后系统的非局域对称; 通过引入新的场可以得到非局域对称相关的有限对称变换. 第4部分, 应用标准Lie点对称约化方法, 构造了玻色化后超对称mKdVB系统的群不变解. 最后是总结和讨论.

1 玻色化方法在超对称 mKdVB 系统的应用

B形式的超对称mKdV系统为^[12-13]:

$$\Phi_t + D^6 \Phi - 6(D\Phi)^2 D^2 \Phi = 0, \quad (1)$$

其中: $D = \partial_\theta + \theta \partial_x$ 是协变导数; 场 $\Phi(\theta, x, t) = \xi(x, t) + \theta v(x, t)$ 是超场. 对应超对称mKdVB方程(1)的分量形式为:

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \quad (2a)$$

$$\xi_t - 6u^2 \xi_x + \xi_{xxx} = 0, \quad (2b)$$

式(2a)是与费米场无关的变量; 式(2b)是关于费米场变量的线性方程; 因此, 方程(2)是B形式的超对称mKdV系统^[12-13]. 为了避免方程(2)中不对易费米场带来的计算问题, 引入2个额外的费米场 ζ_1 和 ζ_2 , 耦合场 ξ 和 u 可以有如下展开形式^[14-15]:

$$\xi(x, t) = p\zeta_1 + q\zeta_2, \quad (3a)$$

$$v(x, t) = u + w\zeta_1\zeta_2, \quad (3b)$$

其中: ζ_1 和 ζ_2 是2个Grassmann参量; u, p, q 和 w 是4个关于时间和空间变量的实或者复函数. 将方程(3)代入方程(2), 得到如下玻色化的超对称mKdVB系统:

$$r_{kt} - 6u^2 r_{kx} + r_{kxxx} = 0, \quad (4a)$$

$$w_t - 6(wu^2)_x + w_{xxx} = 0, \quad (4b)$$

其中: r_k 代表 u, p 和 q 变量. 玻色化后的超对称mKdVB系统(4)包含了mKdV方程和关于 w 的线性偏微分方程.

利用标准的 Weiss、Tabor 和 Carnevale (WTC) 方法, 玻色化后的超对称 mKdVB 系统(4)具有 Painlevé 性质, 玻色场 u, p, q 和 w 在奇异流形

$\phi(x, t) = 0$ 附近展开为^[16]:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j-\alpha_1}, \quad p = \sum_{j=0}^{\infty} p_j \phi^{j-\alpha_2}, \\ q &= \sum_{j=0}^{\infty} q_j \phi^{j-\alpha_3}, \quad w = \sum_{j=0}^{\infty} w_j \phi^{j-\alpha_4}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中: u_j, p_j, q_j 和 w_j 是关于空间和时间的函数. 将方程(5)代入系统(4), 利用领头项分析, 常数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 和 α_4 为:

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = 2, \quad (6)$$

通过比较 $\{\phi^{j-4}, \phi^{j-4}, \phi^{j-4}, \phi^{j-5}\}$ 幂次项, 可以得到 u_j, p_j, q_j 和 w_j 的递推关系, 其中共振点 j 值为:

$$j = -1, 0, 0, 0, 1, 1, 3, 4, 4, 5, 5, 5, \quad (7)$$

在相应的共振点 u_j, p_j, q_j 和 w_j 中存在 12 个任意函数 $\phi, p_0, q_0, w_0, p_1, q_1, u_3, u_4, w_4, p_5, q_5$ 和 w_5 , 从而证实上述共振条件满足. 因此, 超对称mKdVB系统(4)是 Painlevé 可积系统.

为了构造系统(4)的Bäcklund变换, Laurent级数展开为^[16]:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\phi_x}{\phi} + u_1, \quad p = \frac{p_0}{\phi} + p_1, \quad q = \frac{q_0}{\phi} + q_1, \\ w &= \frac{w_0}{\phi^2} - \frac{(w_0 / \phi)_x}{\phi} + w_2, \end{aligned} \quad (8)$$

将方程(8)代入系统(4), 通过消除 ϕ 的幂次可以得到以下Bäcklund变换定理.

定理1(Bäcklund变换定理) 场 ϕ, p_0, q_0 和 w_0 满足下面玻色化后超对称mKdVB系统的Schwarzian形式:

$$\phi_t + \phi_{xxx} - \frac{3}{2} \frac{\phi_{xx}^2}{\phi_x} = 0, \quad (9a)$$

$$p_{0t} + p_{0xxx} - \frac{3p_{0xx}\phi_{xx}}{\phi_x} + \frac{3}{2} \frac{\phi_{xx}^2 p_{0x}}{\phi_x^2} = 0, \quad (9b)$$

$$q_{0t} + q_{0xxx} - \frac{3q_{0xx}\phi_{xx}}{\phi_x} + \frac{3}{2} \frac{\phi_{xx}^2 q_{0x}}{\phi_x^2} = 0, \quad (9c)$$

$$\begin{aligned} w_{0t} + w_{0xxx} - \frac{6\phi_{xx}w_{0xx}}{\phi_x} - \frac{3\phi_{xxx}w_{0x}}{\phi_x} + \\ \frac{6w_0\phi_{xx}\phi_{xxx}}{\phi_x^2} + \frac{27\phi_{xx}^2 w_{0x}}{2\phi_x^2} - \frac{12w_0\phi_{xx}^3}{\phi_x^3} = 0. \end{aligned} \quad (9d)$$

玻色化后的超对称 mKdVB 方程的解 $\{u, p, q, w\}$ 和 $\{u_1, p_1, q_1, w_2\}$ 满足 Bäcklund 变换式(8), 其中 $\{u_1, p_1, q_1, w_2\}$ 和 $\{\phi, p_0, q_0, w_0\}$ 有如下关系:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\phi_{xx}}{2\phi_x}, p_1 = -\frac{p_{0x}}{2\phi_x}, q_1 = \frac{q_{0x}}{2\phi_x}, \\ w_2 &= \frac{w_{0xx}}{2\phi_x^2} - \frac{w_0\phi_{xxx}}{2\phi_x^3} - \frac{3w_{0x}\phi_{xx}}{2\phi_x^3} + \frac{3w_0\phi_{xx}^2}{2\phi_x^4}. \end{aligned} \quad (10)$$

定理 1 包括自 Bäcklund 变换式(8)和非自 Bäcklund 变换式(10).

2 玻色化后超对称 mKdVB 系统的非局域对称和有限对称变换

场 u, p 和 q 满足方程(4a), 假定场 u, p 和 q 的解相等. 由 Bäcklund 变换式(8)可以得到:

$$u = \frac{\phi_x}{\phi} + u_1, w = \frac{w_0}{\phi^2} - \frac{(w_0/\phi_x)_x}{\phi} + w_2, \quad (11)$$

场 u_1 和 w_2 可以表示为:

$$u_1 = -\frac{\phi_{xx}}{2\phi_x}, \quad (12a)$$

$$w_2 = \frac{w_{0xx}}{2\phi_x^2} - \frac{w_0\phi_{xxx}}{2\phi_x^3} - \frac{3w_{0x}\phi_{xx}}{2\phi_x^3} + \frac{3w_0\phi_{xx}^2}{2\phi_x^4}, \quad (12b)$$

利用方程(11)关于奇异流形 ϕ 的留数对称可以得到玻色化的超对称 mKdVB 系统的非局域对称, 因此, 该非局域对称称为留数对称^[10]. 玻色化的超对称 mKdVB 系统的非局域对称称为:

$$\sigma^u = \phi_x, \sigma^w = -\frac{w_{0x}}{\phi_x} + \frac{\phi_{xx}w_0}{\phi_x^2}. \quad (13)$$

对于非局域对称式(13), 由于存在函数 ϕ, w_0 及其导数, 直接运用求解 Lie 第一性原理的初值定理较困难. 为了求解与非局域对称式(13)相关的初值问题, 利用引入新的场, 使非局域对称拓展后新系统为 Lie 点对称. 新的场是 ϕ 和 w_0 场空间导数形式:

$$\phi_x = g, \quad (14a)$$

$$g_x = h, \quad (14b)$$

$$w_{0x} = f, \quad (14c)$$

延拓后系统(4)、(12)和(14)的 Lie 点对称形式为:

$$\sigma^u = -g, \quad (15a)$$

$$\sigma^w = \frac{f}{g} - \frac{w_0h}{g^2}, \quad (15b)$$

$$\sigma^\phi = \phi^2, \quad (15c)$$

$$\sigma^{w_0} = 4w_0\phi, \quad (15d)$$

$$\sigma^g = 2\phi g, \quad (15e)$$

$$\sigma^h = 2\phi h + 2g^2, \quad (15f)$$

$$\sigma^f = 4\phi f + 4w_0g. \quad (15g)$$

对于 Lie 点对称式(15), 相应的初值问题为:

$$\frac{d\bar{u}}{d\epsilon} = -\bar{g}(\epsilon), \bar{u}|_{\epsilon=0} = u, \quad (16a)$$

$$\frac{d\bar{w}}{d\epsilon} = \frac{\bar{f}(\epsilon)}{\bar{g}(\epsilon)} - \frac{\bar{w}_0(\epsilon)\bar{h}(\epsilon)}{\bar{g}(\epsilon)^2}, \bar{w}|_{\epsilon=0} = w, \quad (16b)$$

$$\frac{d\bar{\phi}}{d\epsilon} = \bar{\phi}(\epsilon)^2, \bar{\phi}|_{\epsilon=0} = \phi, \quad (16c)$$

$$\frac{d\bar{w}_0}{d\epsilon} = 4\bar{\phi}(\epsilon)\bar{w}_0(\epsilon), \bar{w}_0|_{\epsilon=0} = w_0, \quad (16d)$$

$$\frac{d\bar{g}}{d\epsilon} = 2\bar{\phi}(\epsilon)\bar{g}(\epsilon), \bar{g}|_{\epsilon=0} = g, \quad (16e)$$

$$\frac{d\bar{h}}{d\epsilon} = 2\bar{g}(\epsilon)^2 + 2\bar{\phi}(\epsilon)\bar{h}(\epsilon), \bar{h}|_{\epsilon=0} = h, \quad (16f)$$

$$\frac{d\bar{f}}{d\epsilon} = 4\bar{w}_0(\epsilon)\bar{g}(\epsilon) + 4\bar{\phi}(\epsilon)\bar{f}(\epsilon), \bar{f}|_{\epsilon=0} = f, \quad (16g)$$

通过求解上面的初值问题式(16), 可以得到拓展系统(4)、(12)和(14)的 Bäcklund 变换定理.

定理 2 如果 u, w, ϕ, w_0, g, h 和 f 是拓展系统(4)、(12)和(14)的解, 则 $\bar{u}, \bar{w}, \bar{\phi}, \bar{w}_0, \bar{g}, \bar{h}$ 和 $\bar{f}$ 是拓展系统的解, 具体解的形式为:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u + \frac{\epsilon g}{\epsilon\phi - 1}, \\ \bar{w} &= w + \frac{\epsilon w_0 h}{g^2(\epsilon\phi - 1)} - \frac{\epsilon f}{g(\epsilon\phi - 1)} + \frac{\epsilon^2 w_0}{(\epsilon\phi - 1)^2}, \\ \bar{\phi} &= -\frac{\phi}{\epsilon\phi - 1}, \bar{w}_0 = \frac{w_0}{(\epsilon\phi - 1)^4}, \bar{g} = \frac{g}{(\epsilon\phi - 1)^2}, \\ \bar{h} &= \frac{h}{(\epsilon\phi - 1)^2} - \frac{2\epsilon g^2}{(\epsilon\phi - 1)^3}, \\ \bar{f} &= \frac{f}{(\epsilon\phi - 1)^4} - \frac{4\epsilon g w_0}{(\epsilon\phi - 1)^5}, \end{aligned} \quad (17)$$

其中: ϵ 是任意的群参数. 对于系统(4)利用下面的变换可以得到 Bäcklund 变换定理 1 和 2 是等价的:

$$\epsilon\phi - 1 \rightarrow \phi, \epsilon g \rightarrow \phi_x, \epsilon h \rightarrow \phi_{xx}, \epsilon f \rightarrow w_{0x}, \quad (18)$$

可以应用有限群变换式(17)和初始解, 构造超对称 mKdVB 系统新的解.

3 玻色化后超对称 mKdVB 系统非局域相关的对称约化

通过引入势场, 在拓展系统中非局域对称变为

局域对称. 本节将具体应用对称约化研究拓展系统, 相应的群不变解不能用直接的 Lie 点对称约化方法得到. 根据对称约化理论^[17], 拓展系统对应的 Lie 点对称矢量为:

$$V = X \frac{\partial}{\partial x} + T \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial u} + W \frac{\partial}{\partial w} + \Phi \frac{\partial}{\partial \phi} + W_0 \frac{\partial}{\partial w_0} + G \frac{\partial}{\partial g} + H \frac{\partial}{\partial h} + F \frac{\partial}{\partial f}, \quad (19)$$

其中: $X, T, U, W, \Phi, W_0, G, H$ 和 F 是关于 x, t, u, w_0, g, h 和 f 的变量.

拓展后系统的 Lie 点对称 σ^k ($k = u, w, \phi, w_0, g, h, f$) 是如下线性拓展系统(4)、(12)和(14)的解:

$$\sigma_t'' + \sigma_{xxx}'' - 6(u^2 \sigma'')_x = 0, \quad (20a)$$

$$\sigma_t'' + \sigma_{xxx}'' - 6(u^2 \sigma'')_x - 12(uw \sigma'')_x = 0, \quad (20b)$$

$$\sigma'' + \frac{\sigma_{xx}'}{2\phi_x} - \frac{\sigma_x' \phi_{xx}}{2\phi_x^2} = 0, \quad (20c)$$

$$\begin{aligned} \sigma'' - \frac{\sigma_{xx}'}{2\phi_x^2} + \frac{\phi_{xxx} \sigma_{xx}'}{2\phi_x^3} + \frac{w_0 \sigma_{xxx}'}{2\phi_x^3} + \frac{3w_{0x} \sigma_{xx}'}{2\phi_x^3} + \\ \frac{3\phi_{xx} \sigma_{xx}'}{2\phi_x^3} + \frac{w_{0xx} \sigma_x'}{\phi_x^3} - \frac{3w_0 \sigma_{xx}'}{2\phi_x^4} - \\ \frac{9w_{0x} \sigma_{xx}'}{2\phi_x^4} - \frac{3\sigma_{xx}'}{2\phi_x^4} + \frac{6w_0 \phi_{xx}^2 \sigma_x'}{\phi_x^5} = 0, \end{aligned} \quad (20d)$$

$$\sigma_x' - \sigma^g = 0, \quad (20e)$$

$$\sigma_{xx}' - \sigma^h = 0, \quad (20f)$$

$$\sigma_x^{w_0} - \sigma^f = 0. \quad (20g)$$

拓展系统进行如下变换不变:

$$\begin{aligned} u \rightarrow u + \epsilon \sigma^u, \quad w \rightarrow w + \epsilon \sigma^w, \quad \phi \rightarrow \phi + \epsilon \sigma^\phi, \\ w_0 \rightarrow w_0 + \epsilon \sigma^{w_0}, \quad g \rightarrow g + \epsilon \sigma^g, \end{aligned} \quad (21)$$

$$h \rightarrow h + \epsilon \sigma^h, \quad f \rightarrow f + \epsilon \sigma^f,$$

其中: ϵ 是无穷小参数, 对称分量 σ^k 的形式为:

$$\sigma^u = Xu_x + Tu_t - U, \quad (22a)$$

$$\sigma^w = Xw_x + Tw_t - W, \quad (22b)$$

$$\sigma^\phi = X\phi_x + T\phi_t - \Phi, \quad (22c)$$

$$\sigma^{w_0} = Xw_{0x} + Tw_{0t} - W_0, \quad (22d)$$

$$\sigma^g = Xg_x + Tg_t - G, \quad (22e)$$

$$\sigma^h = Xh_x + Th_t - H, \quad (22f)$$

$$\sigma^f = Xf_x + Tf_t - F, \quad (22g)$$

将方程(22)代入对称方程(20), u, w, ϕ, w_0, g, h 和 f 满足延拓系统, 可以得到关于无穷生成元 $X, T, U, W, \Phi, W_0, G, H$ 和 F 的决定性方程. 通过求解决定性方程可以得到生成元为:

$$X = -C_1 x + C_3, \quad T = -3C_1 t + C_2, \quad U = C_4 g + C_1 u,$$

$$W = -2C_7 w - C_4 \frac{f}{g} + C_4 \frac{w_0 h}{g^2},$$

$$\Phi = -C_4 \phi^2 - (C_1 + C_5) \phi + C_6,$$

$$W_0 = -2(C_1 + C_5 + C_7)w_0 - 4C_4 w_0 \phi, \quad (23)$$

$$G = -2C_4 \phi g - C_5 g,$$

$$H = (C_1 - C_5 - 2C_4)h - 2C_4 g^2,$$

$$F = -(C_1 + 2C_5 + 2C_7)f - 4C_4 w_0 g - 4C_4 f \phi,$$

其中: C_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) 是任意常数. 可以利用方程(22)中条件 $\sigma^k = 0$ 得到群不变解, 群不变解也可以求解下面特征方程:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{X} = \frac{dt}{T} = \frac{du}{U} = \frac{dw}{W} = \frac{d\phi}{\Phi} = \frac{dw_0}{W_0} = \\ \frac{dg}{G} = \frac{dh}{H} = \frac{df}{F}. \end{aligned} \quad (24)$$

下面是求群不变解的具体例子. 通过求解特征方程(24), 相似解为:

$$\begin{aligned} \phi = -\frac{\Delta}{2C_4} \tanh \left(\frac{\Delta}{2} \Phi + \frac{\Delta}{6C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right) - \\ \frac{C_1 + C_5}{2C_4}, \end{aligned} \quad (25a)$$

$$g = \frac{G \exp(-C_1 \Phi)}{(3C_1 t - C_2)^{1/3} \cosh^2 \left(\frac{\Delta}{2} \Phi + \frac{\Delta}{6C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right)}, \quad (25b)$$

$$\begin{aligned} h = \frac{\exp(-2C_1 \Phi)}{(3C_1 t - C_2)^{2/3} \cosh^2 \left(\frac{\Delta}{2} \Phi + \frac{\Delta}{6C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right)} \cdot \\ \left[H - \frac{8C_4 G^2}{\Delta \exp \left(\Delta \Phi + \frac{\Delta}{3C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right) + \Delta} \right], \end{aligned} \quad (25c)$$

$$u = \frac{U}{(3C_1 t - C_2)^{1/3}} +$$

$$\frac{4C_4 G \exp(-C_1 \Phi)}{\Delta(3C_1 t - C_2)^{1/3} \left(\exp \left(\Delta \Phi + \frac{\Delta}{3C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right) + 1 \right)}, \quad (25d)$$

$$w_0 = \frac{W_0 \exp(2C_7 \Phi) (3C_1 t - C_2)^{2C_7/(3C_1)}}{\cosh^4 \left(\frac{\Delta}{2} \Phi + \frac{\Delta}{6C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right)}, \quad (25e)$$

$$f = \frac{\exp((2C_7 - C_1)\Phi) (3C_1 t - C_2)^{(2C_7 - C_1)/(3C_1)}}{\cosh^4 \left(\frac{\Delta}{2} \Phi + \frac{\Delta}{6C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right)} \cdot \left(F - \frac{16C_4 G W_0}{\Delta \exp \left(\Delta \Phi + \frac{\Delta}{3C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right) + \Delta} \right), \quad (25f)$$

$$w = (3C_1 t - C_2)^{2C_7/(3C_1)} W + \frac{4C_4 \exp(2C_7 \Phi) (3C_1 t - C_2)^{2C_7/(3C_1)}}{\Delta \exp(\Delta \Phi) \left((3C_1 t - C_2)^{\Delta/(3C_1)} + 1 \right)} \left(\frac{H W_0}{G^2} + \frac{4C_4 W_0}{\Delta (1 + \exp(\Delta \Phi) (3C_1 t - C_2)^{\Delta/(3C_1)})} - \frac{F}{G} \right), \quad (25g)$$

其中: 参数 $\Delta = \sqrt{C_1^2 + 2C_1 C_5 + 4C_4 C_6 + C_5^2}$, 相似变量 $\xi = (C_1 x - C_3) / (C_1 (3C_1 t - C_2)^{1/3})$, $\Phi = \Phi(\xi)$, $W_0 = W_0(\xi)$, $G = G(\xi)$, $H = H(\xi)$, $F = F(\xi)$, $U = U(\xi)$, $W = W(\xi)$ 是群不变函数. 将方程(25)代入系统(4)、(12)和(14), 不变函数 G 、 H 、 F 、 U 和 W 满足以下约化系统:

$$G = -\frac{\Delta^2}{4C_4} \exp(C_1 \Phi) \Phi_\xi, \quad (26a)$$

$$H = \frac{\Delta^3 \exp(2C_1 \Phi)}{4C_4} \Phi_\xi^2 \cdot \tanh \left(\frac{\Delta}{2} \Phi + \frac{\Delta}{6C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right) + \frac{\Delta^3 \exp(2C_1 \Phi) \Phi_\xi^2}{2C_4 \left(1 + \exp \left(\Delta \Phi + \frac{\Delta}{3C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right) \right)} - \frac{\Delta^2 \exp(2C_1 \Phi)}{4C_4} \Phi_{\xi\xi}, \quad (26b)$$

$$F = -2\Delta \exp(C_1 \Phi) \Phi_\xi W_0 \cdot \tanh \left(\frac{\Delta}{2} \Phi + \frac{\Delta}{4C_4} \ln(2C_4 t - C_5) \right) -$$

$$\frac{4\Delta \exp(C_1 \Phi) \Phi_\xi W_0}{\exp \left(\Delta \Phi + \frac{\Delta}{3C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right) + 1} + \exp(C_1 \Phi) W_{0\xi} + 2C_7 \exp(C_1 \Phi) W_0 \Phi_\xi, \quad (26c)$$

$$U = \frac{\Delta}{2} \Phi_\xi \tanh \left(\frac{\Delta}{2} \Phi + \frac{\Delta}{6C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right) + \frac{\Delta \Phi_\xi}{1 + \exp \left(\Delta \Phi + \frac{\Delta}{3C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right)} - \frac{\Phi_{\xi\xi}}{2\Phi_\xi}, \quad (26d)$$

$$W = -\frac{8C_4^2 \exp(2C_7 \Phi)}{\Delta^3 \Phi_\xi^2} \cdot \frac{(\Phi_\xi W_{0\xi} - W_0 \Phi_{\xi\xi} + 2C_7 W_0 \Phi_\xi^2)}{\Delta^3 \Phi_\xi^2} \cdot \tanh \left(\frac{\Delta}{2} \Phi + \frac{\Delta}{6C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right) - \frac{4C_4^2 \exp(2C_7 \Phi) W_0}{\Delta^2 \cosh^2 \left(\frac{\Delta}{2} \Phi + \frac{\Delta}{6C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right)} + \frac{4C_4 \exp(2C_7 \Phi) (FG - W_0 H)}{\Delta \left(1 + \exp \left(\Delta \Phi + \frac{\Delta}{3C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right) \right) G^2} + \frac{8C_4^2 \exp(2C_7 \Phi)}{\Delta^4} \left(4C_7^2 W_0 + \frac{C_7 W_{0\xi}}{\Phi_\xi} + \frac{W_{0\xi\xi}}{\Phi_\xi^2} - \frac{4C_7 W_0 \Phi_{\xi\xi}}{\Phi_\xi^2} - \frac{3W_{0\xi} \Phi_{\xi\xi} + W_0 \Phi_{\xi\xi\xi}}{\Phi_\xi^3} + \frac{3W_0 \Phi_{\xi\xi}^2}{\Phi_\xi^4} \right) - \frac{16C_4^2 \exp(2C_7 \Phi) W_0}{\Delta^2 \left(1 + \exp \left(\Delta \Phi + \frac{\Delta}{3C_1} \ln(3C_1 t - C_2) \right) \right)^2}, \quad (26e)$$

其中 Φ 和 W_0 满足以下常微分方程:

$$\Phi_\xi - C_1 \xi \Phi_\xi^2 - \frac{\Delta^2}{2} \Phi_\xi^4 - \frac{3}{2} \Phi_{\xi\xi}^2 + \Phi_\xi \Phi_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (27)$$

$$W_{0\xi\xi\xi} + 6C_7 W_0 + C_7 (8C_7^2 - 5\Delta^2) W_0 \Phi_\xi^3 + (12C_7^2 - 3\Delta^2) W_{0\xi}^2 - (12C_7^2 - 3\Delta^2) W_{0\xi} \Phi_\xi \Phi_{\xi\xi} + 6C_7 \Phi_\xi W_{0\xi\xi} - 6C_1 C_7 \xi W_0 - 4C_1 \xi W_{0\xi} - 18C_7 \Phi_{\xi\xi} W_{0\xi} + \frac{3W_{0\xi}}{\Phi_\xi} + \frac{9C_7 \Phi_{\xi\xi}^2 W_0}{\Phi_\xi} +$$

$$\frac{6C_1\xi W_0\Phi_{\xi\xi}}{\Phi_{\xi}} - \frac{6W_0\xi\xi\Phi_{\xi\xi}}{\Phi_{\xi}} + \frac{9\Phi_{\xi\xi}^2W_0\xi - 6W_0\Phi_{\xi\xi}}{\Phi_{\xi}^2} - \frac{3\Phi_{\xi\xi}^3}{\Phi_{\xi}^3}W_0 = 0, \quad (28)$$

如果求方程(27)和(28)得到解 Φ 和 W_0 , 可以利用方程(26)求出场 G 、 H 、 F 、 U 和 W 的解. 将场 Φ 、 W_0 、 G 、 H 、 F 、 U 和 W 代入方程(25)可以得到以下定理.

定理3 如果 Φ 和 W_0 满足约化方程(27)和(28), 则 u 和 w 的形式为:

$$u = \frac{\Delta}{2(3C_1t - C_2)^{1/3}} \Phi_{\xi} \cdot \tanh\left(\frac{\Delta}{2}\Phi + \frac{\Delta}{6C_1}\ln(3C_1t - C_2)\right) - \frac{1}{2(3C_1t - C_2)^{1/3}} \frac{\Phi_{\xi\xi}}{\Phi_{\xi}}, \quad (29a)$$

$$w = \left(\exp(2C_7\Phi)(3C_1t - C_2)^{2C_7/(3C_1)} \cdot (1 + \exp(\Delta\Phi)(3C_1t - C_2)^{\Delta/(3C_1)})^2 / (3\exp(\Delta\Phi)(3C_1t - C_2)^{\Delta/(3C_1)} + \exp(3\Delta\Phi)(3C_1t - C_2)^{\Delta/C_1} + 3\exp(2\Delta\Phi) \cdot (3C_1t - C_2)^{2\Delta/(3C_1)} + 1) \left(\frac{16C_4^2}{\Delta^2} W_0 \cdot \tanh\left(\frac{\Delta}{2}\Phi + \frac{\Delta}{6C_1}\ln(3C_1t - C_2)\right) + \frac{16C_4^2C_7}{\Delta^3} - \frac{W_0}{\Delta^2(1 + \exp(\Delta\Phi)(3C_1t - C_2)^{\Delta/(3C_1)})} \right) + (3C_1t - C_2)^{2C_7/(3C_1)} W, \quad (29b)$$

是玻色化超对称mKdVB系统(4)的解.

如果求出 u 和 w 的解, 将其代入方程(3), 可以得到超对称mKdVB系统的解. 类似此约化方法, 可以选择其他的常数约化此方程, 构造其他类型的孤子与其他孤立波相互作用解^[18-21].

4 总结与讨论

借助玻色化方法, $N=1$ 超对称mKdVB系统转化为玻色场耦合的系统. 利用奇异截断分析, 证明了玻色化后超对称mKdVB系统具有Painlevé性质. 通过求Painlevé截断的留数对称, 得到了玻色化后超

对称mKdVB系统的非局域对称. 为了求解非局域对称相关的Lie第一性原理, 将非局域对称局域化为局域对称. 在拓展后系统中非局域对称变为Lie点对称, 因此, 可以利用Lie点对称约化方法求解拓展后系统. 通过Lie点对称约化方法, 构造了拓展后系统的孤子与其他孤立波的相互作用解. 应用玻色化方法研究超对称可积系统可得到不同于利用其他方法研究超对称可积系统的结果^[15]. 同时, 玻色化方法适用于研究其他超对称可积系统.

本文引入了2个新的费米场玻色化超对称mKdVB系统. 我们可以引入 $N>2$ 费米场玻色化超对称系统, 耦合场 u 和 ξ 展开为:

$$\xi(x, t) = \sum_{n=1}^{[(N+1)/2]} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{2n-1} \leq N} u_{i_1 i_2 \dots i_{2n-1}} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \dots \zeta_{i_{2n-1}}, \quad (30a)$$

$$u(x, t) = u_0 + \sum_{n=1}^{[(N+1)/2]} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{2n} \leq N} u_{i_1 i_2 \dots i_{2n}} \zeta_{i_1} \zeta_{i_2} \dots \zeta_{i_{2n}}, \quad (30b)$$

其中: 系数 $u_0, u_{i_1 i_2 \dots i_{2n}} (1 \leq i_1 < \dots < i_{2n} \leq N)$ 和 $u_{i_1 i_2 \dots i_{2n-1}} (1 \leq i_1 < \dots < i_{2n-1} \leq N)$ 是 2^N 关于空间和时间 (x, t) 的实或复玻色函数. 引入任意个费米场, 玻色化后超可积系统的可积性质和精确解是值得深入研究的课题.

参考文献:

- [1] Wess J, Bagger J. Supersymmetry and Supergravity[M]. Princeton: Princeton University Press, 1992.
- [2] Kupershmidt B A. A super Korteweg-de Vries equation: An integrable system[J]. Physics Letters A, 1984, 102(5/6): 213-215.
- [3] Manin Y I, Radul A O. A supersymmetric extension of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy[J]. Communications in Mathematical Physics, 1985, 98(1):65-77.
- [4] Labelle P, Mathieu P. A new $N=2$ supersymmetric Korteweg-de Vries equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1991, 32(4):923-927.
- [5] Chaichian M, Lukierski J. $N=1$ super WZW and $N=1, 2, 3, 4$ super KdV models as $D=2$ current superfield theories[J]. Physics Letters B, 1988, 212(4):461-466.
- [6] Liu S Q, Hu X B, Liu Q P. A supersymmetric Ito's equation and its soliton solutions[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 2006, 75(6):064004-1-5.
- [7] Fan E G. Supersymmetric KdV-Sawada-Kotera-Ramani

- equation and its quasi periodic wave solutions[J]. *Physics Letters A*, 2010, 374(5):744-749.
- [8] Andrea S, Restuccia A, Sotomayor A. An operator valued extension of the super Korteweg-de Vries equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2001, 42(6):2625-2634.
- [9] Gao X N, Lou S Y. Bosonization of supersymmetric KdV equation[J]. *Physics Letters B*, 2012, 707(1):209-215.
- [10] Gao X N, Lou S Y, Tang X Y. Bosonization, singularity analysis, nonlocal symmetry reductions and exact solutions of supersymmetric KdV equation[J]. *Journal of High Energy Physics*, 2013(5):29-40.
- [11] Ren B. Exact solutions for the $N=2$ supersymmetric KdV equation with the bosonization approach[J]. *Chinese Journal of Physics*, 2015, 53(1):020201-1-9.
- [12] Popowicz Z. Odd Hamiltonian structure for supersymmetric Sawada-Kotera equation[J]. *Physics Letters A*, 2009, 373(37):3315-3323.
- [13] Choudhuri A, Talukdar B, Ghosh S. On the supersymmetric nonlinear evolution equations[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 58(1/2):249-258.
- [14] Ren B, Lin J, Yu J. Supersymmetric Ito equation: Bosonization and exact solutions[J]. *AIP Advances*, 2013, 3(4):042129-1-12.
- [15] Ren B. Painlevé analysis, nonlocal symmetry and explicit interaction solutions for supersymmetric mKdVB equation[J]. *AIP Advances*, 2016, 6(8):085205-1-14.
- [16] Weiss J, Tabor M, Carnevale G. The Painlevé property for partial differential equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1983, 24(3):522-526.
- [17] Olver P J. *Application of Lie Group to Differential Equation*[M]. Berlin: Springer, 1986.
- [18] Ren B. Interaction solutions for mKP equation with nonlocal symmetry reductions and CTE method[J]. *Physica Scripta*, 2015, 90(6):065206-1-8.
- [19] Cheng W G, Li B, Chen Y. Nonlocal symmetry and exact solutions of the $(2+1)$ -dimensional breaking soliton equation[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, 29(1/2/3):198-207.
- [20] Cheng X P, Lou S Y, Chen C L, et al. Interactions between solitons and other nonlinear Schrödinger waves[J]. *Physical Review E*, 2014, 89(4):043202.
- [21] Hu X R, Lou S Y, Chen Y. Explicit solutions from eigenfunction symmetry of the Korteweg-de Vries equation[J]. *Physical Review E*, 2012, 85(5):056607-1-8.

Bosonization approach for supersymmetric integrable system

REN Bo, YU Jun

(Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China)

Abstract: To address the difficulty caused by the anti-commutative fermionic fields, a bosonization approach is proposed to deal with the super-symmetric integrable systems. The $N=1$ super-symmetric mKdVB system is transformed to a coupled bosonic system using the bosonization approach. Adopting a standard WTC approach, the bosonized super-symmetric mKdVB (BSmKdVB) equation possesses the Painlevé property. Starting from the standard truncated Painlevé method, the nonlocal symmetry for the BSmKdVB equation is obtained. To solve the first Lie's principle related with the nonlocal symmetry, the nonlocal symmetry is localized to the Lie point symmetry by introducing multiple new fields. By taking advantage of localization processes, similarity reductions for the prolonged systems can be studied using the Lie point symmetry method. The interaction solutions for solitons and other complicated waves are presented using the reduction method.

Key words: supersymmetric integrable system; bosonization approach; Painlevé property; nonlocal symmetry; symmetry reduction

(责任编辑 史小丽)