

致密磁流体中的非线性离子声波

杨建荣¹, 毛润华², 刘 萍³

(1. 上饶师范学院 物理与电子信息学院, 江西 上饶 334001; 2. 上饶师范学院 经济与管理学院, 江西 上饶 334001;
3. 电子科技大学中山学院 电子信息学院, 广东 中山 528402)

摘要: 磁化致密等离子体系统中具有丰富的非线性波动现象. 针对非均匀系统, 采用量子流体动力模型并考虑非线性效应、碰撞效应和某些高阶偏导项等因素, 构建了离子和中子间的碰撞频率与场量的变化率不同大小情况下的非线性控制方程. 利用不同的函数变换关系得到了一系列非线性离子声波的解析解, 其结果为阐明现实中所观察到的有关物理现象提供了有益的理论参考.

关键词: 磁化致密等离子体; 量子流体动力模型; 非线性离子声波; 函数变换法

中图分类号: O534

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0022-04

磁化等离子体科学与技术具有广泛的应用领域和发展前景, 宇宙中 99% 的可见物质都处于等离子体状态, 且 90% 以上以磁化等离子体的形式存在^[1]. 在等离子体中, 当带电粒子的德布罗意波长超过德拜波长, 并且接近费米波长时, 量子力学效应就起着很大的作用, 此时必须考虑量子散射和量子统计等效应^[2], 由此而形成了量子等离子体分支^[3]. 例如, 稠密的大气和天体等离子体^[4-5]、电子气^[6]、微观等离子体^[7]、尘埃磁等离子体^[8]、激光等离子体^[9]、超小电子器件^[10]等, 都要考虑等离子体的量子效应. 量子等离子体已经成为当前等离子体物理领域中比较热点的研究方向.

为了建立描述等离子体的控制方程, 一般采用磁流体力学方法和动力学方法^[1]. 其中磁流体力学方法常用于建立描述等离子体集体运动的非线性控制方程, 主要的非线性行为是由运动方程中对流项和洛伦兹力项产生的. 依据控制方程的解可探索等离子体集体运动的一些波动现象. Shukla 等^[11]用磁流体理论研究多组分的尘埃等离子体, 得到了一组磁流体力学方程. 后来 Haas 扩展应用到量子等离子体, 得到了量子流体动力(Quantum Hydrodynamics, QHD)模型, 描述了带电粒子系统的动量和能量的转换; 又考虑了有恒定外磁场作

用和具有量子关联项(即 Bohm 势)的情况, 得到了量子离子声波^[12].

虽然在外磁场作用下, 一些描述量子等离子体系统的方程已被建立, 但是往往忽略了其他一些因素的影响, 如非线性项、粒子间的碰撞、色散效应和某些偏导项等. 本文主要针对非均匀量子等离子体系统, 采用量子流体动力模型, 在考虑有外磁场作用和量子关联项的情况下, 对非线性项、碰撞效应和某些高阶偏导项等因素不忽略或少忽略, 构建非均匀磁化致密等离子体系统的非线性控制方程^[13-14].

由于等离子体非线性控制方程组存在高度的非线性项, 只有对少数的波动方程采用特殊的方法才能直接得到精确解或解析解. 因此, 探索求解量子等离子体非线性动力学方程的新方法, 寻找新的解析解, 是一项比较艰巨而又重要的任务. 本文介绍了对于推导的非均匀系统的二维非线性方程, 考虑离子和中子间的碰撞频率 ν_m 与场量的变化率 d_t 取不同数值的情况下, 用特殊函数变换法, 得到相干波中的冲击波、爆炸波和涡旋波的解析解, 为阐明致密天体物理环境, 例如中子星、磁星的大气中相关的非线性波动现象, 提供有益的理论参考.

1 磁流体的非线性方程

考虑以中子为背景, 含有离子和电子的非均匀量子等离子体系统, 处于均匀外磁场 $\mathbf{B}_0$ 环境的情况. 设 $\mathbf{B}_0$ 在 z 方向, 密度和温度的梯度在 x 方向, 电子的电量为 e . 电子和离子的质量分别为 m_e 、 m_i , 密度分别为 n_e 、 n_i , 速度分别为 $\mathbf{v}_e$ 、 $\mathbf{v}_i$.

根据量子流体动力学模型, 电子和离子的运动方程分别为

$$m_e n_e (\partial_t + \mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{v}_e + e n_e (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}_0) + \nabla p_e - \frac{\hbar^2 n_e}{2m_e} \nabla \left(\frac{\nabla^2 \sqrt{n_e}}{\sqrt{n_e}} \right) = 0, \quad (1)$$

$$m_i n_i (\partial_t + \mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i - e n_i (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_0) + m_i n_i \mathbf{v}_{in} \mathbf{v}_i = 0, \quad (2)$$

式中: 静电场强度 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ (ϕ 是静电势), $\mathbf{v}_{in}$ 为离子和中子之间的碰撞频率. 离子的连续性方程以及 Poisson 方程分别为:

$$\partial_t n_i + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (3)$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi e (n_i - n_e). \quad (4)$$

具体推导过程参考文献[13]. 假设 $\partial_x \ll \partial_z \ll \partial_y$, 得到离子和无惯性电子的二维非线性方程:

$$\hat{D} \left\{ \frac{3}{2} \partial_t \phi + a \partial_t \phi^2 - \lambda_{Fe}^2 \partial_t \partial_y^2 \phi + H^2 \partial_t \partial_y^2 \phi - \rho_s^2 \partial_t \partial_y^2 \phi - v_{in} \rho_s^2 \partial_y^2 \phi + \frac{3}{2} v_* \partial_y \phi - D_1 \partial_y \phi^2 \right\} - c_s^2 \partial_z^2 \phi = 0, \quad (5)$$

式中: $\hat{D}$ 算子定义为 $\hat{D} = d_t + \mathbf{v}_{in} \cdot \nabla = \partial_t + \mathbf{v}_{in} \cdot \nabla$; $a = -3e / (4k_B T_{Fe})$; $\lambda_{Fe} = \sqrt{k_B T_{Fe} / (4\pi e^2 n_0)}$ 为电子的费米波长; $H = \sqrt{9\hbar^2 / (16m_e k_B T_{Fe})}$ 为量子参量; $\rho_s = \sqrt{k_B T_{Fe} / (m_i \Omega_{ci}^2)}$ 为离子拉莫尔半径; T_{Fe} 为电子的费米温度; $c_s = \sqrt{k_B T_{Fe} / m_i}$ 为量子离子声速; $v_* = -2ck_B T_{Fe} / (3eB_0) k_n$ 为漂移速度; $D_1 = D_2 (k_n - k_{T_{Fe}})$. $D_2 = 3c / (4B_0)$, $k_n = |d_x \ln n_0|$ 为密度梯度, $k_{T_{Fe}} = |d_x \ln T_{Fe}|$ 为温度梯度, k_B 为 Boltzmann 常数, $\Omega_{ci} = eB_0 / (cm_i)$ 为离子的回旋频率.

2 碰撞频率较高时非线性离子声波解

考虑中子和离子间的碰撞频率与场量的变化率相比较时较高的情况, 即 $d_t \ll v_{in}$, 有 $\hat{D} = d_t + v_{in} \approx v_{in}$, 则方程(5)简化为

$$(3/2) \partial_t \phi + a \partial_t \phi^2 - \lambda_{Fe}^2 \partial_t \partial_y^2 \phi + H^2 \partial_t \partial_y^2 \phi - \rho_s^2 \partial_t \partial_y^2 \phi - v_{in} \rho_s^2 \partial_y^2 \phi + (3/2) v_* \partial_y \phi - D_1 \partial_y \phi^2 - (c_s^2 / v_{in}) \partial_z^2 \phi = 0. \quad (6)$$

方程(6)被归一化为

$$\partial_t \Phi + g_1 \partial_t \Phi^2 + g_2 \partial_t \partial_y^2 \Phi - g_3 \partial_y^2 \Phi - g_4 \partial_z^2 \Phi + g_5 \partial_y \Phi - g_6 \partial_y \Phi^2 = 0, \quad (7)$$

其中无量纲系数: $g_1 = -\frac{1}{2}$, $g_2 = -\frac{2}{3} \frac{\rho_s^2 + \lambda_{Fe}^2 - H^2}{\rho_s^2} =$

$$-\frac{2}{3} (1 + \lambda^2 - H_e^2), \quad g_3 = \frac{2}{3} \frac{v_{in}}{\Omega_{ci}} = \frac{2}{3} v, \quad g_4 = \frac{2}{3} \frac{\Omega_{ci}}{v_{in}} =$$

$$\frac{2}{3v}, \quad g_5 = -\frac{2ck_B T_{Fe}}{3eB_0 c_s} k_n = u, \quad g_6 = \frac{ck_B T_{Fe}}{2eB_0 c_s} (k_n - k_{T_{Fe}}) =$$

$-u/4$. 为了比较上述物理量的取值大小, 采用磁星和中子星等致密大气物理环境中的典型数据进行分析^[11,15-16], 可以得到下列参量^[13]: $g_1 = -0.5$, $g_2 = -1.18$, $g_3 = 0.07$, $g_4 = 6.67$, $g_5 = -0.08$, $g_6 = 0.02$. 由此可见, 非线性项是非常重要的, 以至于不能被忽略而应予保留, 同时要适当考虑密度梯度和温度梯度的非均匀项.

2.1 冲击波解和爆炸波解

具体求解过程参考文献[13]. 采用行波变换, 设 $\xi = k_1 y + k_2 z - k_3 t$, 其中 k_1 和 k_2 是非线性波数, k_3 是波频. 设解具有下列 $\tanh(\xi)$ 函数的展开形式:

$$\Phi(\xi) = b_0 + b_1 \tanh(\xi) + b_2 \tanh^2(\xi) + b_3 / \tanh(\xi) + b_4 / \tanh^2(\xi), \quad (8)$$

式中, b_i ($i = 0, 1, \dots, 4$) 为待定的常数. 代入方程(7), 求得如下漂移的冲击波解和爆炸波解:

$$\Phi_1 = \chi^{-1} \{ A - [2 \tanh(\xi) + \tanh^2(\xi)] B \}, \quad (9)$$

$$\Phi_2 = \chi^{-1} \{ A - [2 \coth(\xi) + \coth^2(\xi)] B \}, \quad (10)$$

式中,

$$\chi = -20g_1 g_2 k_3^2 - 2g_1 g_3 k_3 + 2g_6 k_2 \sqrt{-g_4 (10g_2 k_3 + g_3)},$$

$$A = 10g_2 k_3^2 + 12g_2 g_4 k_2^2 k_3 + g_3 k_3 +$$

$$g_5 k_2 \sqrt{-g_4 (10g_2 k_3 + g_3)},$$

$$\xi = -\frac{\sqrt{-g_4 (10g_2 k_3 + g_3)} k_2}{10g_2 k_3 + g_3} y + k_2 z - k_3 t,$$

$$B = 12g_2 g_4 k_2^2 k_3, \text{ 其中, } k_2 \text{ 和 } k_3 \text{ 是正的常数.}$$

2.2 涡旋解

为了寻找新的涡旋解, 构建下列特殊函数变换法求新解^[13]. 设方程(7)的解为

$$\Phi \equiv \Phi_3 = f_1 F(\xi) + f_2 \partial_\xi F(\xi) \partial_z \xi, \quad (11)$$

$$\partial_\xi^2 F(\xi) = -\alpha^2 F(\xi), \quad \partial_\xi^3 F(\xi) = -\alpha^2 \partial_\xi F(\xi),$$

$$\partial_\xi^4 F(\xi) = \alpha^4 F(\xi), \quad (12)$$

式中: f_1 和 f_2 为 (y, z, t) 的待定函数; α 为待定常数. 代入方程(7), 可得到 3 个方向周期分布的涡旋解.

z 方向周期分布的涡旋解:

$$\Phi_{31} = c_3 e^\theta (\eta_1 \sin \Theta + \eta_2 \cos \Theta), \quad (13)$$

式中: $\theta = c_5 (tg_6 + g_1 y) / g_6$; η_1 、 η_2 和 c_3 为任意常数; $\Theta = \sqrt{-g_4 c_5 (c_5^2 g_2 g_1^2 - c_5 g_3 g_1^2 + g_6 g_5 g_1 + g_6^2)} z / (g_6 g_4)$, c_5 为受到 $g_4^2 g_6^2 \Theta^2 / z^2 \geq 0$ 约束的常数. 可见变量 y 的系数直接依赖于非线性系数 g_1 和 g_6 .

y 方向周期分布的涡旋解:

$$\Phi_{32} = (c_3 \eta_2 + c_2 c_6 \eta_1 \alpha) \cos(\Theta') e^{c_4 z} +$$

$$(c_3 \eta_1 - c_2 c_6 \eta_2 \alpha) \sin(\Theta') e^{c_4 z}, \quad (14)$$

式中: $\Theta' = \frac{\alpha c_2 (tg_6 + g_1 y)}{g_6}$; $\alpha = \pm \frac{\sqrt{g_2 g_6 (g_6 + g_5 g_1)}}{g_1 c_2 g_2}$;

$c_4 = \pm \frac{\sqrt{g_6 g_4 g_2 g_3 (g_6 + g_5 g_1)}}{g_6 g_4 g_2}$; c_2 、 c_3 和 c_6 为任意常数.

可见变量 y 的系数直接依赖于非线性系数 g_1 和 g_6 , 而 z 的系数与方程(7)的所有归一化系数有关.

y 和 z 方向都周期分布的涡旋解:

$$\Phi_{33} = (c_3 \eta_2 + c_2 c_6 \eta_1 \alpha) \cos(\Theta'') e^{c_4 z} +$$

$$(c_3 \eta_1 - c_2 c_6 \eta_2 \alpha) \sin(\Theta'') e^{c_4 z}, \quad (15)$$

$$\Theta'' = \alpha (c_1 z g_6 + c_2 t g_6 + c_2 g_1 y) / g_6,$$

$$c_1 = \frac{c_2 (c_2^2 g_2 \alpha^2 g_1^2 - g_5 g_1 g_6 - g_6^2)}{\sqrt{-2 g_4 c_2 \alpha (-g_3 g_1^2 \alpha c_2 + \sqrt{B})} g_6},$$

$$c_4 = -\frac{\sqrt{-2 g_4 c_2 \alpha (-g_3 g_1^2 \alpha c_2 + \sqrt{B})}}{2 g_4 g_6}, \quad (16)$$

式中: $B = (g_2^2 c_2^2 \alpha^2 + g_3^2) g_1^4 c_2^2 \alpha^2 - 2 \alpha^2 c_2^2 g_2 g_1^2 g_6 \times (g_6 + g_5 g_1) + g_1 g_5 g_6^2 (g_5 g_1 + 2 g_6) + g_6^4$; c_3 、 c_6 为任意常数; 而 c_2 、 α 必须确保两式根号中的值都大于 0.

3 碰撞频率较低时非线性离子声波解

与场量的变化率相比较, 离子和中子间的碰撞频率较低, 亦即 $d_t \gg v_{in}$, 则 $\hat{D} = d_t + v_{in} \approx d_t$, 方程(5)简化为

$$(3/2) \partial_t^2 \phi + a \partial_t^2 \phi^2 + (H^2 - \lambda_{Fe}^2 - \rho_s^2) \partial_t^2 \partial_y^2 \phi -$$

$$v_{in} \rho_s^2 \partial_t \partial_y^2 \phi + (3/2) v_* \partial_t \partial_y \phi - D_1 \partial_t \partial_y \phi^2 -$$

$$c_s^2 \partial_z^2 \phi = 0. \quad (17)$$

方程(17)被归一化为

$$\partial_t^2 \Phi - g_1 \partial_t^2 \Phi^2 - g_2 \partial_t^2 \partial_y^2 \Phi - g_3 \partial_t \partial_y^2 \Phi - g_4 \partial_z^2 \Phi -$$

$$g_5 \partial_t \partial_y \Phi - g_6 \partial_t \partial_y \Phi^2 = 0, \quad (18)$$

式中: $g_1 = \frac{1}{2}$; $g_2 = \frac{2 \rho_s^2 + \lambda_{Fe}^2 - H^2}{3 \rho_s^2} = \frac{2}{3} (1 + A^2 -$

$H_c^2)$; $g_3 = \frac{2 v_{in}}{3 \Omega_{ci}} = \frac{2}{3} v$; $g_4 = \frac{2}{3}$; $g_5 = \frac{2 c k_B T_{Fe}}{3 e B_0 c_s} k_n =$

u ; $g_6 = \frac{c k_B T_{Fe}}{2 e B_0 c_s} (k_n - k_{T_{Fe}}) = \frac{1}{4} u$.

具体求解过程参考文献[14]. 类似于碰撞频率较高的求解方法, 可以得到方程(18)的漂移冲击波解 Φ_1 、爆炸波解 Φ_2 .

$$\Phi_1 = \chi'^{-1} \{A' - [2 \tanh(\xi') + \tanh^2(\xi')] B'\}, \quad (19)$$

$$\Phi_2 = \chi'^{-1} \{-A' + [2 \coth(\xi') + \coth^2(\xi')] B'\}, \quad (20)$$

式中: $A' = 12 g_2 g_3^2 k_1^2 + 10 g_2 g_3 g_5 k_1 - 100 g_2^2 g_4 k_2^2 + g_3^2$; $B' = 6 g_2 g_3 k_1^2$; $\chi' = 2 g_3 (g_1 g_3 - 10 g_2 k_1 g_6)$; $\xi' = k_1 y + k_2 z - k_3 t$, k_1 和 k_2 为任意常数, $k_3 = g_3 / (10 g_2)$.

得到涡旋解 Φ_3 为:

$$\Phi_3 = e^\beta \{ \alpha c_1 c_4 [\eta_1 \cos(\alpha c_1 z) - \eta_2 \sin(\alpha c_1 z)] +$$

$$c_2 [\eta_1 \sin(\alpha c_1 z) + \eta_2 \cos(\alpha c_1 z)] \}, \quad (21)$$

$$c_1 = \sqrt{g_4 g_6 (g_6 g_2 g_1^2 c_5^2 + g_3 g_1^2 c_5 - g_6 - g_5 g_1)} c_5 /$$

$$(g_4 \alpha), \quad (22)$$

$$c_3 = c_5, \quad \beta = c_5 (g_6 t - g_1 y),$$

$$g_6 g_2 g_1^2 c_5^2 + g_3 g_1^2 c_5 - g_6 - g_5 g_1 > 0, \quad (23)$$

式中: c_1 由(22)式决定; c_5 受(23)式制约; c_2 、 c_4 、 η_1 、 η_2 和 α 为任意常数.

4 讨论和总结

以上介绍了利用量子磁流体动力学模型, 获得致密等离子体物理环境中的非线性方程, 采用合适的非线性数学方法, 得到了离子声波的冲击波、爆炸波和涡旋波的非线性解, 相关解描述了在现实和实验中观察到的物理现象. 根据典型参量条件, 例如中子星和磁星的等离子体物理条件, 通过数值分析和模拟, 可以发现冲击波的强度和爆炸波的宽度分别随着密度的增大(即随量子参量 H_c 的减小)而增大; 随漂移速度的增大(即随密度和温度梯度的增大)和磁场强度的增大而增大($v_{in} \gg d_t$)或减小($v_{in} \ll d_t$); 随着碰撞频率的增大而增大($v_{in} \ll d_t$)或减小($v_{in} \gg d_t$). 电势随时空相位的增

大而趋向于稳定值, 系统最后达到稳定的状态. 总之, 冲击波和爆炸波随着时空相位和密度的变化情况是一致的; 随漂移速度、磁场强度和碰撞频率的变化情况则刚好相反^[13-14], 反映了两个物理参量 v_{in} 和 d_i 对系统状态变化的影响非常大.

另外, 通过分析涡旋结构分布的静电势, 发现在 x - y 平面中, 涡旋在某个方向总是具有衰减的趋势, 而在另一方向或倾角方向表现出周期性变化的规律, 形成了周期性的涡流. 本文所得到的结果对解释实际中所观察到的有关物理现象具有一定的理论意义.

参考文献:

- [1] 郑春开. 等离子体物理[M]. 北京: 北京大学出版社, 2009.
- [2] Stenflo L, Shukla P K, Marklund M. New low-frequency oscillations in quantum dusty plasmas[J]. Europhysics Letters, 2006, 74(5):844-846.
- [3] Haas F. Quantum Plasmas: An Hydrodynamic Approach [M]. New York: Springer, 2011.
- [4] Jung Y D. Quantum-mechanical effects on electron-electron scattering in dense high-temperature plasmas[J]. Physics of Plasmas, 2001, 8(8):3842-3844.
- [5] Opher M, Silva L O, Dauger D E, et al. Nuclear reaction rates and energy in stellar plasmas: The effect of highly damped modes[J]. Physics of Plasmas, 2001, 8(5):2454-2460.
- [6] Manfredi G, Haas F. Self-consistent fluid model for a quantum electron gas[J]. Physical Review B, 2001, 64: 075316.
- [7] Becker K H, Schoenbach K H, Eden J E. Microplasmas and applications[J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2006, 39(3):R55-R70.
- [8] Shukla P K, Ali S. Dust acoustic waves in quantum plasmas[J]. Physics of Plasmas, 2005, 12(11):114502.
- [9] Kremp D, Bornath Th, Bonitz M, et al. Quantum kinetic theory of plasmas in strong laser fields[J]. Physical Review E, 1999, 60:4725-4732.
- [10] Markowich P A, Ringhofer C, Schmeiser C. Semiconductor Equations[M]. New York: Springer, 1990.
- [11] Shukla P K, Rahman H U. Magnetohydrodynamics of dusty plasmas[J]. Physics of Plasmas, 1996, 3(1):430-431.
- [12] Haas F, Garcia L G, Goedert J, et al. Quantum ion-acoustic waves[J]. Physics of Plasmas, 2003, 10(10): 3858-3866.
- [13] Yang J R, Tang X Y, Gao X N, et al. Drift shocks, explosions and vortices in inhomogeneous quantum magnetoplasma[J]. Europhysics Letters, 2011, 94(4):45001.
- [14] 毛杰健, 杨建荣, 李超英. 非均匀量子等离子体中的非线性波[J]. 物理学报, 2012, 61(2):30-35.
- [15] Yang J R, Tang X Y, Lou S Y. Shocks, explosions, and vortices in two-dimensional homogeneous quantum magnetoplasma[J]. Physics of Plasmas, 2011, 18(2):022303.
- [16] Moslem W M, Ali S, Shukla P K, et al. Solitary, explosive, and periodic solutions of the quantum Zakharov-Kuznetsov equation and its transverse instability[J]. Physics of Plasmas, 2007, 14(8):082308.

Nonlinear ion acoustic wave in dense magnetoplasma

YANG Jianrong¹, MAO Runhua², LIU Ping³

(1.School of Physics and Electronics, Shangrao Normal University, Shangrao 334001, China; 2.School of Economics and Management, Shangrao Normal University, Shangrao 334001, China; 3.School of Electronic and Information Engineering, University of Electronic Science and Technology of China Zhongshan Institute, Zhongshan 528402, China)

Abstract: There are manifold nonlinear fluctuations in magnetized dense plasma systems. For the nonuniform system, the nonlinear governing equations are established using the quantum hydrodynamic model and considering nonlinear effect, collision effect and some higher order derivatives, which are in the different cases of the collision frequency and the change rate of field. A series of nonlinear solutions of ion acoustic wave are obtained by employing different nonlinear functional transformations. These results provide useful theoretical references for describing the relevant real-world phenomena.

Key words: magnetized dense plasma; quantum hydrodynamic model; nonlinear ion acoustic wave; functional transformation method

(责任编辑 韩 超)