

非线性系统的一般条件对称和导数相关泛函分离变量法

张顺利

(西北大学 数学学院, 陕西 西安 710127)

摘要: 众所周知, Fourier 分析和分离变量法是研究线性系统的有效手段, 但分离变量法难以推广到非线性系统. 发展处理非线性系统的新的分离变量法迫在眉睫. 首先提出导数相关泛函分离变量解(DDFSS)的新概念, 给出定义, 据此寻求相应的一般条件对称(GCS), 创建理论体系(简称 DDFSS 方法). 尔后, 分别应用 DDFSS 方法于一般非线性扩散方程、KdV 类方程、一般非线性波动方程: (1)对所考察方程做了 DDFSS 可解的完全归类; (2)利用 DDFSS 方法建立了所得分类方程的 DDFSS 精确解; (3)描述了一些解的局域激发等性质, 给出了有关结果的对称群解释. 最后指出, DDFSS 方法可发展应用于求解某些高维方程和方程组问题, 更能扩展用于处理带扰动项的非线性系统.

关键词: 一般非线性扩散方程; KdV 类方程; 一般非线性波动方程; 一般条件对称; 导数相关泛函分离变量解

中图分类号: O175.29

文献标志码: A

文章编号: 1001-5132 (2020) 05-0026-06

非线性现象广泛地来源于物理、化学、生命、社会、经济等领域. 随着科学技术的日新月异, 对非线性系统的研究不断深入. 对描述非线性系统的非线性方程的性质和求解之研究已成为重要课题之一.

众所周知, 傅立叶分析和分离变量法是线性科学中强有力的两大工具. 反散射方法是傅立叶方法在非线性可积系统的成功推广. 而分离变量法在非线性系统中一直未得到成功运用. 已有几种类型的非线性分离变量法相对独立地出现. 为了有效地分析和求解非线性系统, 提出新理论, 创建新的分离变量法, 乃至推广或统一已知的多种分离变量法刻不容缓.

在分离变量的研究方向, 1977 年, Miller 用经典 Lie 对称实现了线性方程的分离变量; 1985 年, Kalnins 和 Miller 引入了微分 Stackel 矩阵方法; 1996 年, Dolye 提出了微分几何方法; 几乎与此同时, Zhdanov 等学者建立了各种不同形式的 ansatz-based 方法等^[1-3].

非线性科学中非线性分离变量法的研究在我国也有重要进展, 其中最典型的有三种方法. 第一种方法称之为 Cao 等的(Lax 对的)非线性化方法(Cheng、Li 和 Zeng 称之为对称约束法, Lou 和 Chen 称之为形式分离变量法). 第二种方法是 Qu、Zhang 等的基于一般条件对称(GCS)的泛函分离变量法(FVSA); 第三种方法是 Lou、Tang 等建立的多线性分离变量法(MLVSA).

然而, 后两种分离变量法的研究还需要进一步深入、发展、完善和沟通. 就泛函分离变量法(FVSA)而言, 一方面, 对于非线性系统, 为了得到和考察新的类别, 获得更多新解, 基于一般条件对称的泛函分离变量解(FSS)有待推广; 另一方面, 该方法的推广有望统一至少包括 MLVSA 在内的多种分离变量法. 而关于第二种方法(FVSA)的研究还停留在其本身上, 尚无实质性进展.

为了更有效地研究非线性系统, 必须推广 FSS 的概念. 本文中, 首先提出导数相关泛函分离变量解(DDFSS)的新概念, 给出定义, 据此寻求相应的

一般条件对称(GCS), 构建理论体系(简称 DDFSS 方法); 之后分别应用 DDFSS 方法考察一般非线性扩散方程、KdV 类方程和一般非线性波动方程: (1) 对所考察方程做了 DDFSS 可解的完全分类; (2) 利用 DDFSS 方法建立了所得分类方程的 DDFSS 精确解; (3) 描述了一些解的局域激发等性质, 给出了有关结果的对称群解释. 本研究的关键和难点在于寻找合适的 GCS 及对大型偏微分方程组的完全求解.

在研究利用 DDFSS 对非线性系统进行 DDFSS 分类和求解时, 针对不同类型的非线性模型, 首先要求各种场量及其导数的某种(泛函)组合可以有加法或乘法的分离变量解; 接着基于这一要求确定相应的一般条件对称; 再利用所获的一般条件对称(群)方法确定所有可能的方程和可能的泛函组合, 给出该类型方程的所有 DDFSS 可解等价类; 最后分别求出归类方程的导数相关泛函分离变量解(DDFSS).

利用一般条件对称将 MLVSA 和 DDFSS 两种分离变量法加以理论抽象和有机统一. DDFSS 计算复杂, 难度较大, 但有望发展成一个系统的方法并包含 MLVSA 甚至现有的多种分离变量法的结果. 因此, 本研究还将考虑统一 DDFSS 和 MLVSA, 然后试图统一其他多种分离变量法. 关键问题在于推广相应的一般条件对称.

本工作的创新与特色在于: (1) 理论上, 提出 DDFSS 新概念, 定义不同类型的 DDFSS, 揭示这一新概念与一般条件对称的内在联系; (2) 方法上, 建立 DDFSS 方法的理论框架和实现步骤, 应用和发展 DDFSS 方法; (3) 内容上, 分别用 DDFSS 方法获得了 3 种类型的一般方程——一般非线性扩散方程、KdV 类方程和一般非线性波动方程的 DDFSS 可解的完全分类, 以及分类方程的 DDFSS 解.

勿容置疑, 导数相关泛函分离变量法基于一般条件对称, 因而有很大的发展潜力和应用价值: (1) 可以将此方法推广到高维系统和方程组等情形, 扩展方法的应用范围; (2) 通过推广 DDFSS 概念或将统一现有的多种分离变量法, 包括统一多线性分离变量法; (3) 推广解的形式超越分离变量解本身; (4) 研究不同方程之间的变换; (5) 寻找所得分类模型的应用背景.

1 分离变量法

Fourier 分析和分离变量法是处理线性系统的两大工具. 而对于非线性系统, 反散射方法是 Fourier 分析的成功推广. 分离变量法在非线性系统的研究中同样有着重要作用, 目前统一的方法尚缺乏, 因而亟待建立. 非线性分离变量法主要包括: 几何方法(Dolye), ansatz-based 方法(Zhdanov), 形式分离变量法(曹策问、耿献国、程艺、李翊神、曾云波、乔志军、周汝光、马文秀、周子翔), 泛函分离变量法(Qu, Zhang), 导数相关泛函分离变量法(Zhang, Lou, Qu), 多线性分离变量法(Lou, Tang) 等等^[1-4].

研究非线性系统的分离变量法, 首先需要对一些不同类型的方法进行分析、比较, 以便取其共性优点, 构建新理论框架, 最后探究统一多种分离变量法.

2 泛函分离变量法

Qu 和 Zhang 等对非线性发展方程的泛函分离变量解, 提出了利用一般条件对称对方程进行分类和求解的步骤和方法, 称作泛函分离变量法^[5-7].

对于非线性发展方程, 为叙述简明起见, 以下考察 Klein-Gordon 方程:

$$u_{tt} - u_{xx} = F(u). \quad (1)$$

人们感兴趣的是方程(1)的乘积分解

$$u = \phi(x)\psi(t) \quad (2)$$

或和式分离解

$$u = \phi(x) + \psi(t). \quad (3)$$

然而, 一般的非线性方程不一定有这种解. 因此, 可以寻求如下形式的分离解——泛函分离解(FSS):

$$f(u) = \phi(x) + \psi(t), \quad (4)$$

式中, $f(u)$ 为可逆函数. 泛函分离解(4)满足对称约束

$$\eta \equiv u_{xt} + g(u)u_x u_t = 0, \quad (5)$$

式中, $g(u) \equiv f''(u)/f'(u)$. 此时寻求 FSS 的问题等价于寻求方程(1)的下列一般条件对称:

$$V = \eta \frac{\partial}{\partial u} \equiv [u_{xt} + g(u)u_x u_t] \frac{\partial}{\partial u}. \quad (6)$$

定义 1 一般向量场(6)叫做方程(1)的一般条件对称(GCS), 如果

$$V^{(2)}(\Delta)|_{E \cap W} = 0, \quad (7)$$

其中 E 是方程(1)的解流形, W 是附加于(1)的方程列 $D_x^i \eta = 0, i = 0, 1, 2, \dots$, 相应于不变曲面条件及其关于 x 的各阶全导数.

以下计算 $V^{(2)}(\Delta)|_{E \cap W}$.

对于方程(1), V 的二阶延长为

$$V^{(2)} = \eta \frac{\partial}{\partial u} + D_t^2 \eta \frac{\partial}{\partial u_t} + D_x^2 \eta \frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

$V^{(2)}$ 作用于方程(1), 即

$$V^{(2)}(u_{tt} - u_{xx} - F(u))|_{E \cap W} =$$

$$[D_t^2 \eta - D_x^2 \eta - F'(u)\eta]|_{E \cap W},$$

借助于表达式 $D_x^i \eta = 0, i = 0, 1, 2, \dots$ 和方程(1), 消去 u 的高阶导函数, 上式化为含有 u 的相互独立的偏导数项形式

$$\begin{aligned} V^{(2)}(u_{tt} - u_{xx} - F(u))|_{E \cap W} &= D_t^2 \eta|_{E \cap W} = \\ &[g''(u) - 2g(u)g'(u)]u_t^3 u_x + \\ &[2g(u)g'(u) - g''(u)]u_t u_x^3 + \\ &[F''(u) + g(u)F'(u) + \\ &(3g'(u) - 2g(u)^2)F(u)]u_t u_x. \end{aligned} \quad (8)$$

方程(1)容许一般条件对称(6)当且仅当表达式(8)为 0, 由此给出方程(1)具有泛函分离解的下述充要条件定理.

定理 1 方程(1)具有泛函分离解(4)当且仅当

$$g'' - 2gg' = 0, F'' + gF' + (3g' - 2g^2)F = 0. \quad (9)$$

此时求解式(9), 可获得方程(1)具有泛函分离解(4)的完全分类结果; 对所得任一等价类, 由 $g(u)$ 定出 $f(u)$, 再求其逆可得 $u = f^{-1}(\phi(x) + \psi(t))$, 把它代入对应方程得到确定 $\phi(x)$ 和 $\psi(t)$ 的常微分方程组, 通过求解该常微分方程组可得等价类方程的泛函分离变量解.

3 导数相关泛函分离变量法

几何方法(Doyle)是将分离变量问题转化为微分几何形式. 构造不变量易于表述场变量, 简化分离变量条件, 即微分约束和相容性条件. 求解相容性条件可得方程的分离变量可解分类. 但这方面的研究目前已停滞, 且仅限于和式分离解. ansatz-based (Zhdanov)方法是预先给出某种分离变量解的一般形式(ansatz), 令 ansatz 中新的坐标函数满

足设定的包含任意函数的常微分方程(ODEs), 将 ansatz 及 ODEs 代入原始方程, 得到的常常是复杂的非线性偏微分方程组, 求解之获得分离变量可解分类. 这是一个朴素的方法, 它体现了约化的方向, 难点是求解非线性偏微分方程组无规律可循, 技巧性较强. 1995 年后, 未看到研究论文. 形式分离变量法对不可积模型应用起来比较困难. 尽管如此, 分离变量法在某些方向得到了长足发展. 其中引人注目的是多线性分离变量法(MLVSA)和泛函分离变量法(FVSA). MLVSA 已成功应用于求解众多的可积模型, 得到了一个普适公式, 由于公式中包含有任意函数及其导函数, 适当选取参数便可得到各种各样的已知的和新的局域激发模式. FVSA 在对一般非线性扩散方程、一般非线性波动方程的分类和求解中取得了不少进展.

纵观这些分离变量法: (1)定义的 ansatz 不同, 几何方法、ansatz-based 方法、形式分离变量法和多线性分离变量法均直接给出解的待定式(ansatz for u), 而泛函分离变量法解的形式隐含, 式(4)的左端不是 u , 而是 $f(u)$, 虽然右端局限于和式 $\phi(x) + \psi(t)$; (2)处理问题的方式不同, 几何方法将分离变量问题转化为微分形式后, 得到可积性条件——方程分类的依据. ansatz-based 方法、形式分离变量法是预设某种包含任意函数的形式解, 一些任意函数又满足特定形式的高阶导数已解出的待定常微分方程, 将形式解代入原始方程, 接着利用这些常微分方程进行约化, 约化结果可化为确定分离变量分类的偏微分方程组. 对于 ansatz-based 方法, 求解这些偏微分方程组需要高度技巧性, 无普遍规律可循, 有时比求解原始方程更难. 而泛函分离变量法, 是将解的 ansatz 转化为对称约束, 充分利用一般条件对称这一优势, 使得方程的分类和求解约化系统化、程序化, 并可对某些结果作出对称群解释, 处理非线性发展方程, 泛函分离变量法已经成为一个行之有效的方法; (3)共性的抽象, 非线性方程的约化、求解需要满足一些约束条件, 约束条件常常与某种对称相联系. 所以, 一般条件对称是一个强有力的工具. 由于一般条件对称的引入, 一方面, 所有解的 ansatz 原则上可以转化为具体的条件对称, 可用一般条件对称处理非线性问题, 获得更多新结果. 另一方面, 泛函分

离变量法有望统一其他多种分离变量法, 需要对分离变量解的 ansatz 做适当的推广, 并找到相应的条件对称, 即可得到多种多样的推广形式. 例如, 对于(1+1)维模型, 可定义下列形式的分离变量解:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & f(u, u_x) = \phi(x) + \psi(t), \\ \text{(ii)} \quad & f(u, u_x) = \phi(x) + \psi(t) + \xi(x)\eta(t), \\ \text{(iii)} \quad & f(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = \\ & \sum_{i=1}^M (\phi_i(x) + \psi_i(t)) + \sum_{i=1}^N \xi_i(x)\eta_i(t), \\ \text{(iv)} \quad & f(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = \\ & F(\xi, \eta), \xi = \xi(x, t), \eta = \eta(x, t). \end{aligned} \quad (10)$$

当然, 对于处理方程组, 在高维系统和离散情形下, 泛函分离变量概念也可做类似推广.

本文首先提出了导数相关泛函分离变量解(DDFSS)式(10)的新概念, 由此导出相应的一般条件对称(GCS), 建立了利用 GCS 处理非线性发展方程 DDFSS 问题的基本理论体系, 然后依次解决三大方程——一般非线性扩散方程、KdV 类方程和一般非线性波动方程的 DDFSS 问题: 完成了上述一般方程的 DDFSS 可解的完全分类, 建立了所获分类方程的 DDFSS 精确解, 描述了一些解的局域激发等性质, 给出了某些解的对称群解释. 由于篇幅过于冗长, 本文略之^[4,8-20].

4 总结与讨论

本文简述了几种重要的分离变量法. 在对这些分离变量法进行分析比较的基础上, 找出其差异, 抽象其共性: 约化与对称. 指出了泛函分离变量法的局限性(ansatz)和潜在优势(GCS), 利用 GCS, 对泛函分离变量法提出各种各样的推广. 提出了导数相关泛函分离变量法的新方法. 分别就一般非线性扩散方程、KdV 类方程和一般非线性波动方程, 定义了导数相关泛函分离变量解(10), 导出了相应的一般条件对称(GCS), 建立了利用 GCS 处理非线性发展方程 DDFSS 问题的基本理论框架, 完成了三大类一般方程的 DDFSS 可解的完全分类, 获得了分类方程的 DDFSS 精确解, 讨论了一些解的局域激发等性质, 给出了某些解的对称群解释.

然而, 仅仅几个典型一般方程的 DDFSS (10) 可解归类和求解工作获得完成. 有关导数相关泛函分离变量法的研究, 还有以下问题部分完成或

有待进一步解决^[4,21-38].

(1)对于上述三大一般方程, 讨论其他形式的导数相关泛函分离解.

例如, 讨论一般非线性波动方程的下述导数相关泛函分离解:

$$f(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) = \phi(x) + \psi(t).$$

(2)导数相关泛函分离变量法向高维非线性方程和方程组情形的推广.

例如, 研究(2+1)-维一般非线性扩散方程

$$u_t = A(u, u_x, u_y)u_{xx} + B(u, u_x, u_y)u_{yy} + C(u, u_x, u_y)$$

的导数相关泛函分离解

$$f(u, u_x, u_y) = \phi(x) + \psi(y) + \chi(t)$$

问题.

(3)导数相关泛函分离变量法可推广到研究具有小参数扰动项的非线性系统. 首先需要定义导数相关泛函分离变量近似解、一般近似条件对称等概念. 此项工作参见吉飞宇博士的论文. 同时, 作为国家自然科学基金面上项目——基于近似广义对称的扰动非线性方程的若干问题的部分研究内容, 相关工作已于 2017 年底结题完成.

参考文献:

- [1] Olver P J. Application of Lie Groups to Differential Equations[M]. 2nd ed. New York: Springer, 1993.
- [2] Ames W F. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering[M]. New York: Academic Press, 1972.
- [3] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations[M]. New York: Springer, 1989.
- [4] 楼森岳, 唐晓艳. 非线性数学物理方法[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [5] Qu C Z, Zhang S L, Liu R C. Separation of variables and exact solutions to quasilinear diffusion equations with nonlinear source[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2000, 144(1/2):97-123.
- [6] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z. Variable separation and exact solutions to generalized nonlinear diffusion equations[J]. Chinese Physics Letters, 2002, 19(12):1741-1744.
- [7] Estévez P G, Qu C Z, Zhang S L. Separation of variables of a generalized porous medium equation with nonlinear source[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 275(1):44-59.
- [8] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z. New variable separation approach: Application to nonlinear diffusion equations[J].

- Journal of Physics A: Mathematical and General, 2003, 36(49):12223-12242.
- [9] Zhang S L, Lou S Y. Variable separation and derivative-dependent functional separable solutions to generalized KdV equations[J]. Communications in Theoretical Physics, 2003, 40(4):401-406.
- [10] Zhang S L, Lou S Y. Derivative-dependent functional separable solutions for the KdV-type equations[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2004, 335(3/4):430-444.
- [11] Zhang S L, Lou S Y. Variable separation and derivative-dependent functional separable solutions to generalized nonlinear wave equations[J]. Communications in Theoretical Physics, 2004, 41(2):161-174.
- [12] Qu C Z, Zhang S L. Conditional symmetry groups of nonlinear diffusion equations with x -dependent convection and absorption[J]. Communications in Theoretical Physics, 2004, 41(2):231-234.
- [13] Qu C Z, Zhang S L. Extended group foliation method and functional separation of variables to nonlinear wave equations[J]. Communications in Theoretical Physics, 2005, 44(4):577-582.
- [14] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z, et al. Classification and functional separable solutions to extended nonlinear wave equations[J]. Communications in Theoretical Physics, 2005, 44(4):589-596.
- [15] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z. Functional variable separation for extended (1+2)-dimensional nonlinear wave equations[J]. Chinese Physics Letters, 2005, 22(11):2731-2734.
- [16] Qu C Z, Zhang S L. Group foliation method and functional separation of variables to nonlinear diffusion equations[J]. Chinese Physics Letters, 2005, 22(7):1563-1566.
- [17] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z. Functional variable separation for generalized (1+2)-dimensional nonlinear diffusion equations[J]. Chinese Physics Letters, 2005, 22(5):1029-1032.
- [18] Zhang S L, Qu C Z. Approximate generalized conditional symmetries for the perturbed nonlinear diffusion-convection equations[J]. Chinese Physics Letters, 2006, 23(3):527-530.
- [19] Zhang S L. Variable separation and exact separable solutions for equations of type $u_{xt}=A(u, u_x)u_{xx}+B(u, u_x)$ [J]. Communications in Theoretical Physics, 2006, 45(6):969-978.
- [20] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z. The derivative-dependent functional variable separation for the evolution equations[J]. Chinese Physics, 2006, 15(12):2765-2776.
- [21] Zhang S L, Wang P Z, Qu C Z. Approximate generalized conditional symmetries for the perturbed general KdV-Burgers equation[J]. Chinese Physics Letters, 2006, 23(10):2625-2628.
- [22] Zhang S L, Li J N. Initial-value problems for extended KdV-Burgers equations via generalized conditional Symmetries[J]. Chinese Physics Letters, 2007, 24(6):1433-1436.
- [23] Zhang S L, Wang Y, Lou S Y. Approximate generalized conditional symmetries for perturbed evolution equations [J]. Communications in Theoretical Physics, 2007(6):975-980.
- [24] Zhang S L, Lou S Y. Functional variable separation for extended nonlinear elliptic equations[J]. Communications in Theoretical Physics, 2007, 48(3):385-390.
- [25] Wang Y, Zhang S L. Classification and approximate solutions to the perturbed nonlinear diffusion-convection equations[J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 49(1):17-21.
- [26] Li J N, Zhang S L, Zuo S L. Cauchy problems for the KdV-type equations and higher-order conditional symmetries[J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 49(3):545-548.
- [27] Zhang S L, Zhu X N, Wang Y M, et al. Extension of variable separable solutions for nonlinear evolution equations[J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 49(4):829-832.
- [28] Li J N, Zhang S L. Symmetry reduction and Cauchy problems for a class of fourth-order evolution equations [J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 50(1):31-38.
- [29] Wang P Z, Zhang S L. Variable separation for (1+1)-dimensional nonlinear evolution equations with mixed partial derivatives[J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 50(4):797-802.
- [30] Li J N, Feng W, Qi X L, et al. Symmetry reduction of initial-value problems for a class of third-order evolution equations[J]. Communications in Theoretical Physics, 2009(7):55-59.
- [31] Li J N, Zhang S L, Su J R. Symmetry reductions of Cauchy problems for fourth-order quasi-linear parabolic equations[J]. Communications in Theoretical Physics, 2010, 53(1):28-36.
- [32] Li J N, Zhang Y, Zhang S L. Preliminary group classification for one class of nonlinear wave equations[J].

- Communications in Theoretical Physics, 2010, 54(2):229-235.
- [33] Li J N, Zhang S L. Approximate symmetry reduction for initial-value problems of the extended KdV-Burgers equations with perturbation[J]. Chinese Physics Letters, 2011, 28:030201.
- [34] 吉飞宇, 张顺利. 带有扰动非线性源的多孔介质方程的近似泛函分离变量[J]. 物理学报, 2012, 61(8):6-12.
- [35] Zhang S L, Ji F Y, Qu C Z. Approximate derivative-dependent functional variable separation for the generalized diffusion equations with perturbation[J]. Communications in Theoretical Physics, 2012, 58(2):175-181.
- [36] Ji F Y, Zhang S L. Classification and approximate functional separable solutions to the generalized diffusion equations with perturbation[J]. Zeitschrift Für Naturforschung A, 2013, 68(10/11):621-628.
- [37] Ji F Y, Zhang S L. New variable separation solutions for the generalized nonlinear diffusion equations[J]. Chinese Physics B, 2016, 25(3):030202.
- [38] Xia Y R, Zhang S L, Xin X P. Perturbed invariant subspaces and approximate generalized functional variable separation solution for nonlinear diffusion-convection equations with weak source[J]. Modern Physics Letters B, 2018, 32(7):1850093.

Generalized conditional symmetries and derivative-dependent functional variable separation approaches for nonlinear systems

ZHANG Shunli

(School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: It is well known that both the Fourier analysis and the variable separation approach are effective means for solving problems in linear systems. However, it is quite difficult to extend the variable separation approach into nonlinear systems. It is worth the effort to develop new approaches of variable separation to deal with some nonlinear systems. In this paper, we bring forward a novel concept of the derivative-dependent functional separable solutions (DDFSSs). Under the given definition, its corresponding generalized conditional symmetry (GCS) is sought, and elementary theories involving the DDFSS approach is established. Next, the DDFSS approach is applied to the generalized nonlinear diffusion equations, the KdV type equations and the extended nonlinear wave equations, respectively. The following objectives have been achieved in this study: (1) a complete list of canonical forms is acquired which expresses the classification results of the considered equations; (2) the exact solutions are obtained to the resulting equations via the GCS method; (3) the localized excitations of certain solutions are characterized and the symmetry group interpretation is given to some solutions. Finally, some points can be made for the fact that the DDFSS approach can be developed to solve some high dimensional equations, systems of equations, and can also be extended even further to deal with some perturbed nonlinear systems.

Key words: generalized nonlinear diffusion equations; KdV type equations; extended nonlinear wave equations; generalized conditional symmetry (GCS); derivative-dependent functional separable solution (DDFSS)

(责任编辑 韩 超)