

非线性系统的多线性分离变量法

唐晓艳^{1,2}

(1.华东师范大学 数学科学学院, 上海 200241; 2.上海市核心数学与实践重点实验室, 上海 200241)

摘要: 线性物理中两大普遍适用的傅立叶变换法和分离变量法都不能直接应用到非线性物理, 为此如何在非线性物理中建立相应的研究方法是众多物理学家和数学家们都非常关心的问题. 本文介绍了一种适用于非线性系统的分离变量法——多线性分离变量法, 由其可以得到具有低维变量分离函数的多线性分离变量解. 特别地, 可积系统的多线性分离变量解通常包含有任意的低维变量分离函数.

关键词: 多线性分离变量法; 多线性分离变量解; 可积性

中图分类号: O175.1

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0015-07

非线性微分方程的求解是研究非线性现象的重要科学问题. 众所周知, 傅立叶变换法和分离变量法是求解线性物理问题的两大基本方法. 目前, 傅立叶变换法已在非线性物理中得以推广, 著名的反散射方法也随之建立, 并且成功解决了不少重要的非线性问题^[1]. 但是, 分离变量法没能在非线性物理中建立一个统一有效的非线性分离变量法. 现有的非线性分离变量法主要有几何方法^[2-3]、基于假设(Ansatz-based)的方法^[4-7]、基于 Lax 对的非线性化方法^[8-11]、对称约束法^[12-16]、形式分离变量法^[17]、基于一般条件对称的泛函分离变量法^[18-23]和导数相关的泛函分离变量法^[24-27], 以及多线性分离变量法等.

本文重点介绍多线性分离变量法, 和其他非线性分离变量法相比, 该方法做到了函数自变量的真正分离. 完善的多线性分离变量法是在 1996 年楼森岳和陆继宗撰写的 Davey-Stewartson(DS)系统分离变量解的论文基础上发展起来的^[28], 用该方法得到的非线性可积系统的多线性分离变量解必定含有一个或两个任意的低维变量分离函数. 因此, 一个自然出现的重要问题是: 多线性分离变量解能否允许含有两个以上的变量分离函数? 为了解决这个问题, 我们进一步建立了一般多线性

分离变量法. 多线性线性分离变量法和一般多线性分离变量法已被用来得到了一大类的 2+1 维、一些 1+1 维和 3+1 维非线性系统以及若干差微分方程的非线性分离变量解.

本文首先概括性地描述了多线性分离变量法求解的一般过程, 接着以 DS 系统为例详细说明求解过程, 最后分别以 2+1 维 SG 方程和 BK 方程为例具体给出了推广建立的两类一般多线性分离变量法.

1 多线性分离变量法的一般求解过程

多线性分离变量法求解 2+1 维非线性系统:

$$F(u, u_x, u_y, u_t, \dots) = 0, \quad (1)$$

大致可以分为以下 4 个步骤.

1.1 多线性化非线性系统

将 u 展开为:

$$u = \sum_{i=0}^{\alpha} u_i f^{i-\alpha}, \quad (2)$$

其中, u_i 和 f 是关于 $\{x, y, t\}$ 的函数; α 是正整数. $u_i (i \neq \alpha)$ 和 α 都可由 Painlevé 截断展开法确定, 即可由 Painlevé 测试的领头项分析得到. u_α 是非线性系统(1)的任意种子解. 将式(2)代入式(1), 可得关于函数 f 及其各种导数的多线性化方程:

$$F'(f, f_x, f_y, f_t, \dots) = 0. \quad (3)$$

下一步就要对函数 f 给出具体的形式, 这是多线性分离变量法的创新之关键.

1.2 做变量分离假设

假设函数 f 为:

$$f = a_0 + a_1 p(x, t) + a_2 q(y, t) + a_3 p(x, t)q(y, t) = a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 pq, \quad (4)$$

其中, p 和 q 分别是 $\{x, t\}$ 和 $\{y, t\}$ 的函数, a_0 、 a_1 、 a_2 和 a_3 是常数(也可以是 t 的函数). 将式(4)代入式(3), 可得:

$$G(p, q, p_t, q_t, p_x, q_y, \dots) = 0. \quad (5)$$

假设式(4)的提出为多线性分离变量法的建立打下了本质的基础. 当 p 和 q 都取作行波型指数函数时, 式(4)就是 Hirota 方法的二孤子假设.

1.3 分离方程式(5)

分离式(5), 使得函数 p 和 q 分别满足变量分离方程:

$$G_1(p, p_x, p_t, \dots) = 0, \quad (6)$$

$$G_2(q, q_y, q_t, \dots) = 0. \quad (7)$$

若任意函数(模型的种子解或者来自其他途径, 如任意积分函数等)是关于 $\{x, t\}$ 的, 那么这个任意函数就会出现在式(6)中, 否则就出现在式(7)中. 如何将式(5)分离成式(6)和式(7)是多线性分离变量法的难点. 一旦解决了这个难点, 多线性分离变量法就基本上成功了.

1.4 求解变量分离方程

通常情况下, 变量分离方程式(6)和式(7)是非线性方程, 要得到函数 p 和 q 的一般解仍然很困难. 此时我们可以采取如下策略. 对函数 p 满足的式(6), 可求该方程中出现的某个未知函数, 而不求 p , 即用 p 表示该未知函数. 同样地, 式(7)的解转化为用 q 表示某个关于 $\{y, t\}$ 的未知函数.

至此, 我们得到了非线性系统(1)的多线性分离变量解. 这个一般的求解过程同样适用于非线性方程组, 仅有的不同之处在于有可能存在多个任意函数, 从而允许函数 p 和 q 都任意.

下一节以非线性 DS 系统为例, 具体给出用以上 4 个基本步骤得到多线性分离变量解的过程.

2 DS 系统的多线性分离变量解

非线性 DS 系统^[13]:

$$iu_t + \frac{1}{2}(u_{xx} + u_{yy}) + \alpha |u|^2 u - uv = 0,$$

$$v_{xx} - v_{yy} - 2\alpha(|u|^2)_{xx} = 0, \quad (8)$$

是 1+1 维非线性薛定谔方程空间对称的 Lax 可积推广. 该系统是 Benney-Roskes 方程^[29-30]的浅水波近似, 其中, u 是平面波包的振幅, v 表征平面波引起的平均运动. 此外, DS 系统也可以从等离子物理^[31]和自对偶 Yang-Mills 场^[32]中导出; 它同样也是目前已知的唯一成功用量子反散射求解的量子可积系统^[33-35]; DS 系统在多种意义下可积, 如反散射可积^[36-38]、Painlevé 可积^[39]等. 该系统具有一些其他重要而有趣的性质, 例如双线性形式^[40]、达布变换^[41]、有限维可积约化^[42-44]、无穷多对称^[45]和丰富的孤子结构^[28,36-37,40,46].

通过标准的截断 Painlevé 计算, 可得 DS 系统的场量 u 和 v , 具有如下展开形式:

$$u = gf^{-1} + u_0,$$

$$v = v_0 - f^{-1}(f_{x'x'} + f_{y'y'} + 2f_{x'y'}) + f^{-2}(f_x^2 + 2f_{y'}f_{x'} + f_{y'}^2), \quad (9)$$

其中, f 是实函数; g 是复函数; $x' = (x+y)/\sqrt{2}$; $y' = (x-y)/\sqrt{2}$; $\{u_0, v_0\}$ 是 DS 系统的任意种子解.

将式(9)代入式(8), 可得双线性方程组:

$$(D_{x'x'} + D_{y'y'} + 2iD_t - 2v_0 + G_1)g \cdot f + u_0(D_{x'x'} + 2D_{x'y'} + D_{y'y'})f \cdot f + 2\alpha u_0 g g^* + 2\alpha u_0^2 g^* f = 0, \quad (10)$$

$$2(D_{x'y'} + \alpha |u_0|^2)f \cdot f + 2\alpha gh + 2\alpha u_0^* gf - G_1 f f + 2\alpha u_0 g^* f = 0, \quad (11)$$

其中, D 是双线性算子^[47], 定义为:

$$D_x^m A \cdot B \equiv (\partial_x - \partial_{x_1})^m A(x)B(x_1)|_{x_1=x}.$$

G_1 满足方程:

$$G_{1x'x'} + G_{1y'y'} + 2G_{1x'y'} - 16\alpha(u_{0x'} + u_{0y'}) \times (u_{0x'}^* + u_{0y'}^*) - 4\alpha(D_{x'x'} + D_{y'y'} + 2D_{x'y'})u_0 \cdot u_0^* = 0. \quad (12)$$

为了简化起见, 在后文中略去空间变量上的撇“'”.

为进一步讨论, 选取 DS 系统的种子解为:

$$u_0 = G_1 = 0,$$

$$v_0 = p_0(x, t) + q_0(y, t), \quad (13)$$

其中, $p_0 \equiv p_0(x, t)$ 和 $q_0 \equiv q_0(y, t)$ 分别是 $\{x, t\}$ 和 $\{y, t\}$ 的任意函数.

接着做变量分离假设, 取 f 为式(4), g 为

$$g = p_1 q_1 \exp(ir + is), \quad (14)$$

其中, $p_1 \equiv p_1(x, t)$ 、 $q_1 \equiv q_1(y, t)$ 、 $r \equiv r(x, t)$ 和 $s \equiv s(y, t)$ 都是实函数. 将式(4)和式(14)代入双线性方程组式(10)~(11)后, 分离其实部和虚部, 可得:

$$2\Delta p_x q_y + \alpha p_1^2 q_1^2 = 0, \quad (15)$$

$$(q_1 p_{1xx} + p_1 q_{1yy} - p_1 q_1 (2r_t + 2s_t + 2(p_0 + q_0) + s_y^2 + r_x^2))(a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 p q) + q_1 (a_1 + a_3 q)(p_1 p_{xx} - 2p_{1x} p_x) + p_1 (a_2 + a_3 p)(q_1 q_{yy} - 2q_{1y} q_y) = 0, \quad (16)$$

$$(-q_1 (2r_x p_{1x} + 2p_{1t} + p_1 r_{xx}) - p_1 (2s_y q_{1y} + 2q_{1t} + q_1 s_{yy}))(a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 p q) + 2q_1 p_1 (q_t + s_y q_y)(a_3 p + a_2) + 2q_1 p_1 (r_x p_x + p_t)(a_1 + a_3 q) = 0. \quad (17)$$

因为 p_0 、 p 、 p_1 和 r 都只是关于 $\{x, t\}$ 的函数, 而 q_0 、 q 、 q_1 和 s 都只是 $\{y, t\}$ 的函数, 所以方程式(15)~(17)可以被分成以下3个变量分离方程组:

$$\begin{cases} p_1 = \delta_1 \sqrt{-2\Delta\alpha^{-1}c_1^{-1}p_x}, \\ q_1 = \delta_2 \sqrt{c_1 q_y}, \quad (\delta_1^2 = \delta_2^2 = 1), \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} p_t = -r_x p_x + c_2 (a_2 + a_3 p)^2 + c_3 (a_2 + a_3 p) - \Delta c_4, \\ q_t = -s_y q_y - c_4 (a_1 + a_3 q)^2 - c_3 (a_1 + a_3 q) + \Delta c_2, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} 4(2r_t + r_x^2 + 2p_0)p_x^2 + p_{xx}^2 - 2p_{xxx}p_x + c_5 p_x^2 = 0, \\ 4(2s_t + s_y^2 + 2q_0)q_y^2 + q_{yy}^2 - 2q_{yyy}q_y - c_5 q_y^2 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

对于任意给定的 p_0 和 q_0 , 要求解式(19)和(20)是非常困难的. 但是, 可以认为 p 和 q 是任意的, 且可从式(19)和式(20)中分别解出 p_0 、 q_0 、 r 和 s .

因此, DS 系统(8)的多线性分离变量解为:

$$u = \frac{\delta_1 \delta_2 \sqrt{-2\Delta\alpha^{-1}p_x q_y} \exp(ir + is)}{a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 p q}, \quad (21)$$

$$v = p_0 + q_0 - \frac{(a_2 + a_3 p)q_{yy} + (a_1 + a_3 q)p_{xx}}{a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 p q} + \frac{(a_2 + a_3 p)^2 q_y^2 - 2\Delta q_y p_x + (a_1 + a_3 q)^2 p_x^2}{(a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 p q)^2}, \quad (22)$$

其中, p 和 q 是任意函数, p_0 和 q_0 由式(20)确定,

r 和 s 满足式(19). 特别地, 场量 u 的模平方为:

$$|u|^2 = U\alpha^{-1}, \quad (23)$$

$$\frac{1}{2}\alpha^{-1}\Delta P_x Q_y \left(\sqrt{a_0 a_3} \cosh \frac{1}{2} \left(P + Q + \ln \frac{a_3}{a_0} \right) + \sqrt{a_1 a_2} \cosh \frac{1}{2} \left(P - Q + \ln \frac{a_1}{a_2} \right) \right)^{-2}, \quad (24)$$

其中,

$$p = e^P, q = e^Q, \Delta = a_1 a_2 - a_0 a_3, \quad (25)$$

$$U = \frac{2\Delta p_x q_y}{(a_1 + a_1 p + a_2 q + a_3 p q)^2}, \quad (26)$$

P 和 Q 分别是 $\{x, t\}$ 和 $\{y, t\}$ 的任意函数. 文献[46]中给出了 DS 系统的多线性分离变量解的一个特殊形式, $a_0 = 0$; 文献[28]中给出 DS 系统的分离变量解对应着 $p_0 = q_0 = a_0 = 0$ 时的情形.

式(23)表示了 DS 系统的场量 u 的模平方, 因此 p 、 q 、 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 、 α 之间需满足约束条件:

$$\alpha \Delta p_x q_y > 0. \quad (27)$$

3 一般多线性分离变量法

为了使得更多的变量分离函数进入多线性分离变量解中, 我们提出了两类推广并建立了一般多线性分离变量法. 第一类一般多线性分离变量法是通过推广多线性分离变量法的第一步实现的, 把非线性系统的场量按多个任意函数(主要考虑了两个函数的情况)展开, 由此得到关于多个函数的多线性方程, 对这些任意函数做相同的变量分离假设, 从而解得第一类一般多线性分离变量解. 第二类一般多线性分离变量法则是通过推广多线性分离变量法的第二步予以实现, 即推广变量分离假设, 由此得到第二类一般多线性分离变量解. 下面分别以 2+1 维 SG 系统和 BK 系统为例, 介绍这两类一般多线性分离变量法.

3.1 第一类一般多线性分离变量法

文献[48]给出了 2+1 维 sG(2DsG)系统^[49-51]:

$$u_{xyt} + u_y v_{xt} + u_x v_{yt} = 0, \quad (28)$$

$$v_{xy} = u_x u_y \quad (29)$$

的一般多线性分离变量解.

对 2DsG 系统的场量做如下展开:

$$u = \pm i \ln \frac{f}{g} + u_0, v = \ln(fg) + v_0, \quad (30)$$

其中, u_0 、 v_0 是任意种子解, 取为:

$$u_0 = 0, v_0 = v_1(x, t) + v_2(y, t), \quad (31)$$

将式(30)~(31)代入式(28)~(29), 可得双线性方程:

$$[D_x D_y D_t + v_{1xt} D_y + v_{2yt} D_x] f \cdot g = 0, \quad (32)$$

$$D_x D_y f \cdot g = 0. \quad (33)$$

将变量分离假设式(4)和

$$g = b_0 + b_1 p + b_2 q + b_3 pq, \quad (34)$$

代入式(33), 可得:

$$a_0 b_3 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0 = 0. \quad (35)$$

再将式(4)和(34)代入式(32), 可得:

$$\begin{aligned} & \{[A_1 p^2 + 2A_2 p + a_2 b_0 - b_2 a_0] v_{1xt} + \\ & 2[A_1 p - A_2] p_{xt}\} p_x^{-1} - 2A_1 p_t = \\ & \{[B_1 q^2 - 2A_2 q + b_1 a_0 - a_1 b_0] v_{2yt} + \\ & 2[B_1 q - A_2] q_{yt}\} q_y^{-1} - 2B_1 q_t, \end{aligned} \quad (36)$$

其中,

$$\begin{aligned} A_1 &= a_3 b_1 - a_1 b_3, A_2 = a_3 b_0 - b_2 a_1, B_1 = \\ & a_2 b_3 - a_3 b_2. \end{aligned} \quad (37)$$

类似地, 视 p 和 q 为任意函数, 从而由式(36)

和式(37)分别解出 v_1 和 v_2 :

$$v_{1xt} = \frac{(c + 2A_1 p_t) p_x - 2(A_1 p - A_2) p_{xt}}{A_1 p^2 + 2A_2 p + a_2 b_0 - b_2 a_0}, \quad (38)$$

$$v_{2yt} = \frac{(c + 2B_1 q_t) q_y - 2(B_1 q - A_2) q_{yt}}{B_1 q^2 - 2A_2 q + b_1 a_0 - a_1 b_0}, \quad (39)$$

其中, $c \equiv c(t)$ 为任意函数.

定义 $F \equiv 2iu_{xy}$, $G \equiv -2v_{xy}$, 则有:

$$\begin{aligned} F &= \pm \left\{ \frac{2(a_1 a_2 - a_0 a_3) p_x p_y}{(a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 pq)^2} - \right. \\ & \left. \frac{2(b_1 b_2 - b_0 b_3) p_x p_y}{(b_0 + b_1 p + b_2 q + b_3 pq)^2} \right\} \equiv \pm(U_a - U_b), \end{aligned} \quad (40)$$

$$G = U_a + U_b, \quad (41)$$

其中, U_a 和 U_b 即是多线性分离变量解的通式(26).

对于实的 2DsG 系统和实的 MNNV I 系统而言, 常量 u 本身就非常重要. u 是实数这一条件就说明 g 是 f 的复共轭, 即 $g = f^*$. 此时, f 和 g 可以简单地取为^[52]:

$$f = 1 + ipq, g = 1 - ipq, \quad (42)$$

由此可得,

$$u = 2 \arctan(pq). \quad (43)$$

值得一提的是, 此多线性分离变量解等价于用 Moutard 变换得到的结果^[52-55].

3.2 第二类一般多线性分离变量法

BKK 系统:

$$H_{ty} - H_{xxy} + 2(HH_x)_y + 2G_{xx} = 0, \quad (44)$$

$$G_t + G_{xx} + 2(HG)_x = 0, \quad (45)$$

经过变换,

$$H = (\ln f)_x + H_0, G = (\ln f)_{xy} + G_0, \quad (46)$$

其中, $\{H_0, G_0\}$ 是任意种子解, 分别得到三线性 and 双线性方程:

$$\begin{aligned} & 2H_0(2f_x^2 f_y + f^2 f_{xxy} - ff_y f_{xx} - 2ff_x f_{xy}) + \\ & 2H_{0x} f(ff_{xy} - f_x f_y) + 2f^2 f_x H_{0xy} + \\ & 2H_{0y} f(ff_{xx} - f_x^2) + f^2(f_{txy} + f_{xxy}) - \\ & f(f_x f_{ty} + f_{xx} f_{xy} + f_x f_{xxy} + f_y f_{xxx} + \\ & f_y f_{tx} + f_t f_{xy}) + 2f_x f_y (f_t + f_{xx}) = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

$$(ff_{xx} - f_x^2 + ff_x \partial_x)(G_0 - H_{0y}) = 0. \quad (48)$$

取 BKK 系统的种子解为:

$$G_0 = 0, H_0 = h(x, t) \equiv h, \quad (49)$$

其中, h 是所示变量的任意函数.

把变量分离假设式(4)推广成:

$$f = q_0 + \sum_{i=1}^N p_i q_i, \quad (50)$$

其中, $\{q_i, i = 0, 1, 2, \dots, N\}$ 和 $\{p_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ 分别是 $\{y, t\}$ 和 $\{x, t\}$ 的函数. 将式(49)~(50)代入多线性方程(47)和(48)后, 可解得:

$$\begin{aligned} p_{it} &= (c_{00} - 2h \partial_x - \partial_x^2) p_i - c_{0i} + \\ & \sum_{j=1}^N (c_{j0} p_i - c_{ji}) p_j, \end{aligned} \quad (51)$$

$$q_{it} = \sum_{j=0}^N (c_{i,j} + q_i C_j) q_j, \quad (52)$$

其中, $\{c_{ij}, C_j, i, j = 0, 1, 2, \dots, N\}$ 是 t 的任意函数.

BKK 系统的一般多线性分离变量解为:

$$\begin{aligned} G &= \frac{\sum_{i=1}^N p_{ix} q_{iy}}{q_0 + \sum_{i=1}^N p_i q_i} - \frac{\sum_{i=1}^N p_{ix} q_i \left(q_{0y} + \sum_{j=1}^N p_j q_{jy} \right)}{(q_0 + \sum_{i=1}^N p_i q_i)^2}, \\ H &= \frac{2 \sum_{i=1}^N p_{ix} q_i}{q_0 + \sum_{i=1}^N p_i q_i} + h. \end{aligned} \quad (53)$$

可见, 从修改贝克隆变换假设和多线性变量

分离假设出发,成功地推广到了2种一般多线性分离变量法.在第一类推广中发现2个通式可以有条件地线性相加,在第二类推广中则引入了任意多个变量分离函数.

4 总结与讨论

本文介绍了一种可以求解非线性系统的多线性分离变量法.目前该方法已经求解了大量的2+1维可积系统以及一些1+1维和3+1维非线性可积系统,得到了具有任意低维变量分离函数的多线性分离变量解.事实上,多线性分离变量法不仅可以求解可积的非线性系统,而且可以求解不可积的非线性系统,但是所得到的多线性分离变量解中的低维变量分离函数不再具有任意性.研究表明,所有具有多线性分离变量解的系统的某个物理量都可以表示成一个通式,由此我们定义了多线性分离变量可解性:若一个 $n+1$ 维系统可用多线性分离变量法求解,存在一个合适的物理量可用通式描述,而且通式中至少存在一个 n 维的任意函数,那么可称该系统是多线性分离变量可解的.

文中所讨论的一般多线性分离变量法只是从两方面对多线性分离变量法进行了推广,相信还有很多途径可以使得解中含有更多的变量分离函数.例如可以从达布变换的角度来得到一般多线性分离变量解,使得任意数目的变量分离函数从另一新的角度进入变量分离解^[56].基于同样的思考方法,应该也可以用贝克隆变换、非线性迭加原理等方法来得到更一般的变量分离解.另外,如何从非线性系统的对称性来更好地理解多线性分离变量解也是一个值得深入探讨的问题.

参考文献:

- [1] Garder C S, Greene J M, Kruskal M D, et al. Method for solving the Korteweg-de Vries equation[J]. Physical Review Letters, 1967, 19:1095-1097.
- [2] Dolye P W. Separation of variables for scalar evolution equations in one space dimension[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 1996, 29:7581-7595.
- [3] Dolye P W, Vassiliou P J. Separation of variables for the 1-dimensional non-linear diffusion equation[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 1998, 33(2):315-326.
- [4] Zhdanov R Z. Separation of variables in the nonlinear wave equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 27(9):L291-L297.
- [5] Zhdanov R Z. Separation of variables in (1+2)-dimensional Schrödinger equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 1997, 38(2):1197-1217.
- [6] Zhdanov R Z, Revenko I V, Fushchych W I. Orthogonal and non-orthogonal separation of variables in the wave equation $u_{tt}-u_{xx}+V(x)u=0$ and $u_{tt}-u_{xx}+V(x)u=0$ [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1993, 26:5959-5972.
- [7] Zhdanov R Z, Revenko I V, Fushchych W I. On the new approach to variable separation in the time-dependent Schrödinger equation with two space dimensions[J]. Journal of Mathematical Physics, 1995, 36(12):5506-5521.
- [8] Cao C W. Nonlinearization of the Lax system for AKNS hierarchy[J]. Science China Mathematics, 1990(5):528-536.
- [9] Cao C W, Geng X G, Wu Y T. From the special 2+1 Toda lattice to the Kadomtsev-Petviashvili equation[J]. Journal of Physics A: General Physics, 1999, 32:8059-8078.
- [10] Blaszk M, Ma W X. New Liouville integrable noncanonical Hamiltonian systems from the AKNS spectral problem[J]. Journal of Mathematical Physics, 2002, 43(6):3107-3123.
- [11] Ma W X, Fuchssteiner B, Oevel W. A 3 $\times$ 3 matrix spectral problem for AKNS hierarchy and its binary nonlinearization[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 1996, 233:331-354.
- [12] Cheng Y, Li Y. S. The constraint of the Kadomtsev-Petviashvili equation and its special solutions[J]. Physics Letters A, 1991, 157(1):22-26.
- [13] Konopelchenko B G, Sidorenko V, Strampp W. (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems[J]. Physics Letters A, 1991, 157(1):17-21.
- [14] Lou S Y, Hu X B. Infinitely many Lax pairs and symmetry constraints of the KP equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1997, 38(12):6401-6427.
- [15] Zeng Y B, Ma W X. Families of quasi-bi-Hamiltonian systems and separability[J]. Journal of Mathematical Physics, 1999, 40(9):4452-4473.
- [16] Zeng Y B. A family of separable integrable Hamiltonian systems and their classical dynamical r -matrix Poisson structures[J]. Inverse Problem, 1996, 12(4):797-809.

- [17] Lou S Y, Chen L L. Formal variable separation approach for nonintegrable models[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1999, 40(12):6491-6500.
- [18] Qu C Z, Zhang S L, Liu R C. Separation of variables and exact solutions to quasilinear diffusion equations with nonlinear source[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2000, 144(1/2):97-123.
- [19] Estevez P G, Qu C Z, Zhang S L. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, 275(1):44-59.
- [20] Chou K S, Qu C Z. Symmetry groups and separation of variables of a class of nonlinear diffusion-convection equations[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1999, 32(35):6271-6286.
- [21] Qu C Z, He W L, Dou J H. Separation of variables and exact solutions of generalized nonlinear Klein-Gordon equations[J]. *Progress of Theoretical Physics*, 2001, 105(3):379-398.
- [22] Estevez P G, Qu C Z. Separation of variables in a nonlinear wave equation with a variable wave speed[J]. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2002, 133:1490-1497.
- [23] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z. Variable separation and exact solutions to generalized nonlinear diffusion equations[J]. *Chinese Physics Letters*, 2002, 19(12):1741-1744.
- [24] Zhang S L, Lou S Y. Variable separation and derivative-dependent functional separable solutions to generalized KdV equations[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2003, 40(4):401-406.
- [25] Zhang S L, Lou S Y. Variable separation and derivative-dependent functional separable solutions to generalized nonlinear wave equations[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2004, 41(1):161-174.
- [26] Zhang S L, Lou S Y. Derivative-dependent functional separable solutions for the KdV-type equations[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2004, 335(3/4):430-444.
- [27] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z. New variable separation approach: Application to nonlinear diffusion equations[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2003, 36(49):12223-12242.
- [28] Lou S Y, Lu J Z. Special solutions from the variable separation approach: The Davey-Stewartson equation[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1996, 29(14):4209-4215.
- [29] Davey A, Stewartson K. On three-dimensional packets of surface wave[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1974, 338:101-110.
- [30] Benney D J, Roskes G J. Wave instabilities[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 1969, 48(4):377-381.
- [31] Nishinari K, Abe K, Satsuma J. A new-type of Soliton behavior in a two dimensional plasma system[J]. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1993, 62(6):2021-2029.
- [32] Ablowitz M J, Clarkson P A. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*[M]//London Mathematical Society Lecture Note Series 149, Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [33] Schultz C L, Ablowitz M J, Yaacov D B. Davey-Stewartson I system: A quantum (2+1)-dimensional integrable system[J]. *Physical Review Letters*, 1987, 59(25):2825-2828.
- [34] Kulish P P, Lipovsky V D. Hamiltonian structure of the Davey-Stewartson equation and Poisson brackets of scattering data[J]. *Physics Letters A*, 1988, 127(8/9):413-417.
- [35] Pang G D, Pu F C, Zhao B H. Exact solution for quantum Davey-Stewartson I system[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 65(26):3227.
- [36] Boiti M, Leon J J P, Martina L, et al. Scattering of localized solitons in the plane[J]. *Physics Letters A*, 1988, 132(8/9):432-439.
- [37] Fokas A S, Santini P M. Coherent structures in multi-dimensions[J]. *Physical Review Letters*, 1989, 63(13):1329-1333.
- [38] Fokas A S, Santini P M. Dromions and a boundary value problem for the Davey-Stewartson I equation[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1990, 44(1/2):99-130.
- [39] Leo R A, Mancarella G, Soliani G, et al. On the Painlevé property of nonlinear field equations in 2+1 dimensions: The Davey-Stewartson system[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1988, 29(12):2666-2671.
- [40] Lou S Y. A note on the new similarity reductions of the Boussinesq equation[J]. *Physics Letters A*, 1990, 151(3/4):133-135.
- [41] Matveev V B, Salle M A. *Darboux Transformation and Solitons*[M]. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [42] Zhou Z X. Soliton solutions for some equations in the (1+2)-dimensional hyperbolic $su(N)$ AKNS system[J]. *Inverse Problems*, 1996, 12(1):89-110.
- [43] Zhou Z X. Localized solitons of the hyperbolic $su(N)$ AKNS system[J]. *Inverse Problems*, 1998, 14(5):1371-

- 1384.
- [44] Zhou Z X, Ma W X. Finite dimensional integrable Hamiltonian systems associated with DSI equation by Bargmann constraints[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 2001, 70(5):1241-1245.
- [45] Lou S Y, Hu X B. Infinitely many symmetries of the Davey-Stewartson equation[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1994, 27(7):L207-L212.
- [46] Lou S Y. Dromions, dromion lattice, breathers and instantons of the Davey-Stewartson equation[J]. Physica Scripta, 2002, 65(1):7-13.
- [47] Hirota R. Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons[J]. Physical Review Letters, 1971, 27(18):1192-1193.
- [48] Konopelchenko B G, Rogers C. On (2+1)-dimensional nonlinear systems of Loewner-type[J]. Physics Letters A, 1991, 158(8):391-397.
- [49] Konopelchenko B G, Rogers C. On generalized Loewner systems: Novel integrable equations in 2+1 dimensions[J]. Journal of Mathematical Physics, 1993, 34(1):214-242.
- [50] Nimmo J J C, Schief W K. Superposition principles associated with the Moutard transformation: An integrable discretization of a (2+1)-dimensional sine-Gordon system [J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1997, 453:255-279.
- [51] Lou S Y. Localized excitations of the (2+1)-dimensional sine-Gordon system[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2003, 36:3877-3892.
- [52] Lou S Y. (2+1)-dimensional compacton solutions with and without completely elastic interaction properties[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2002, 35:10619-10628.
- [53] Konopelchenko B G, Dubrovsky V G. A dimensional integrable generalization of the sine-Gordon equation I. Dressing and the initial value problem[J]. Studies in Applied Mathematics, 1993, 90(3):189-281.
- [54] Dubrovsky V. G. and Konopelchenko B. G. The 2+1 dimensional integrable generalization of the sine-Gordon equation. II. Localized solutions[J]. Inverse Problems, 1993, 9:391-416.
- [55] Dubrovsky V G, Formusatik I B. New solutions of two-dimensional integrable sine-Gordon equation generated by nontrivial singular boundaries[J]. Physics Letters A, 2001, 278(6):339-347.
- [56] Li C G, Chen G R. Chaos in the fractional-order autonomous nonlinear system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 22(2):549-554.

Multi-linear variable separation approaches for nonlinear systems

TANG Xiaoyan^{1,2}

(1.School of Mathematical Sciences, East China Normal University, Shanghai 200241, China;

2.Shanghai Key Laboratory of Pure Mathematics and Mathematical Practice, Shanghai 200241, China)

Abstract: It is known that the Fourier transform method and the variable separation approach, commonly applicable in linear physics, cannot be directly applied to nonlinear physics. Therefore, how to establish corresponding methods in nonlinear physics is a problem addressed by many physicists and mathematicians. In this paper, a variable separation method is presented, in which the multi-linear variable separation approach is applied to nonlinear systems to obtain multi-linear separation variable solutions with low-dimensional variable separation functions. The proposed approach is especially effective for the common case in which the multi-linear separation variable solution of an integrable system contains some arbitrary low-dimensional variable separation functions.

Key words: multi-linear variable separation approach; multi-linear variable separation solution; integrability

(责任编辑 章践立)